# Correction DM15

(extrait de E3A MP 2018 maths 1)

---

**Exercice 3**

**1.** a) Soit $X_1$ et $X_2$ prennent la même valeur et $U_1 = 1$, soit $X_1$ et $X_2$ prennent deux valeurs différentes et $U_2 = 2$.

b) $(U_2 = 1) = (X_1 = X_2) = \bigcup_{1 \leqslant k \leqslant \ell} (X_1 = k, X_2 = k)$ puis par incompatibilité 2 à 2 des événements, on a $P(U_2 = 1) = \sum_{k=1}^{\ell} P(X_1 = k, X_2 = k) \overset{\text{indep}}{=} \sum_{k=1}^{\ell} P(X_1 = k)P(X_2 = k) = \sum_{k=1}^{\ell} \frac{1}{\ell^2}$ et $\boxed{P(U_2 = 1) = \frac{1}{\ell}}$ puis $P(U_2 = 2) = 1 - P(U_2 = 1)$ et $\boxed{P(U_2 = 2) = 1 - \frac{1}{\ell}}$

On peut aussi le trouver directement : $(X_1 = k)_{1 \leqslant k \leqslant \ell}$ est un SCE donc

$$P(U_2 = 2) = P(X_1 \neq X_2) = \sum_{k=1}^{\ell} P(X_1 \neq X_2 | X_1 = k)P(X_1 = k) = \sum_{k=1}^{\ell} P(X_2 \neq k)P(X_1 = k) = \sum_{k=1}^{\ell} \frac{\ell - 1}{\ell} \times \frac{1}{\ell}$$

donc $P(U_2 = 2) = \frac{\ell - 1}{\ell}$.

c) $E(U_2) = 1P(U_2 = 1) + 2P(U_2 = 2)$ donc $\boxed{E(U_2) = 2 - \frac{1}{\ell}}$

**2.** a) On fait 10 tirages dans $[\![1, 25]\!]$ et on rajoute les résultats successifs dans une liste `L`, après avoir vérifié s'ils sont distincts des précédents, le nombre de tirages différents est alors la longueur de `L` :

```
def simulU :
    L = []
    for _ in range(10) :
        res = random.randint(1,25)
        if res not in L :
            L.append(res)
    return len(L)
```

b) On approxime l'espérance par la moyenne d'un grand nombre de tirages, grâce à la loi faible des grands nombres (à citer ici !) :

```
def espU :
    N = 1000 # nombre de simulations
    S = 0
    for _ in range(N) :
        S += simulU
    return S/N
```

**3.** Les $X_k$ prennent au plus $n$ valeurs différentes dans $[\![1, \ell]\!]$ donc $\boxed{U_n(\Omega) = [\![1, \min(n, \ell)]\!]}$

**4.** Loi uniforme donc $\boxed{P(X_i \in S) = \frac{|S|}{\ell}}$

**5.** Par indépendance des variables $X_1, \ldots, X_{n-1}$, on a $P(X_1 \neq a, \ldots, X_{n-1} \neq a) = \prod_{i=1}^{n-1} P(X_i \neq a) = \prod_{i=1}^{n-1} \frac{\ell - 1}{\ell}$ donc

$\boxed{P(X_1 \neq a, \ldots, X_{n-1} \neq a) = \left(1 - \frac{1}{\ell}\right)^{n-1}}$

**6.** $(X_n = a)_{1 \leqslant a \leqslant \ell}$ est un SCE donc, par probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(X_1 \neq X_n, \ldots, X_{n-1} \neq X_n) &= \sum_{a=1}^{\ell} P(X_1 \neq X_n, \ldots, X_{n-1} \neq X_n | X_n = a)P(X_n = a) \\ &= \sum_{a=1}^{\ell} P(X_1 \neq a, \ldots, X_{n-1} \neq a)P(X_n = a) \end{aligned}$$

donc $\boxed{P(X_1 \neq X_n, \ldots, X_{n-1} \neq X_n) = \left(1 - \frac{1}{\ell}\right)^{n-1}}$

**7.** Cette fois on utilise le SCE $(\{X_1, \dots, X_{n-1}\} = S)_{S\in\mathcal{P}_\ell}$ (SCE fini avec $2^\ell - 1$ éléments) et on obtient

$$P(X_1 \neq X_n, \dots, X_{n-1} \neq X_n) = \sum_{S\in\mathcal{P}_\ell} P(X_1 \neq X_n, \dots, X_{n-1} \neq X_n | \{X_1, \dots, X_{n-1}\} = S) P(\{X_1, \dots, X_{n-1}\} = S),$$

ce qui donne les résultat puisque si $(\{X_1, \dots, X_{n-1}\} = S)$ est réalisé, on aura $(X_1 \neq X_n, \dots, X_{n-1} \neq X_n)$ si et seulement si $X_n \notin S$ qui est de probabilité $1 - P(X_n \in S) = 1 - \dfrac{|S|}{\ell}$.

**8.** $E(U_{n-1}) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\ell} kP(U_{n-1} = k)$ (les termes en trop dans le cas où $\ell > n-1$ sont nuls) puis on a l'égalité d'événements $(U_{n-1} = k) = \displaystyle\bigcup_{S\in\mathcal{P}_\ell, |S|=k} (\{X_1, \dots, X_{n-1}\} = S)$ et par incompatibilité 2 à 2 des événements de cette réunion, on a $P(U_{n-1} = k) = \displaystyle\sum_{S\in\mathcal{P}_\ell, |S|=k} P(\{X_1, \dots, X_{n-1}\} = S)$. On en déduit

$$E(U_{n-1}) = \sum_{k=1}^{\ell} k \sum_{S\in\mathcal{P}_\ell, |S|=k} P(\{X_1, \dots, X_{n-1}\} = S) = \sum_{k=1}^{\ell} k \sum_{S\in\mathcal{P}_\ell} P(\{X_1, \dots, X_{n-1}\} = S)\delta_{k,|S|}$$

et en intervertissant les 2 sommes (finies)

$$= \sum_{S\in\mathcal{P}_\ell} \sum_{k=1}^{\ell} kP(\{X_1, \dots, X_{n-1}\} = S)\delta_{k,|S|} = \sum_{S\in\mathcal{P}_\ell} |S| P(\{X_1, \dots, X_{n-1}\} = S)$$

La question précédente donne alors

$$\begin{aligned} P(X_1 \neq X_n, \dots, X_{n-1} \neq X_n) &= \sum_{S\in\mathcal{P}_\ell} P(\{X_1, \dots, X_{n-1}\} = S) - \frac{1}{\ell} \sum_{S\in\mathcal{P}_\ell} |S| P(\{X_1, \dots, X_{n-1}\} = S) \\ &= 1 - \frac{1}{\ell} \sum_{S\in\mathcal{P}_\ell} |S| P(\{X_1, \dots, X_{n-1}\} = S) \end{aligned}$$

ce qui donne bien $\boxed{E(U_{n-1}) = \ell[1 - P(X_1 \neq X_n, \dots, X_{n-1} \neq X_n)]}$

**9.** Avec **6**, on en déduit $\boxed{E(U_n) = \ell\left[1 - \left(1 - \dfrac{1}{\ell}\right)^n\right]}$

**10.** Pour $\ell$ fixé, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{\ell}\right)^n = 0$ donc $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} E(U_n) = \ell}$

Le nombre de tirage étant très grand devant le nombre de valeurs possibles, la probabilité de tirer tous les entiers de $[\![1, \ell]\!]$ devient très grande.

**11.** Pour $n$ fixé, $\left(1 - \dfrac{1}{\ell}\right)^n \underset{\ell\to+\infty}{=} 1 - \dfrac{n}{\ell} + o\left(\dfrac{1}{\ell}\right)$ donc $\boxed{\displaystyle\lim_{\ell\to+\infty} E(U_n) = n}$

Cette fois le nombre de tirage est petit devant le nombre de valeurs possibles donc la probabilité d'obtenir $n$ tirages distincts est très grande.

**12.** a) On note $X_k$ le jour de naissance de l'individu $k$ et $\ell = 365$. On a donc $\boxed{E(D_n) = 365\left[1 - \left(\dfrac{364}{365}\right)^n\right]}$

b) $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} E(D_n) = 365}$