I Endomorphismes d'un espace euclidien

1. Réduction des endomorphismes autoadjoints

a) Endomorphismes autoadjoints et matrices symétriques réelles : caractérisation des endomorphismes autoadjoints par leur matrice dans une base orthonormée, stabilité de $F^{\perp}$ si F est stable, existence d'une base orthonormée de vecteurs propres, traduction matricielle (théorème spectral).

b) Endomorphismes autoadjoints positifs (resp. définis positifs) : définition par $(u(x)|x) \geqslant 0$ (resp. $(u(x)|x) > 0$ pour $x \neq 0$), caractérisation par le spectre. Traductions matricielles : matrices symétriques réelles positives et définies positives ; $u \in \mathcal{S}^{+}(E)$ (resp. $\mathcal{S}^{++}(E)$) si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) pour toute base orthonormale $\mathcal{B}$ de E.

II Variables aléatoires discrètes

1. Définition d'une variable aléatoire discrète et utilisation des notations $(X = x)$,...Composition par une application, loi d'une variable aléatoire discrète .

2. Couple de variables aléatoires discrètes , loi conjointe et lois marginales, loi conditionnelle de X sachant $(Y = y)$, variables aléatoires discrètes indépendantes. Si X et Y sont indépendantes alors $f(X)$ et $g(Y)$ le sont aussi (généralisation à n variables aléatoires discrètes indépendantes), lemme des coalitions.

3. Lois usuelles : uniforme, Bernoulli, binomiale (nombre de succès dans une répétition d'expériences de Bernoulli indépendantes), géométrique (temps d'attente du premier succès dans une suite d'expériences de Bernoulli indépendantes) et de Poisson. Si $X_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p_n)$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} np_n = \lambda$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$.

4. Espérance (existence si $\sum x_n P(X = x_n)$ est sommable), théorème de comparaison (si $|X| \leqslant Y$ et $E(Y) < +\infty$ alors $E(X)$ est finie), espérance des lois usuelles, $E(X) = \sum\limits_{n\geqslant 1} P(X \geqslant n)$ si $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$, linéarité, positivité, croissance, théorème de transfert, espérance d'un produit de variables aléatoires discrètes indépendantes et inégalité de Markov.

5. Variance et écart type, cas des lois usuelles, l'existence de la variance entraine celle de l'espérance, $V(aX + b) = a^2V(X)$, inégalité de Bienaymé-Tchebichev et loi faible des grands nombres. Covariance, inégalité de Cauchy-Schwarz et variance d'une somme de variables aléatoires discrètes .

À suivre : les fonctions génératrices des variables aléatoires discrètes puis les evn