# Correction du DS5

(inspiré de Mines-Ponts PC 2002 maths 1)

---

**Partie I :**

**1.** La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, $\dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ et $\dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donc $\boxed{t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}^{+*}}$

**2.** a) $\varphi$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, $\varphi(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ et $\varphi(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{3/2}}$ donc $\boxed{\varphi \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}^{+*}}$

b) On applique le théorème de continuité avec $f : (x,t) \mapsto \dfrac{e^{-x(1+t)}}{(1+t)\sqrt{t}}$ :

H1 : pour $t > 0$, $x \mapsto f(x,t)$ est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}^+$.
H2 : pour $x \geqslant 0$, $t \mapsto f(x,t)$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
H3 : pour $t > 0$ et $x \geqslant 0$, $|f(x,t)| = f(x,t) \leqslant \varphi(t)$ et $\varphi$ est $\mathcal{CM}^0$ et intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ d'après la question précédente.

On en déduit $\boxed{g \text{ est } \mathcal{C}^0 \text{ sur } \mathbb{R}^+}$

c) $g(x) = e^{-x}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{(1+t)\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ donc $0 \leqslant g(x) \leqslant e^{-x}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{(1+t)\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \leqslant e^{-x}\int_0^{+\infty}\varphi(t)\,\mathrm{d}t$ (l'intégrabilité de toutes les fonctions qui interviennent est assurée par celle de $\varphi$). Par encadrement, on en déduit $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0}$

*On peut bien sûr aussi prouver ce résultat avec le TCDPC, en utilisant la même domination que pour le théorème de continuité.*

d) On applique cette fois le théorème de dérivation :

H1 : pour $t > 0$, $x \mapsto f(x,t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
H2 : pour $x > 0$, $t \mapsto f(x,t)$ est $\mathcal{CM}^0$ et intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.
H3 : pour $x > 0$, $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\dfrac{e^{-x(1+t)}}{\sqrt{t}}$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
H4 : si $[a,b] \subset \mathbb{R}^{+*}$, $x \in [a,b]$ et $t > 0$ alors $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \dfrac{e^{-x(1+t)}}{\sqrt{t}} \leqslant \dfrac{e^{-a(1+t)}}{\sqrt{t}} = \psi(t)$ (indépendante de $x$) ; de plus $\psi$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ car $\psi(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ et $\psi(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ (car $a > 0$)

On en déduit $\boxed{g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{+*}) \text{ et, pour } x > 0,\ g'(x) = -\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x(1+t)}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t}$

On a alors $g'(x) = -e^{-x}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-(xt)}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ ; on pose alors $u = xt$ : comme $x > 0$, la fonction $u \mapsto \dfrac{u}{x}$ est $\mathcal{C}^1$ bijective et strictement croissante de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $g'(x) = -e^{-x}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u/x}}\frac{\mathrm{d}u}{x}$ donc $\boxed{g'(x) = -I \times \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x}}}$

**3.** a) $\theta : t \mapsto \arctan(\sqrt{t})$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\theta'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t}} \times \dfrac{1}{1+(\sqrt{t})^2} = \dfrac{1}{2(1+t)\sqrt{t}}$.

On en déduit $g(0) = \Big[2\arctan(\sqrt{t})\Big]_0^{+\infty}$ donc $\boxed{g(0) = \pi}$

b) Comme $g$ est une primitive de $g'$ et que $g$ admet des limites finies en 0 et $+\infty$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} g'(t)\,\mathrm{d}t$ existe et on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} g'(t)\,\mathrm{d}t = \Big[g(t)\Big]_0^{+\infty} = -g(0)$ donc $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} g'(t)\,\mathrm{d}t = -\pi}$

c) Avec l'expression de $g'$ obtenue en **I.2.d**, on a aussi $\displaystyle\int_0^{+\infty} g'(t)\,\mathrm{d}t = -I\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = -I^2$. On en déduit $I^2 = \pi$ et comme $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$ est positive sur $\mathbb{R}^{+*}$, on a $I \geqslant 0$ puis $\boxed{I = \sqrt{\pi}}$

**Partie II :**

**1.** La suite $\left(\dfrac{\rho^{2n}}{(n!)^2}\right)$ est bornée (et tend vers 0) pour tout $\rho \geqslant 0$ donc $\boxed{R = +\infty \text{ et } \mathcal{D}_F = \mathbb{R}}$

**2.** a) On raisonne par récurrence :

- $\dfrac{4^0}{1!} = 1$, $\dfrac{1}{(0!)^2} = 1$ et $\dfrac{4^0}{0!} = 1$ donc le résultat est vrai pour $n = 0$.

- s'il est vrai pour un $n \geqslant 0$, alors $\dfrac{4^{n+1}}{(2n+3)!} \overset{\text{HR}}{\leqslant} \dfrac{1}{(n!)^2} \times \dfrac{4}{(2n+2)(2n+3)} \leqslant \dfrac{1}{(n!)^2} \times \dfrac{4}{(2(n+1))^2} = \dfrac{1}{(n+1)!^2}$

  et, de l'autre côté, $\dfrac{4^{n+1}}{(2n+2)!} \overset{\text{HR}}{\geqslant} \dfrac{1}{(n!)^2} \times \dfrac{4}{(2n+1)(2n+2)} \geqslant \dfrac{1}{(n!)^2} \times \dfrac{4}{(2(n+1))^2} = \dfrac{1}{(n+1)!^2}$

b) Pour $x > 0$, on a $\dfrac{1}{2x} \times \dfrac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!} \leqslant u_n(x) \leqslant \dfrac{(2x)^{2n}}{(2n)!}$. En sommant ces inégalité et avec les DSE de ch et ch, on en déduit $\boxed{\dfrac{\mathrm{sh}(2x)}{2x} \leqslant F(x) \leqslant \mathrm{ch}(2x)}$

c) Comme $\dfrac{\mathrm{sh}(2x)}{2x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^{2x}}{4x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, on a, par minoration $\boxed{\lim_{+\infty} F = +\infty}$

**3.** $R = +\infty$ donc $F$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $F'(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 2na_n x^{2n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} 2na_n x^{2n-1} \overset{k=n-1}{=} 2\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)a_{k+1}x^{2k+1}$ puis $F''(x) = 2\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)(2k+1)a_k x^{2k}$. Comme, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(k+1)^2 a_{k+1} = a_k$ et $2k+1 = 2(k+1)-1$, on a $F''(x) = 2\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}[2(k+1)^2 - (k+1)]a_k x^{2k} = 4F(x) - 2\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)a_k x^{2k}$ donc $\boxed{xF''(x) = 4xF(x) - F'(x) \text{ si } x \in \mathbb{R}}$

**Partie III :**

**1.** a) Les fonctions $u : t \mapsto \cos^{n+1} t$ et $v : t \mapsto \sin t$ sont $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0,\pi]$ et $w_{n+2} = \displaystyle\int_0^\pi u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$ donc $w_{n+2} \overset{\text{IPP}}{=} \Big[u(t)v(t)\Big]_0^\pi + (n+1)\displaystyle\int_0^\pi \underbrace{\sin^2 t}_{=1-\cos^2 t} \cos^n t\,\mathrm{d}t = (n+1)(w_n - w_{n+2})$ donc $\boxed{w_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} w_n}$

b) On raisonne par récurrence :
- $w_0 = \pi = \dfrac{0!}{4^0(0!)^2}\pi$ et $w_1 = \Big[\sin t\Big]_0 \pi = 0$
- si $x_{2n+1} = 0$ alors $w_{2n+3} = \dfrac{2n+2}{2n+3} w_{2n+1} = 0$ et si $w_{2n} = \dfrac{\pi(2n)!}{4^n(n!)^2}$ alors $w_{2n+2} \overset{\text{HR}}{=} \dfrac{2n+1}{2n+2} \times \dfrac{\pi(2n)!}{4^n(n!)^2}$ donc $w_{2n+2} = \dfrac{(2n+1)(2n+2)}{(2(n+1)^2} \times \dfrac{\pi(2n)!}{4^n(n!)^2} = \dfrac{\pi(2n+2)!}{4^{n+1}(n+1)!^2}$

**2.** a) pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $t \in [0,\pi]$, $\boxed{\exp(2x\cos t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{2^n \cos^n t}{n!} x^n}$

b) *On pourrait utiliser le TITT mais comme l'intégration se fait sur le segment* $[0,\pi]$*, le théorème d'interversion par CVN est plus rapide à rédiger.* On pose, pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, $v_n(t) = \dfrac{2^n \cos^n t}{n!} x^n$

H1 : les fonction $v_n$ sont continues sur $[0,\pi]$.

H2 : $|v_n(t)| \leqslant \dfrac{2^n|x|^n}{n!}$ (indépendant de $t$) donc $\|v_n\|_\infty \leqslant \dfrac{2^n|x|^n}{n!}$ et $\sum \alpha_n$ converge (série entière de $\exp(2|x|)$) et $\sum v_n$ CVN sur le segment $[0,\pi]$

On a donc $\displaystyle\int_0^\pi \exp(2x\cos t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^\pi v_n(t)\,\mathrm{d}t$. De plus, $\displaystyle\int_0^\pi v_n(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{2^n x^n}{n!} w_n$ donc $\displaystyle\int_0^\pi v_{2n+1}(t)\,\mathrm{d}t = 0$ et $\displaystyle\int_0^\pi v_{2n}(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{4^n x^{2n}}{(2n)!} \times \dfrac{\pi(2n)!}{4^n(n!)^2}$. Après avoir retiré les termes impairs nuls, il reste $\boxed{\displaystyle\int_0^\pi \exp(2x\cos t)\,\mathrm{d}t = \pi F(x)}$

**3.** On pose $k(x,t) = \exp(2x\cos t)$ ; on applique le TCDPC :

H1 : si $t \in \left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$, comme $\cos t < 0$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} k(x,t) = 0$.

H2 : $t \mapsto k(x,t)$ et la fonction nulle sont $\mathcal{C}^0$ sur $\left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$.

H3 : $|k(x,t)| = \exp(2x\cos t) \leqslant 1$ pour $x \in [0,+\infty[$. La fonction constante 1 est $\mathcal{C}^0$ et intégrable sur $\left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$

On en déduit $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = 0}$

**4.** a) On pose $t = \arccos\left(1 - \dfrac{u}{2x}\right)$ : $u \mapsto \arccos\left(1 - \dfrac{u}{2x}\right)$ est $\mathcal{C}^1$ bijective et strictement croissante de $]0,2x]$ sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ puis $\mathrm{d}t = \dfrac{-1}{2x} \times \dfrac{-1}{\sqrt{1-\left(1-\frac{u}{2x}\right)^2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{u - \frac{u^2}{4x}}}$ et $\boxed{f_2(x) = \displaystyle\int_0^{2x} \dfrac{e^{2x-u}}{2\sqrt{x}\sqrt{u-\frac{u^2}{4x}}} = \dfrac{e^{2x}}{2\sqrt{x}}\int_0^{2x} \dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u-\frac{u^2}{4x}}}\,\mathrm{d}u}$

b) $u-\dfrac{u^2}{4x}-\dfrac{u}{2}=\dfrac{u}{2}\left(1-\dfrac{u}{2x}\right)\geqslant 0$ si $u\in[0,2x]$.

On détermine la limite quand $x$ tend vers $+\infty$ de $J(x)=2\sqrt{x}e^{-2x}f_2(x)=\displaystyle\int_0^{2x}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u-\frac{u^2}{4x}}}\,\mathrm{d}u$. Pour cela, on commence par « rendre le domaine d'intégration indépendant de $x$ » : on pose $\theta(x,u)=\begin{cases}\dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u-\frac{u^2}{4x}}} & \text{si } u\in]0,2x]\\ 0 & \text{si } u>x\end{cases}$

de sorte que $J(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\theta(x,u)\,\mathrm{d}u$ et on utilise le TCDPC :

H1 : pour $u>0$ fixé et $x$ assez grand, on a $\theta(x,u)=\dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u-\frac{u^2}{4x}}}\xrightarrow[x\to+\infty]{}\dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}}=\ell(u)$

H2 : $u\mapsto\theta(x,u)$ et $\ell$ sont $\mathcal{CM}^0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$

H3 : si $u\in]0,2x]$ alors $|\theta(x,u)|=\dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u-\frac{u^2}{4x}}}\leqslant\dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u/2}}=\sqrt{2}\ell(u)$ et si $u>2x$ alors $|\theta(x,u)|=0\leqslant\sqrt{2}\ell(u)$ ; on a donc, pour tout $u\in\mathbb{R}^{+*}$, $|\theta(x,u)|\leqslant\sqrt{2}\ell(u)$ (indépendant de $x$). On a déjà montré dans la partie **I** que $\ell$ est $\mathcal{CM}^0$ et intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

On en déduit $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}J(x)=\int_0^{+\infty}\ell(u)\,\mathrm{d}u=\sqrt{\pi}$ donc $\boxed{f_2(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\dfrac{\sqrt{\pi}e^{2x}}{2\sqrt{x}}}$

**5.** $F(x)=\dfrac{1}{\pi}(f_1(x)+f_2(x))$ donc $2\sqrt{\pi x}e^{-2x}F(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\left(2\sqrt{x}e^{-2x}f_1(x)+2\sqrt{x}e^{-2x}f_2(x)\right)\xrightarrow[x\to+\infty]{}\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\sqrt{\pi}+0\right)$ donc $\boxed{F(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\dfrac{e^{2x}}{2\sqrt{\pi x}}}$

**Partie IV :**

**1.** a) $t\mapsto\dfrac{e^{t(2-x)}}{\sqrt{t}}$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et intégrable sur $]0,1]$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ car $\dfrac{e^{t(2-x)}}{\sqrt{t}}\underset{t\to0}{\sim}\dfrac{1}{\sqrt{t}}$. Si $x>2$ alors $\dfrac{e^{t(2-x)}}{\sqrt{t}}\underset{t\to+\infty}{=}o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ alors que si $x\leqslant 2$, $\dfrac{e^{t(2-x)}}{\sqrt{t}}\geqslant\dfrac{1}{\sqrt{t}}$ donc $t\mapsto\dfrac{e^{t(2-x)}}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ si et seulement si $x>2$. Comme $\dfrac{e^{t(2-x)}}{\sqrt{t}}\geqslant 0$, on a $\boxed{\mathcal{D}_{L_G}=]2,+\infty[}$

b) Si $x>2$, la fonction $u\mapsto\dfrac{u}{x-2}$ est $\mathcal{C}^1$ bijective et strictement croissante de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc $L_G(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u/(x-2)}}\frac{\mathrm{d}u}{x-2}=\frac{1}{2\sqrt{\pi(x-2)}}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u=\frac{I}{2\sqrt{\pi(x-2)}}$ donc $\boxed{L_G(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x-2}}\text{ pour } x>2}$

**2.** a) $t\mapsto F(t)e^{-xt}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et comme $F\underset{+\infty}{\sim}G$, $t\mapsto F(t)e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ si et seulement si $t\mapsto G(t)e^{-xt}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ donc si et seulement si $x>2$. Comme $F\geqslant 0$ sur $\mathbb{R}^+$, on a $\boxed{\mathcal{D}_{L_G}=]2,+\infty[}$

b) $t\mapsto t^ne^{-xt}$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $\mathbb{R}^+$ et $t^ne^{-xt}\underset{t\to+\infty}{=}o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ car $x>0$ donc $t\mapsto t^ne^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Les fonctions $u:t\mapsto t^n$ et $v:t\mapsto\dfrac{-1}{x}e^{-xt}$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}u(t)v(t)=0$ donc, pour $n\geqslant 1$, $\displaystyle\int_0^{+\infty}t^ne^{-xt}\,\mathrm{d}t\overset{\text{IPP}}{=}\left[\frac{-1}{x}t^ne^{-xt}\right]_{t=0}^{t=+\infty}+\frac{n}{x}\int_0^{+\infty}t^{n-1}e^{-xt}\,\mathrm{d}t=\frac{n}{x}\int_0^{+\infty}t^{n-1}e^{-xt}\,\mathrm{d}t$. Par récurrence sur $n$, on en déduit $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty}t^ne^{-xt}\,\mathrm{d}t=\frac{n!}{x^{n+1}}\text{ si } x>0}$

c) Si $x>2$ et $t\geqslant 0$ alors $F(t)e^{-xt}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(n!)^2}e^{-xt}$ ; on applique le TITT avec $f_n(t)=\dfrac{x^{2n}}{(n!)^2}e^{-xt}$ (et $x>2$ fixé) :

H1 : $\sum f_n$ CVS sur $\mathbb{R}^+$ vers $t\mapsto F(t)e^{-xt}$.

H2 : les $f_n$ et $t\mapsto F(t)e^{-xt}$ sont $\mathcal{CM}^0$ sur $\mathbb{R}^+$.

H3 : les $f_n$ sont intégrables sur $\mathbb{R}^+$ d'après la question précédente.

H4 : $\displaystyle\int_0^{+\infty}|f_n(t)|\,\mathrm{d}t=\frac{1}{(n!)^2}\int_0^{+\infty}t^{2n}e^{-xt}\,\mathrm{d}t=\frac{(2n)!}{(n!)^2x^{2n+1}}=\alpha_n$ et $\dfrac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}=\dfrac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2x^2}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\dfrac{4}{x^2}<1$ (car $x>2$) donc $\displaystyle\sum\int_0^{+\infty}|f_n(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.

On en déduit $\boxed{L_F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(n!)^2} e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 x^{2n+1}} \text{ si } x > 2}$

d) Si $|u| < 1$ alors $(1-u)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (-u)^n$ avec $\alpha_n = \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2} - k\right) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \prod_{k=0}^{n-1} (2k+1) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{(2n)!}{2^n n!}$

donc $\boxed{\frac{1}{\sqrt{1-u}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \text{ si } |u| < 1}$

e) Si $x > 2$ alors $\left|\frac{1}{2x}\right| < 1$ et $L_F(x) = \frac{1}{x} \times \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}}$ donc $\boxed{L_F(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-4}} \text{ si } x > 2}$

**3.** $\frac{L_F(x)}{L_G(x)} = \frac{2\sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2-4}} = \frac{2}{\sqrt{x+2}} \xrightarrow[x \to 2]{} 1$ donc $\boxed{L_F(x) \underset{x\to 2}{\sim} L_G(x)}$

**Partie V :**

**1.** a) $t \mapsto h_i(t)e^{-xt}$ sont $\mathcal{CM}^0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, $h_i(t)e^{-xt} \underset{t\to 0}{\sim} h_i(t)$ donc $t \mapsto h_i(t)e^{-xt}$ est toujours intégrable sur $]0,1]$. Enfin $h_1(t)e^{-xt} \underset{t\to+\infty}{\sim} h_2(t)e^{-xt}$ donc $t \mapsto h_1(t)e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ si et seulement si $t \mapsto h_2(t)e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$. Comme $h_1$ et $h_2$ sont positives, l'existence de $L_1(x)$ et $L_2(x)$ est équivalente à l'intégrabilité des fonctions précédentes et $\boxed{L_1 \text{ et } L_2 \text{ ont le même ensemble de définition}}$

b) Si $x_0 \in \mathcal{D}$ et $x > x_0$ alors $0 \leqslant h_i(t)e^{-xt} \leqslant h_i(t)e^{-x_0 t}$ donc, par théorème de comparaison, $t \mapsto h_i(t)e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $x \in \mathcal{D}$. On a donc $[x_0, +\infty[ \subset \mathcal{D}$, pour tout $x_0 \in \mathcal{D}$ donc $\boxed{\mathcal{D} \text{ est une demie-droite}}$

**2.** a) Si $x < y$ sont dans $\mathcal{D}$ alors $0 \leqslant h_1(t)e^{-yt} \leqslant h_1(t)e^{-xt}$ donc $0 \leqslant L_1(y) \leqslant L_1(x)$, ie $\boxed{L_1 \geqslant 0 \text{ est décroissante sur } \mathcal{D}}$

b) i. Il suffit de remarquer $h_1(t)e^{-xt} \geqslant 0$ donc $\int_0^A h_1(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} h_1(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t = L_1(x) \leqslant M$.

ii. On montre la continuité de $x \mapsto \int_0^A h_1(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t$ sur $[\alpha, +\infty[$ (pour $A$ fixé) :

H1 : si $t \in ]0, A]$, $x \mapsto h_1(t)e^{-xt}$ est continue sur $[\alpha, +\infty[$

H2 : si $x \geqslant \alpha$, $t \mapsto h_1(t)e^{-xt}$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $]0, A]$

H3 : $\left|h_1(t)e^{-xt}\right| = h_1(t)e^{-xt} \leqslant h_1(t)e^{-\alpha t} = \varphi(t)$ (indépendant de $x$) et $\varphi$ est $\mathcal{CM}^0$ et intégrable sur $]0, A]$ car $h_1(t)e^{-xt} \underset{t\to 0}{\sim} h_1(t)$.

On peut donc faire tendre $x$ vers $\alpha^+$ dans l'inégalité de **V.2.b.i** : $\int_0^A h_1(t)e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t \overset{\mathcal{C}^0}{=} \lim_{x\to\alpha^+} \int_0^A h_1(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t$

et on obtient $\boxed{\int_0^A h_1(t)e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t \leqslant M}$

c) On vient de prouver que $A \mapsto \int_0^A h_1(t)e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ est majorée (avec $A \in \mathbb{R}^{+*}$) ; comme $t \mapsto h_1(t)e^{-\alpha t}$ est positive, cela implique l'intégrabilité de $t \mapsto h_1(t)e^{-\alpha t}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ puis $\alpha \in \mathcal{D}$ ce qui est contraire à l'hypothèse faite. La fonction $L_1$ n'est donc pas majorée sur $\mathcal{D}$ ; comme $L_1$ est décroissante, on a $\boxed{\lim_{x\to\alpha^+} L_1(x) = +\infty}$

**3.** a) Toutes les intégrales qui suivent sont bien convergentes (mêmes justifications que précédemment) ; on a :

$$\begin{aligned} |L_1(x) - L_2(x)| &\leqslant \left|\int_0^B (h_1(t) - h_2(t))e^{-xt}\,\mathrm{d}t\right| + \left|\int_B^{+\infty} (h_1(t) - h_2(t))e^{-xt}\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \int_0^B |h_1(t) - h_2(t)|e^{-xt}\,\mathrm{d}t + \int_B^{+\infty} |h_1(t) - h_2(t)|e^{-xt}\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_0^B |h_1(t) - h_2(t)|e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t + \int_B^{+\infty} \varepsilon h_1(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^B |h_1(t) - h_2(t)|e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t + \varepsilon L_1(x) \end{aligned}$$

b) $B$ étant fixé, $\int_0^B |h_1(t) - h_2(t)|e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ est une constante et $\lim_{x\to\alpha} L_1(x) = +\infty$ donc il existe $r > 0$ tel que, pour $0 < x - \alpha < r$, on ait $\int_0^B |h_1(t) - h_2(t)|e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon L_1(x)$. Ainsi on a $|L_1(x) - L_2(x)| \leqslant 2\varepsilon L_1(x)$, pour $0 < x - \alpha < r$, ce qui prouve (définition de négligeable, $\varepsilon > 0$ étant quelconque) $L_1(x) - L_2(x) \underset{x\to\alpha^+}{=} o(L_1(x))$

donc $\boxed{L_1(x) \underset{x\to\alpha^+}{\sim} L_2(x)}$