Correction du DM13

(Extrait de CCINP MP 2020 maths 2)

Partie I

1. On a $u(x,y)=(x+2y,-2x+y)$ donc $\|u(x,y)\|^2=(x+2y)^2+(-2x+y)^2=5(x^2+y^2)=5\|(x,y)\|^2$; u est une $\boxed{\text{similitude de rapport } \sqrt{5}}$

2. On a $M'(4,-3)$, $N'(6,-7)$ et $P'(8,-6)$ donc $\mathcal{A}_{MNP}=\left|\det\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}\right)\right|=\text{abs}\begin{vmatrix}2&2\\0&1\end{vmatrix}=2$ et $\mathcal{A}_{M'N'P'}=\left|\det\left(\overrightarrow{M'N'},\overrightarrow{M'P'}\right)\right|=\text{abs}\begin{vmatrix}2&4\\-4&-3\end{vmatrix}=10$ donc $\boxed{\text{une similitude de rapport } k \text{ multiplie les aires de } k^2}$

3. Si $x\in\ker(u)$ alors $\|u(x)\|=0$ et $\|u(x)\|=k\|x\|$ donc, comme $k\neq 0$, on a $x=0$ et $\ker(u)=\{0\}$. Comme u est un endomorphisme en dimension finie, $\boxed{u \text{ est bijectif}}$

Si u et v sont deux similitudes de rapports k_1 et k_2 alors $\|u\circ v(x)\|=k_1\|v(x)\|=k_1k_2\|x\|$ donc $u\circ v$ est une similitude de rapport k_1k_2. De plus $\|u^{-1}(x)\|=\dfrac{1}{k_1}\|u(u^{-1}(x))\|=\dfrac{1}{k_1}\|x\|$ donc u^{-1} est une similitude de rapport $\dfrac{1}{k_1}$. Comme $\text{Sim}(E)$ est non vide (id_E est une similitude de rapport 1), $\boxed{\text{Sim}(E) \text{ est un sous groupe de } \mathcal{GL}(E)}$

4. La première partie (automorphisme orthogonal ou isométrie vectorielle) est une question de cours. Pour les similitudes : u est une similitude de rapport k si et seulement si $\dfrac{1}{k}u$ est une isométrie donc si et seulement si $\dfrac{1}{k}A^T\dfrac{1}{k}A=I_n$, ie si et seulement si $\boxed{A^TA=k^2I_n}$

5. On vérifie $A^TA=9I_3$ donc $\boxed{u \text{ est une similitude de rapport } 3}$ puis $\boxed{A^{-1}=\dfrac{1}{9}A^T}$

Si $f\in\mathcal{O}(E)$ alors $\|u^{-1}\circ f\circ u(x)\|=\dfrac{1}{3}\|f\circ u(x)\|=\dfrac{1}{3}\|u(x)\|=\dfrac{1}{3}\times 3\|x\|=\|x\|$ donc $\boxed{u^{-1}\circ f\circ u\in\mathcal{O}(E)}$

6. On suppose que l'image de la sphère unité $S(0,1)$ est $S(0,r)$, la sphère de centre 0 et de rayon r. Pour $x\neq 0$, on a $\dfrac{x}{\|x\|}\in S(0,1)$ donc $u\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right)\in S(0,r)$, ie $\left\|u\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right)\right\|=r$ puis $\|u(x)\|=r\|x\|$ pour tout $x\neq 0$. Cette dernière égalité restant valable pour $x=0$, on a, pour tout $x\in E$, $\|u(x)\|=r\|x\|$ donc $\boxed{u \text{ est une similitude de rapport } r}$

Partie II

1. On vérifie facilement que u est une similitude de rapport k si et seulement si $\dfrac{1}{k}u$ est une isométrie donc si et seulement si u est $\boxed{\text{la composée de } kid_E \text{ est d'une isométrie}}$

2. On a $A=\sqrt{5}I_2\times B$ avec $B=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1&2\\-2&1\end{pmatrix}\in\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$. Comme $\det(B)=+1$, B est la matrice, dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ (orthonormale), de la $\boxed{\text{rotation d'angle } \theta=-\arccos\dfrac{1}{\sqrt{5}}}$ car $\sin\theta=-\dfrac{2}{\sqrt{5}}<0$.

3. Cours : identité de polarisation

Si u est une similitude de rapport k alors $4(u(x)|u(y))=\|u(x)+u(y)\|^2-\|u(x)-u(y)\|^2=\|u(x+y)\|^2-\|u(x-y)\|^2=k^2\|x+y\|^2-k^2\|x-y\|^2=4k^2(x|y)$. La réciproque est évidente (prendre $x=y$) donc u est une similitude de rapport k si et seulement si $\boxed{\forall(x,y)\in E^2, (u(x)|u(y))=k^2(x|y)}$

4. Si $(x|y)=0$ alors $(u(x)|u(y))=k^2(x|y)=0$

$(e_i+e_j|e_i-e_j)=\|e_i\|^2-\|e_j\|^2=0$ donc on a $(u(e_i+e_j)|u(e_i-e_j))=0$; or $(u(e_i+e_j)|u(e_i-e_j))=(u(e_i)+u(e_j)|u(e_i)-u(e_j))=\|u(e_i)\|^2-\|u(e_j)\|^2$. On a donc $\boxed{\|u(e_i)\|=\|u(e_j)\|}$

Comme $\|e_i\|=1$, on a bien $\|u(e_i)\|=k=k\|e_i\|$. L'endomorphisme $\dfrac{1}{k}u$ transforme donc la base orthonormale $\mathcal{B}$ en une famille $\left(\dfrac{1}{k}u(e_1),\dots,\dfrac{1}{k}u(e_n)\right)$ de vecteurs unitaires ; par conservation de l'orthogonalité, cette famille est également orthogonale donc c'est une autre base orthonormale de E et $\dfrac{1}{k}u$ est une isométrie. Ainsi $\boxed{u \text{ est une similitude de rapport } k}$

5. Soit $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormale de E et $x\in E$, on a donc $x=\displaystyle\sum_{i=1}^n(e_i|x)e_i$. On note $f_i=\dfrac{1}{k}u(e_i)$; on vérifie alors $(f_i|f_j)=\dfrac{1}{k^2}(u(e_i)|u(e_j))=(e_i|e_j)=\delta_{i,j}$ donc $\mathcal{B}'=(f_1,\dots,f_n)$ est aussi une base orthonormale de

E. Comme $u(x) \in E$, on peut aussi écrire $u(x) = \sum_{i=1}^{n} (f_i|u(x))f_i$. On a ensuite $(f_i|u(x)) = \dfrac{1}{k}(u(e_i)|u(x)) = k(e_i|x)$ puis $u(x) = \sum_{i=1}^{n} k(e_i|x)f_i = \sum_{i=1}^{n} (e_i|x)u(e_i)$. On vient donc de justifier $\forall x \in E, x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \Rightarrow u(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i u(e_i)$ donc $\boxed{u \text{ est linéaire}}$ et u est une similitude de rapport k d'après **II.3**