

I Séries entières

1. Convergence d'une série entière

- a) Rayon de convergence : lemme d'Abel, définition du rayon de convergence ($\sup\{\rho > 0 \mid (a_n \rho^n) \text{ est bornée}\}$), absolue convergence à l'intérieur du disque ouvert de convergence, divergence « grossière » à l'extérieur du disque fermé. $R\left(\sum a_n z^n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ (si cette limite existe dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$) et $R\left(\sum n^\alpha z^n\right) = 1$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ sont utilisables directement
- b) Opérations sur les séries entières : si $a_n \sim b_n$ alors $R_a = R_b$ et si $a_n = O(b_n)$, $R_b \leq R_a$; somme et produit de Cauchy. Égalité des rayons de convergence de $\sum a_n z^n$, $\sum (n+1)a_{n+1}z^n$ et $\sum a_{n-1} \frac{z^n}{n}$.

2. Somme d'une série entière

- a) Continuité de la somme : convergence normale sur tout segment de $] - R, R[$ dans le cas réel, continuité de la somme sur $] - R, R[$. Continuité sur le disque ouvert de rayon R dans le cas complexe (*admis*).
- b) Dérivation et intégration des séries entières de variable réelle : intégration terme à terme de la somme d'une série entière sur tout segment inclus dans le disque ouvert de convergence, classe \mathcal{C}^∞ de la somme sur le disque ouvert de convergence.

3. Fonction développable en série entière

- a) Série de Taylor : définition d'une fonction DSE (au voisinage de 0), série de Taylor d'une fonction de classe \mathcal{C}^∞ sur $] - r, r[$. Une fonction est DSE sur $] - r, r[$ si et seulement si elle est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] - r, r[$ et pour tout $x \in] - r, r[$, le reste $R_n(x)$ de Taylor tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
- b) Fonctions usuelles : DSE en 0 de e^x , $\cos x$, $\sin x$, $\operatorname{ch} x$ et $\operatorname{sh} x$ (Taylor), $\frac{1}{1-x}$, $\ln(1+x)$, $\arctan x$ (intégration) et $(1+x)^\alpha$ (en utilisant une équation différentielle).

À suivre : l'étude des matrices orthogonales