PSI2 pour le lundi 5 févier 2024

DM14

(CCP PC 2001 Maths 2)

Notations

On identifiera $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ respectivement à $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ que l'on supposera munis de leurs produits scalaires canoniques notés respectivement $\langle\,|\,\rangle_n$ et $\langle\,|\,\rangle_p$. Les normes associées seront notées respectivement $\|\,\|_n$ et $\|\,\|_p$.
On notera $(E_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et $(F_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ celle de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
$\ker A$ est le noyau de A défini par : $\ker A = \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}), AX = 0\}$
$\operatorname{Im} A$ est l'image de A définie par : $\operatorname{Im} A = \{AX, X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$
Enfin, on adopte la notation $F^{\perp}$ pour désigner l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel F d'un espace euclidien.

Partie I

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que A^TA est nulle si et seulement si A est nulle.

Dans toute la suite du problème A sera supposée non nulle.

2. Montrer que les matrices A^TA et AA^T sont diagonalisables au moyen de matrices orthogonales.

3. a) X, Y désignant deux éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, exprimer $\langle X|Y\rangle_n$ sous la forme d'un produit matriciel.

b) Si W est un vecteur propre de A^TA associé à la valeur propre λ, exprimer $\|AW\|_n^2$ en fonction de λ et $\|W\|_p$.

c) En déduire que les valeurs propres de A^TA sont réelles, positives ou nulles.

4. a) Pour x réel, calculer les produits matriciels par bloc suivants :

$$\begin{pmatrix} xI_n & A \\ A^T & I_p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -I_n & 0_{n,p} \\ A^T & I_p \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} xI_n & A \\ A^T & I_p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -I_n & A \\ 0_{p,n} & -xI_p \end{pmatrix}$$

b) En déduire que A^TA et AA^T ont les mêmes valeurs propres non nulles avec le même ordre de multiplicité.

c) En déduire également que les matrices A^TA et AA^T ont même rang.

5. Montrer que si $n > p$, 0 est valeur propre de AA^T et que si $n < p$, 0 est valeur propre de A^TA.

6. On note $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres de A^TA, chaque valeur propre apparaissant dans cette liste un nombre de fois égal à son ordre de multiplicité et on pose $\mu_i = \sqrt{\lambda_i}$ pour tout i élément de $[\![1,p]\!]$.
Les réels μ_i sont appelés valeurs singulières de A.
On suppose les réels λ_i ordonnés tels que $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_p \geqslant 0$.

a) Montrer que λ_1 est non nul.

On définit alors un unique entier naturel r appartenant à $[\![1,p]\!]$ comme suit : si toutes les valeurs propres de A^TA sont non nulles, $r = p$, sinon r est tel que pour tout $i \leqslant r$, $\lambda_i > 0$ et pour tout $i > r$, $\lambda_i = 0$.
Soit $(V_1, V_2, \ldots, V_p)$ une base orthonormale de vecteurs propres de A^TA respectivement associés aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$; $V_1, V_2, \ldots, V_r$ désignent les vecteurs propres associés aux valeurs propres non nulles et lorsque r est strictement inférieur à p, $V_{r+1}, \ldots, V_p$ désignent les vecteurs propres associés à la valeur propre 0.

b) Montrer que $r \leqslant n$ et que la dimension de $\ker AA^T$ est égale à $n - r$.

Pour $i \in [\![1,r]\!]$, on pose $U_i = \dfrac{1}{\mu_i}AV_i$ et si $n > r$, on désigne par $(U_{r+1}, \ldots, U_n)$ une base orthonormale de $\ker AA^T$.

c) Montrer que pour tout $i \in [\![1,r]\!]$, $AV_i = \mu_i U_i$ et que si $r < p$, pour tout $i \in \{\,r+1, \ldots, p\,\}$, $AV_i = 0$.

d) Montrer que pour tout $i \in [\![1,r]\!]$, $A^TU_i = \mu_i V_i$.

e) Montrer que si $n > r$, pour tout $i \in \{\,r+1, \ldots, n\,\}$, $A^TU_i = 0$.

f) En déduire que le système de vecteurs $(U_1, U_2, \ldots, U_n)$ constitue une base orthonormale de vecteurs propres de AA^T et préciser la valeur propre associée à chaque vecteur U_i.

7. On note $V \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ la matrice dont le $i^{\text{ème}}$ vecteur colonne est le vecteur V_i, $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont le $j^{\text{ème}}$ vecteur colonne est le vecteur U_j et $(U^TAV)_{i,j}$ l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne, $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice U^TAV.

a) Montrer que : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, $(U^TAV)_{i,j} = \mu_j \delta_{i,j}$ où $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

b) On note Δ la matrice appartenant à $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont tous les éléments $\Delta_{i,j}$ sont nuls sauf $\Delta_{11}, \Delta_{22}, \ldots, \Delta_{rr}$ respectivement égaux à $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$. Montrer que $A = U\Delta V^T$.
La factorisation de A ainsi obtenue est dite décomposition de A en valeurs singulières.

c) Trouver une décomposition en valeurs singulières de chacune des matrices :

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

8. Montrer que le rang de A est égal à r.

9. a) Montrer que $V = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} V_i E_i^T$.

b) En déduire : $A = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \mu_i U_i V_i^T \quad , \quad A^T A = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i V_i V_i^T \quad , \quad AA^T = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i U_i U_i^T$

c) Déterminer les sous-espaces vectoriels suivants : $\ker A$, $\ker A^T$, $\operatorname{Im} A$, $\operatorname{Im} A^T$.

d) Montrer que $\ker A^T A = \ker A$ et $\ker AA^T = \ker A^T$.

Partie II

Avec les notations de la partie **I**, pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ admettant une décomposition en valeurs singulières $A = U\Delta V^T$, on appelle Δ^+ la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ dont tous les éléments $\Delta^+_{i,j}$ sont nuls sauf $\Delta^+_{11}, \Delta^+_{22}, \ldots, \Delta^+_{rr}$ respectivement égaux à $\dfrac{1}{\mu_1}, \dfrac{1}{\mu_2}, \ldots, \dfrac{1}{\mu_r}$ et on pose $A^+ = V(\Delta^+)U^T$.

Δ^+ (resp. A^+) est appelée pseudo-inverse de Δ (resp. de A). À priori, la matrice A^+ ainsi définie dépend de la décomposition en valeurs singulières choisie pour la matrice A, mais il sera montré à la question **II.9** *qu'il n'en est rien et que A^+ est uniquement déterminée à partir de A.*

1. Déterminer les matrices A_0^+, $A_0A_0^+$, $A_0^+A_0$, $A_0A_0^+A_0$ et $A_0^+A_0A_0^+$.

2. Déterminer $(A_0^+)^+$.

3. Évaluer $\Delta^+\Delta$ et $\Delta\Delta^+$.

4. Montrer que si A est une matrice carrée inversible ($n = p = r$), alors $A^+ = A^{-1}$.

5. Montrer que :

$$A^+ = \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{\mu_i} V_i U_i^T \quad , \quad AA^+ = \sum_{i=1}^{r} U_i U_i^T \quad , \quad A^+A = \sum_{i=1}^{r} V_i V_i^T$$

6. a) Évaluer AA^+U_j pour tout $j \in [\![1, n]\!]$ et en déduire que AA^+ est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ de la projection orthogonale de $\mathbb{R}^n$ sur $\operatorname{Im} A$.

b) Montrer de même que A^+A est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$ de la projection orthogonale de $\mathbb{R}^p$ sur $(\ker A)^\perp$.

7. Établir les identités suivantes :

$$AA^+ = (AA^+)^T \quad , \quad A^+A = (A^+A)^T \quad , \quad AA^+A = A \quad , \quad A^+AA^+ = A^+ \tag{1}$$

8. Établir les résultats suivants :

i) $\operatorname{Im} A = \operatorname{Im} AA^+ \quad , \quad \ker A^+ = \ker AA^+ \quad , \quad \operatorname{Im} A^+ = \operatorname{Im} A^+A \quad , \quad \ker A = \ker A^+A$.

ii) $\mathbb{R}^n = \operatorname{Im} A \oplus \ker A^+ \quad , \quad \mathbb{R}^p = \operatorname{Im} A^+ \oplus \ker A$.

9. Soit B une matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$AB = (AB)^T \quad , \quad BA = (BA)^T \quad , \quad ABA = A \quad , \quad BAB = B$$

a) Montrer que B vérifie les identités suivantes :

i) $B = BB^TA^T = A^TB^TB$

ii) $A = AA^TB^T = B^TA^TA$

iii) $A^T = A^TAB = BAA^T$

b) En déduire que $B = A^+$, autrement dit que A^+ est l'unique matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ vérifiant les relations (1).

10. Montrer que $(A^+)^+ = A$ et $(A^+)^T = (A^T)^+$.

11. Évaluer $(A_0B_0)^+$ et $B_0^+A_0^+$. A-t-on l'égalité ?

12. Soit $H \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\overline{H} = A^+H$. On note $d(H, \operatorname{Im} A)$ la distance de H au sous-espace vectoriel $\operatorname{Im} A$.

a) Montrer que pour tout $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, $AX - AA^+H$ et $H - AA^+H$ sont orthogonaux et en déduire :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}), \quad \left\|A\overline{H} - H\right\|_n \leqslant \|AX - H\|_n$$

Que vaut alors $d(H, \operatorname{Im} A)$?

b) Montrer que s'il existe $\tilde{H} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que $\left\|A\tilde{H} - H\right\|_n = \left\|A\overline{H} - H\right\|_n$ avec $\tilde{H} \neq \overline{H}$, alors $\left\|\overline{H}\right\|_p < \left\|\tilde{H}\right\|_p$.

c) Si $H = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, déterminer $\displaystyle\inf_{X \in \mathbb{R}^2} \|A_0X - H\|_3$.