**PSI2**

# DS5

samedi 20 janvier 2024

(inspiré de Mines-Ponts PC 2002 maths 1)

---

**L'usage des calculatrices est interdit**

Soit $F$ la somme de la série entière réelle de terme général

$$u_n(x) = \frac{x^{2n}}{(n!)^2} \quad \text{pour } n \in \mathbb{N} \ ;$$

cette fonction $F$ est définie, lorsque la série converge, par la relation

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(n!)^2}$$

Ce problème est constitué de cinq parties largement indépendantes : la partie I est consacrée au calcul d'une intégrale dont la valeur sera utilisée dans la suite, la partie II étudie quelques propriétés de la fonction $F$, la partie III permet de déterminer un équivalent de $F$ en $+\infty$ et la partie IV s'intéresse à la transformée de Laplace de $F$ (qui sera définie au début de cette partie). La partie V aborde le résultat prouvé à la fin de la parie IV de façon théorique.

## Partie I : calcul d'une intégrale

Le but de cette partie est de déterminer la valeur de l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \, \mathrm{d}t$$

Pour cela, on va étudier la fonction $g$, définie, lorsque l'intégrale existe, par

$$g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x(1+t)}}{(1+t)\sqrt{t}} \, \mathrm{d}t$$

**1.** Justifier l'existence de cette intégrale $I$.

**2. Étude de $g$**

a) Justifier que la fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{1}{(1+t)\sqrt{t}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$

b) En déduire que la fonction $g$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

c) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

d) Montrer que $g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que

$$\forall x > 0, g'(x) = -I \times \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$$

*On pourra, après avoir prouvé que $g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, transformer la valeur de $g'(x)$ en utilisant, entre autres, un changement de variable.*

**3. Calcul de $I$**

a) Après avoir calculé la dérivée de la fonction $t \mapsto \arctan\left(\sqrt{t}\right)$, déterminer la valeur de $g(0)$.

b) Justifier l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} g'(t) \, \mathrm{d}t$ et déterminer sa valeur.

c) En déduire la valeur de $I$ :

$$I = \sqrt{\pi}$$

## Partie II : étude de $F$

**1.** Déterminer le rayon de convergence $R$ de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{2n}}{(n!)^2}$ et en déduire le domaine de définition de $F$.

**2. Encadrement de $F$ sur $\mathbb{R}^{+*}$**

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a l'encadrement suivant :

$$\frac{4^n}{(2n+1)!} \leqslant \frac{1}{(n!)^2} \leqslant \frac{4^n}{(2n)!}$$

b) Rappeler les développements en séries entières des fonctions ch et sh et en déduire

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \frac{\operatorname{sh}(2x)}{2x} \leqslant F(x) \leqslant \operatorname{ch}(2x)$$

c) Quelle est la limite de $F$ en $+\infty$ ?

**3.** Montrer que $F$ vérifie, pour tout $x$ de son ensemble de définition, l'équation différentielle :

$$xF''(x) + F'(x) - 4xF(x) = 0$$

## Partie III : équivalent de $F$ en $+\infty$

**1.** On définit la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \int_0^{\pi} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$$

a) Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, une relation entre $w_{n+2}$ et $w_n$.

b) En déduire les relations suivantes, valables pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$w_{2n} = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}\pi \quad \text{et} \quad w_{2n+1} = 0$$

**2. Une expression intégrale de $F$**

a) Pour $t \in [0, \pi]$ fixé, donner le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \exp(2x\cos(t))$

b) En déduire la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \exp(2x\cos(t))\,\mathrm{d}t$$

**3.** Déterminer la limite, quand $x$ tend vers $+\infty$ de la fonction $f_1$ définie, sur $\mathbb{R}$, par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_1(x) = \int_{\pi/2}^{\pi} \exp(2x\cos(t))\,\mathrm{d}t$$

**4.** Dans cette question, on cherche un équivalent, quand $x$ tend vers $+\infty$, de la fonction $f_2$, définie sur $\mathbb{R}$, par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_2(x) = \int_0^{\pi/2} \exp(2x\cos(t))\,\mathrm{d}t.$$

a) Transformer, pour $x > 0$, l'intégrale définissant $f_2(x)$ avec le changement de variable $u = 2x(1 - \cos t)$

b) Vérifier que si $x > 0$ et $u \in [0, 2x]$ alors $u - \frac{u^2}{4x} \geqslant \frac{u}{2}$ et en déduire un équivalent de $f_2(x)$ quand $x$ tend vers $+\infty$.

**5.** Conclure

$$F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{2x}}{2\sqrt{\pi x}}$$

## Partie IV : transformées de Laplace

Si $f$ est une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}^{+*}$, intégrable sur $]0,1]$, on définit sa transformée de Laplace $L_f$, lorsque l'intégrale converge par

$$L_f(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

Dans cette partie, on va déterminer les transformées de Laplace des fonctions $F$ et $G : x \mapsto \dfrac{e^{2x}}{2\sqrt{\pi x}}$ :

$$L_F(x) = \int_0^{+\infty} F(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad L_G(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} \frac{e^{t(2-x)}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

**1. Calcul de $L_G$**

a) Justifier que $L_G(x)$ existe si et seulement si $x > 2$.

b) En utilisant le changement de variable $u = (x-2)t$ et la valeur de $I$ trouvée dans la partie **I**, déterminer la valeur, pour $x > 2$ de $L_G(x)$.

**2. Calcul de $L_F(x)$**

On rappelle que $F$ est définie par $F(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(n!)^2}$

a) Déterminer le domaine de définition de $L_F$.
*On pourra utiliser le résultat final de la partie* **III**.

b) Pour $x > 2$ et $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-xt}\,\mathrm{d}t$ et montrer que

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{n!}{x^{n+1}}$$

c) Déterminer l'expression, pour $x > 2$, de $L_F(x)$ sous la forme de la somme d'une série.

d) Rappeler le développement en série entière de la fonction $u \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-u}}$ et exprimer les coefficients de ce développement à l'aide de puissances et de factorielles.

e) En déduire une expression « simple » de $L_F(x)$, pour $x > 2$.

**3.** A-t-on $L_F(x)$ et $L_G(x)$ équivalentes quand $x$ tend vers 2 ?

## Partie V : transformées de Laplace de fonctions équivalentes

Dans cette partie, on considère deux fonctions $h_1$ et $h_2$ positives, continues par morceaux sur $\mathbb{R}^{+*}$ et intégrables sur $]0,1]$. On supposera de plus que $h_1$ et $h_2$ sont équivalents en $+\infty$ et tendent vers $+\infty$ en $+\infty$ :

$$h_1(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} h_2(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} h_1(x) = \lim_{x\to+\infty} h_2(x) = +\infty$$

Pour simplifier, on notera $L_1$ et $L_2$ les transformées de Laplace de $h_1$ et $h_2$ :

$$L_1(x) = \int_0^{+\infty} h_1(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad L_2(x) = \int_0^{+\infty} h_2(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

lorsque ces intégrales convergent.

**1. Domaines de définitions**

a) Montrer que les deux fonctions $L_1$ et $L_2$ possèdent le même domaine de définition, que l'on notera $D$ par la suite.

b) On suppose $D$ non vide. Montrer que $D$ est une demie-droite de la forme $]\alpha, +\infty[$ (avec $\alpha = -\infty$ éventuellement dans ce cas) ou $[\alpha, +\infty[$ (et $\alpha \in \mathbb{R}$ dans ce cas).

*Dans toute la fin de cette partie, on supposera que $D$ est non vide et que $D$ est de la forme*

$$D = ]\alpha, +\infty[$$

*On a donc $\alpha \notin D$ et éventuellement $\alpha = -\infty$.*

**2. Limites en $\alpha$**

a) Justifier que $L_1$ est décroissante et positive sur $D$.

b) On suppose que $L_1$ est majorée sur $D$ : il existe $M > 0$ tel que

$$\forall x \in D, L_1(x) \leqslant M$$

Soit $A > 0$ ; montrer que :

i. $\forall x > \alpha, \displaystyle\int_0^A h_1(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t \leqslant M$

ii. $\displaystyle\int_0^A h_1(t)e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t \leqslant M$

c) En déduire une contradiction et déterminer la limite quand $x$ tend vers $\alpha$ de $L_1(x)$.

**3. Comparaison de $L_1$ et $L_2$**

Soit $\varepsilon$ un réel strictement positif fixé : $\varepsilon > 0$. Comme $h_1$ et $h_2$ sont équivalentes en $+\infty$, il existe $B > 0$ tel que pour $t > B$, on ait

$$|h_1(t) - h_2(t)| \leqslant \varepsilon h_1(t)$$

a) Montrer que, pour $x > \alpha$, on a

$$|L_1(x) - L_2(x)| \leqslant \int_0^B |h_1(t) - h_2(t)|e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t + \varepsilon L_1(x)$$

b) En déduire que $L_1(x)$ et $L_2(x)$ sont équivalent quand $x$ tend vers $\alpha$