PSI2 | **DM12** (Extrait de CCP PSI 2017) | pour lundi 15 janvier 2024

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ une fonction continue telle que la fonction $F \ : \ x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ soit bornée.

1. Montrer que pour tout $a > 0$, les intégrales généralisées $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ puis $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ sont convergentes et que

$$\int_a^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_a^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t - \frac{F(a)}{a}$$

2. Montrer que les intégrales généralisées $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ sont convergentes et que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Dans ce qui suit, on considère une fonction continue $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ soit absolument convergente.

3. Montrer que la fonction

$$\mathcal{L}(f) \ : \ x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

est bien définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.

4. On suppose de plus que la fonction f est bornée. Montrer que $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$ et que $\mathcal{L}(f)(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

5. Soit $f \ : \ t \in \mathbb{R}^+ \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$.

a) Montrer que la fonction $\mathcal{L}(f)$ est solution sur $]0,+\infty[$ de l'équation différentielle

$$y'' + y = \frac{1}{x} \qquad (E)$$

b) On cherche une solution particulière de (E) de la forme $x \mapsto \alpha(x)\cos(x) + \beta(x)\sin(x)$ où les fonctions α et β sont de classe $\mathcal{C}^2$ et vérifient

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ \alpha'(x)\cos(x) + \beta'(x)\sin(x) = 0$$

Montrer que l'on peut prendre $\alpha(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} f_1(t)\,\mathrm{d}t$ et $\beta(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} f_2(t)\,\mathrm{d}t$ où f_1, f_2 sont des fonctions que l'on déterminera.

c) En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\,\mathrm{d}t$ est une solution de (E) sur $]0,+\infty[$.

d) Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x > 0,\ \mathcal{L}(f)(x) = a\cos(x) + b\sin(x) + \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\,\mathrm{d}t$$

6. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\,\mathrm{d}t$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ et en déduire que pour tout $x > 0$ on a

$$\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\,\mathrm{d}t$$

7. Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{x+t} - \frac{\sin(t)}{t}\right)\mathrm{d}t$ tend vers 0 quand x tend vers 0^+. En déduire que

$$\lim_{x\to 0^+} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

8. Déduire des questions précédentes que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.