PSI2 **DM13** pour lundi 29 janvier 2024

(Extrait de CCINP MP 2020 maths 2)

Dans ce problème, E est un espace vectoriel euclidien muni d'un produit scalaire que l'on notera $< \mid >$ de norme associée $\|.\|$.
Un endomorphisme u de E est une similitude de E lorsqu'il existe un réel $k>0$ tel que pour tout vecteur x de $E, \|u(x)\|=k\|x\|$. On dira que u est la similitude de rapport k .
On notera $\mathrm{Sim}(E)$, l'ensemble des similitudes de $E, \mathrm{O}(E)$ désigne l'ensemble des automorphismes orthogonaux de E .
L'objectif de ce problème est de définir et de caractériser les similitudes d'un espace euclidien.

Partie I - Exemples, propriétés

1. Démontrer que la matrice $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ est, dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, la matrice d'une similitude u dont on précisera le rapport.
2. Interprétation géométrique avec la similitude u de la question précédente :
Le plan $\mathbb{R}^2$ est rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$. On considère les trois points $M(2,1), N(4,1), P(4,2)$ et on définit les points M', N', P' par les relations $u(\overrightarrow{OM})=\overrightarrow{OM'}, u(\overrightarrow{ON})=\overrightarrow{ON'}, u(\overrightarrow{OP})=\overrightarrow{OP'}$
Représenter les triangles MNP et $M'N'P'$ et comparer leurs aires.
3. Démontrer que tout élément de $\mathrm{Sim}(E)$ est bijectif et établir que $\mathrm{Sim}(E)$, muni de la loi de composition, est un groupe.
4. Soient u un endomorphisme de $E, \mathcal{B}$ une base orthonormée de E et A la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$
Démontrer que u est un automorphisme orthogonal de E, si et seulement si, $A^T A=I_n$
Caractériser par une relation matricielle une similitude de rapport k.
5. Exemple :
Démontrer que la matrice $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ d'une similitude u dont on donnera le rapport.
Donner la matrice de la similitude u^{-1}.
Vérifier que, pour tout élément f de $\mathrm{O}(E), u^{-1} \circ f \circ u \in \mathrm{O}(E)$.
6. On appelle sphère de centre 0 et de rayon $r>0$, l'ensemble des vecteurs x de E tels que $\|x\|=r$.
Démontrer que si u est un endomorphisme de E tel que l'image par u de toute sphère de E de centre 0 est une sphère de E de centre 0, alors u est une similitude de E . On pourra remarquer que pour y vecteur non nul, $\left\|\frac{y}{\|y\|}\right\|=1$.

Partie II - Assertions équivalentes

1. On rappelle qu'une homothétie vectorielle de E est une application de la forme αid_E.
Démontrer que $u \in \mathrm{Sim}(E)$, si et seulement si, u est la composée d'une homothétie vectorielle non nulle de E et d'un élément de $O(E)$
2. Exemple :
Écrire la matrice $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ comme produit de la matrice d'une homothétie vectorielle et de la matrice d'un automorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^2$ dont on précisera la nature.
3. Démontrer que : $\forall(x, y) \in E^2,<x|y>=\frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\right)$
En déduire que u est une similitude de rapport k, si et seulement si $\forall(x, y) \in E^2,<u(x)|u(y)>=k^2<x \mid y>$.
4. Démontrer que, si u est une similitude de rapport k, alors, pour tout couple (x, y) de vecteurs de E, $<x|y>=0 \Rightarrow<u(x) \mid u(y)>=0$.
On dit que l'endomorphisme u conserve l'orthogonalité.
Réciproquement, on suppose que u est un endomorphisme de E conservant l'orthogonalité. Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E.
Démontrer que : $\forall(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad \langle e_i+e_j | e_i-e_j\rangle=0$, puis que : $\forall(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \|u(e_i)\|=\|u(e_j)\|$
On note k la valeur commune prise par tous les $\|u(e_i)\|$.
Après avoir justifié que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \|u(e_i)\|=k\|e_i\|$ démontrer que u est une similitude de rapport k.
5. Soit u une application de E dans E (non supposée linéaire) telle qu'il existe un réel $k>0$ pour lequel : $\forall(x, y) \in E^2,<u(x)|u(y)>=k^2<x \mid y>$.
Démontrer que u est un endomorphisme de E, puis que u est une similitude de E.