Correction du DM12

(Extrait de CCP PSI 2017)

---

1. f est continue donc F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et $t \mapsto \dfrac{F(t)}{t^2}$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $[a,+\infty[$. Comme F est bornée sur $\mathbb{R}^+$, on a $\dfrac{F(t)}{t^2} \underset{t\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donc $t \mapsto \dfrac{F(t)}{t^2}$ est intégrable sur $[a,+\infty[$.

Les fonctions F et $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ et $\dfrac{F(t)}{t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ donc, par IPP, les intégrales $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ sont de même nature donc existent toutes les deux et on a $\boxed{\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = -\frac{F(a)}{a} + \int_a^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t}$

2. Si $f(t) = \sin(t)$ alors $F(t) = 1-\cos(t) = 2\sin^2\left(\dfrac{t}{2}\right)$ est bien bornée sur $\mathbb{R}^+$ donc on vient de prouver que, pour $a>0$, on a $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = -\frac{2\sin^2\frac{a}{2}}{a} + 2\int_a^{+\infty} \frac{\sin^2\frac{t}{2}}{t^2}\,\mathrm{d}t$. On pose $u = \dfrac{t}{2}$ dans la dernière intégrale : $u \mapsto 2u$ est $\mathcal{C}^1$, bijective et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc $\displaystyle 2\int_a^{+\infty} \frac{\sin^2\frac{t}{2}}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{a/2}^{+\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2}\,\mathrm{d}u$. Enfin, on fait tendre a vers 0 : on a $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$ donc $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$ est intégrable sur $]0,1]$, de même que $t \mapsto \dfrac{\sin^2 t}{t^2}$ et $\displaystyle\lim_{a\to 0} \frac{\sin^2\frac{a}{2}}{a} = 0$ donc $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t}$

3. On applique le théorème avec $g(x,t) = f(t)e^{-xt}$:
H1 : si $t \geqslant 0$, $x \mapsto g(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
H2 : si $x \geqslant 0$, $t \mapsto g(x,t)$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $\mathbb{R}^+$.
H3 : si $x \geqslant 0$, $|g(x,t)| \leqslant |f(t)|$ (indépendante de x) et f est par hypothèse intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
On en déduit bien $\boxed{\mathcal{L}(f) \text{ est continue sur } \mathbb{R}^+}$

4. Cette fois, pour $k \geqslant 1$, on a :
H1 : si $t \geqslant 0$, $x \mapsto g(x,t)$ est $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}^{+*}$
H2 : si $0 \leqslant p \leqslant k-1$ alors $t \mapsto \dfrac{\partial^p g}{\partial x^p}(x,t) = (-t)^p f(t)e^{-xt}$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $\mathbb{R}^+$ et $t^p f(t)e^{-xt} \underset{t\to+\infty}{=} o(|f(t)|)$ car $x>0$ donc $t \mapsto \dfrac{\partial^p g}{\partial x^p}(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
H3 : $t \mapsto \dfrac{\partial^k g}{\partial x^k}(x,t) = (-t)^k f(t)e^{-xt}$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $\mathbb{R}^+$.
H4 : si $[a,b] \subset \mathbb{R}^{+*}$ et $x \in [a,b]$ alors $\left|\dfrac{\partial^k g}{\partial x^k}(x,t)\right| = t^k|f(t)|e^{-xt} \leqslant t^k|f(t)|e^{-at} = \varphi(t)$ (indépendante de x) et $\varphi(t) \underset{t\to+\infty}{=} o(|f(t)|)$ (car $a>0$) est $\mathcal{CM}^0$ et intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
On en déduit $\boxed{\mathcal{L}(f) \text{ est } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}^{+*}}$ *(f bornée ne sert pas pour cette partie de la question)*

Comme f est bornée, on a, pour $x>0$, $\displaystyle|\mathcal{L}(f)(x)| \leqslant \int_0^{+\infty} \|f\|_\infty e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{\|f\|_\infty}{x}$ donc $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathcal{L}(f)(x) = 0}$

5. a) f vérifie les hypothèses des questions précédentes (continue, intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et bornée) donc $\mathcal{L}(f)$ est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\displaystyle\mathcal{L}(f)''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^2}e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \mathcal{L}(f)(x) - \int_0^{+\infty} e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$.

b) Si $\displaystyle\int_x^{+\infty} f_1(t)\,\mathrm{d}t$ converge pour tout $x>0$ alors $\displaystyle\alpha(x) = \alpha(1) - \int_1^x f_1(t)\,\mathrm{d}t$ donc, si f_1 est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, α sera $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et on aura $\alpha' = -f_1$. Si on pose $y(x) = \alpha(x)\cos(x) + \beta(x)\sin(x)$ alors on aura $y'(x) = -\alpha(x)\sin(x) + \beta(x)\cos(x)$, compte tenu de la première condition imposée ; puis $y''(x) + y(x) = -\alpha'(x)\sin(x) + \beta'(x)\cos(x)$.
Pour que la fonction y soit solution, <u>il suffit</u> que f_1 et f_2 soient $\mathcal{C}^1$ et vérifient $\begin{cases} f_1(x)\cos(x) + f_2(x)\sin(x) = 0 \\ f_1(x)\sin(x) - f_2(x)\cos(x) = \dfrac{1}{x} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x) = \dfrac{\sin(x)}{x} \\ f_2(x) = -\dfrac{\cos(x)}{x} \end{cases}$ Ces deux fonctions étant bien $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et comme $\displaystyle\int_x^{+\infty} f_1(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_x^{+\infty} f_2(t)\,\mathrm{d}t$ existent d'après **1**, y est bien une solution de l'équation différentielle.

c) Une solution est donc donnée par $\displaystyle y(x) = \cos(x)\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t - \sin(x)\int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t}\,\mathrm{d}t$. On pose alors $u = t - x$: $u \mapsto u + x$ est $\mathcal{C}^1$ bijective et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $\boxed{y : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u+x} \text{ est solution}}$

d) $\mathcal{L}(f) - y$ est solution de l'équation homogène, dont les solutions sont $\text{Vect}\{\sin, \cos\}$ donc il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\boxed{\mathcal{L}(f)(x) = a\cos(x) + b\sin(x) + \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\,\mathrm{d}t}$

6. On reprend la forme $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\,\mathrm{d}t = \cos(x)\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t - \sin(x)\int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ qui tend donc vers 0 en $+\infty$ car sin et cos sont bornées et $\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ tendent vers 0 en $+\infty$ (restes d'intégrales convergentes).

Si on pose $h(x) = \mathcal{L}(f)(x) - \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\,\mathrm{d}t$, cette fonction est donc 2π-périodique et tend vers 0 en $+\infty$; si $x \in \mathbb{R}^{+*}$ alors $h(x) = h(x + 2n\pi) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $h(x) = 0$ pour tout $x > 0$ donc $\boxed{\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\,\mathrm{d}t \text{ si } x > 0}$

7. On a $\left|\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\,\mathrm{d}t - \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant x\int_1^{+\infty} \frac{|sin(t)|}{t(x+t)}\,\mathrm{d}t \leqslant x\int_1^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t^2}\,\mathrm{d}t$ (ces intégrales existent bien car sin est bornée et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$). On a donc $\lim\limits_{x\to 0}\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

Il reste à justifier que $x \mapsto \int_0^1 \frac{\sin(t)}{x+t}\,\mathrm{d}t$ est continue en 0 : on pose $u(x, t) = \frac{\sin(t)}{x+t}$ et on a

H1 : si $t \in]0, 1]$, $x \mapsto u(x, t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

H2 : si $x \geqslant 0$, $t \mapsto u(x, t)$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $]0, 1]$.

H3 : si $x \geqslant 0$, $|u(x, t)| \leqslant \frac{|\sin(t)|}{t}$ (indépendant de x) et la fonction $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ est $\mathcal{CM}^0$ et intégrable sur $]0, 1]$

On en déduit $\lim\limits_{x\to 0}\int_0^1 \frac{\sin(t)}{x+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$, puis, par relation de Chasles $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t}$

8. On a donc $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \lim\limits_{x\to 0^+} \mathcal{L}(f)(0) = \mathcal{L}(f)(0)$ car d'après **3**, $\mathcal{L}(f)$ est continue en 0. On calcule $\mathcal{L}(f)(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \Big[\arctan(t)\Big]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$ et $\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}}$