I Endomorphismes d'un espace euclidien

1. Isométries vectorielles (*plutôt qu'endomorphisme orthogonal*)

a) Groupe orthogonal, conservation de la norme, du produit scalaire et image d'une base orthonormale ; F est stable par $u \in \mathcal{O}(E)$ si et seulement si $F^\perp$ est stable par u.

b) Matrices orthogonales, spéciales orthogonales, matrice de passage d'une base orthonormale à une autre base orthonormale.

2. Espaces euclidiens de dimension 2 et 3

a) Orientation de l'espace, produit mixte et produit vectoriel dans un espace de dimension 3 orienté.

b) Isométries du plan

c) Isométries d'un espace de dimension 3, rotations.

3. Réduction des endomorphismes autoadjoints

a) Endomorphismes autoadjoints et matrices symétriques réelles : caractérisation des endomorphismes autoadjoints par leur matrice dans une base orthonormée, stabilité de $F^\perp$ si F est stable, existence d'une base orthonormée de vecteurs propres, traduction matricielle (théorème spectral).

b) Endomorphismes autoadjoints positifs (resp. définis positifs) : définition par $(u(x)|x) \geqslant 0$ (resp. $(u(x)|x) > 0$ pour $x \neq 0$), caractérisation par le spectre. Traductions matricielles : matrices symétriques réelles positives et définies positives ; $u \in \mathcal{S}^+(E)$ (resp. $\mathcal{S}^{++}(E)$) si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) pour toute base orthonormale $\mathcal{B}$ de E.

À suivre : les variables aléatoires discrètes