**L'usage des calculatrices est interdit**

*Le sujet comporte deux problèmes indépendants. Il est sans doute trop long pour 4 heures ; il est donc conseillé de consacrer deux heures à chaque problème.*
*Veuillez commencer chaque problème sur une nouvelle page (PSI2) ou nouvelle copie (PSI1).*

# Problème I : Fonctions matriciellement croissantes

(d'après CCP PC 2009 maths 1)

$n$ est un entier naturel supérieur ou égal à 1. On note $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices colonnes à $n$ lignes à coefficients réels, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre $n$, $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $I_n$ désigne la matrice identité d'ordre $n$, et pour toute matrice $A$, $A^T$ désigne la transposée de $A$.
Pour $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, on note $\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux valent $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.
Selon le contexte, 0 désigne soit le réel nul, soit la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, soit encore la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
$\mathbb{R}^n$, que l'on assimilera à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, est muni de son produit scalaire canonique noté $(\,|\,)$ et de la norme associée notée $\|\ \|$.
Une matrice $S$ de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est dite positive si :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X^T S X \geqslant 0$$

et définie positive si :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ X^T S X > 0$$

On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ positives et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ définies positives.
Soit $A$ une application d'un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui à $t$ associe la matrice $A(t)$ de coefficient d'indices $i, j$, $a_{i,j}(t)$. Si pour tout $(i,j)$ de $[\![1,n]\!]^2$, l'application $t \longmapsto a_{i,j}(t)$ est intégrable sur $I$, on dira que $t \mapsto A(t)$ est intégrable sur $I$ et on notera $\displaystyle\int_I A(t)\,\mathrm{d}t$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le coefficient d'indices $i,j$ est $\displaystyle\int_I a_{i,j}(t)\,\mathrm{d}t$.
L'objectif de ce problème est d'étudier la notion de fonction matriciellement croissante (qui sera définie dans la partie **II**).

**Dans tout le problème, $S$ désigne une matrice symétrique réelle d'ordre $n$.**

### Partie I

**1.** Montrer que si $S$ appartient à $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, alors pour toute matrice $M$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M^T S M$ appartient aussi à $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

**2.** Montrer que $S$ appartient à $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives.

**3.** Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ est symétrique positive. Est-elle symétrique définie positive ?

**4.** Soit $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que $S$ est inversible et déterminer le spectre de $S^{-1}$ en fonction du spectre de $S$.
En déduire $S^{-1} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

**5.** Montrer que si pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^T S X = 0$, alors toute valeur propre de $S$ est nulle et $S = 0$.

**6.** On munit $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ de la relation notée $\leq$, définie par :

$$\forall (S_1, S_2) \in (\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^2,\ (S_1 \leq S_2 \Leftrightarrow S_2 - S_1 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}))$$

*On fera attention aux notations différentes utilisées dans le sujet : $\leqslant$ pour la relation d'ordre usuelle sur $\mathbb{R}$ et $\leq$ pour la relation qui vient d'être introduite sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Vous pouvez cependant les noter de la même façon sur votre copie.*

a) Si $S_1$ et $S_2$ sont deux matrices de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $S_1 \leq S_2$ et $S_2 \leq S_1$, montrer que $S_1 = S_2$.

b) Si $(S_1, S_2) \in (\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^2$, montrer que l'on n'a pas nécessairement $S_1 \leq S_2$ ou $S_2 \leq S_1$.

c) Si $S_1$ et $S_2$ sont deux matrices de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $S_1 \leq S_2$ et $\alpha$ un réel, comparer les matrices $\alpha S_1$ et $\alpha S_2$ pour la relation $\leq$.

d) Si $S, S_1$ et $S_2$ sont trois matrices de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $S_1 \leq S_2$, comparer les matrices $S + S_1$ et $S + S_2$ pour la relation $\leq$.

**7.** Soit $(S_1, S_2) \in (\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^2$ avec $S_1 \leq S_2$. Montrer que pour toute matrice $M$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M^T S_1 M \leq M^T S_2 M$.

**8.** On suppose $I_n \leq S$.

a) Que peut-on dire des valeurs propres de $S$ ? En déduire que $S$ est inversible.

b) Que peut-on dire des valeurs propres de $S^{-1}$ ? En déduire : $S^{-1} \leq I_n$.

**9.** Montrer que $S$ est définie positive si et seulement si il existe $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = M^T M$.

**10.** Soit $(S_1, S_2) \in (\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}))^2$ tel que $S_1 \leq S_2$ et $M_1 \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $S_1 = {M_1}^T M_1$.
Montrer que $I_n \leq (M_1^{-1})^T S_2 M_1^{-1}$, en déduire que $S_2$ est inversible et $S_2^{-1} \leq S_1^{-1}$.

**Partie II**

Si $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ est une matrice diagonale et $f : I \longmapsto \mathbb{R}$ une application définie sur un intervalle $I$ tel que $\forall i \in [\![1, n]\!], \lambda_i \in I$, on note $f(D)$ la matrice diagonale définie par

$$f(D) = \mathrm{diag}(f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_n)).$$

Soient $S$ une matrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ une matrice diagonale, $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telles que $S = PDP^T$ et $f : I \longmapsto \mathbb{R}$ une application définie sur un intervalle $I$ tel que $\forall i \in [\![1, n]\!], \lambda_i \in I$. On définit la matrice $f(S)$ par

$$f(S) = Pf(D)P^T.$$

L'application $f$ sera dite matriciellement croissante sur $I$ si pour tout $n \geqslant 1$ et tout couple $(A, B)$ de matrices de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont dans $I$ :

$$A \leq B \Rightarrow f(A) \leq f(B)$$

**1.** a) Soient $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et $\Delta = \mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ deux matrices diagonales et $P = (p_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $PD = \Delta P$. Montrer que $Pf(D) = f(\Delta)P$

b) En déduire que la matrice $f(S)$ ne dépend pas du couple $(D, P) \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tel que $S = PDP^T$.

**2.** Calculer $\cos(\pi A)$ où $A$ est la matrice introduite en **I.3**.

**3.** a) Soit $g : ]0, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto -\dfrac{1}{x}$. À quelle condition sur la matrice $S$ peut-on définir $g(S)$ ? Montrer qu'alors $g(S) = -S^{-1}$ et en déduire que $g$ est matriciellement croissante sur $]0, +\infty[$.

b) Soit $h : ]-1, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \dfrac{x}{x+1}$. À quelle condition sur la matrice $S$ peut-on définir $h(S)$ ? Montrer qu'alors $h(S) = I_n - (S + I_n)^{-1}$ et en déduire que $h$ est matriciellement croissante sur $]-1, +\infty[$.

**4.** Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $A : I \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $t \longmapsto A(t) = (a_{i,j}(t))$ est intégrable sur $I$. Montrer que pour toute matrice colonne $X$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $t \longmapsto X^T A(t) X$ est intégrable sur $I$ et :

$$\int_I \left(X^T A(t) X\right) \mathrm{d}t = X^T \left(\int_I A(t)\,\mathrm{d}t\right) X$$

*On admettra que l'on prouve aussi que si $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $t \mapsto A(t)$ est intégrable sur $I$ alors $t \mapsto PA(t)P^T$ est intégrable sur $I$ et*

$$\int_I \left(PA(t)P^T\right) \mathrm{d}t = P \left(\int_I A(t)\,\mathrm{d}t\right) P^T.$$

**5.** Soit $\alpha \in ]0, 1[$ et $F$ la fonction donnée par $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{(1 + xt)t^\alpha}\,\mathrm{d}t$. On considère $S$ une matrice définie positive.

a) Montrer que pour tout $x > 0, F(x)$ existe.

b) Montrer, en utilisant par exemple le changement de variable $u = xt$, qu'il existe une constante $C$ strictement positive telle que pour tout $x > 0, F(x) = Cx^\alpha$.

c) Montrer que, pour tout $t > 0$, la matrice $S^{-1} + tI_n$ est inversible, que $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}(S^{-1} + tI_n)^{-1}$ est intégrable sur $I$ et que l'on a

$$F(S) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}(S^{-1} + tI_n)^{-1}\,\mathrm{d}t$$

d) Soit $A$ et $B$ deux matrices de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que $A \leq B$. Montrer que :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \forall t > 0,\ X^T(A^{-1} + tI_n)^{-1}X \leqslant X^T(B^{-1} + tI_n)^{-1}\,X$$

e) On pose $p_\alpha(x) = x^\alpha$ pour $x > 0$. Montrer que si $\alpha \in ]0, 1[$, $p_\alpha$ est matriciellement croissante sur $]0, +\infty[$.

**6.** Pour $\alpha > 1$, on prolonge $p_\alpha$ par continuité en 0 par $p_\alpha(0) = 0$. Montrer que $p_\alpha$ n'est pas matriciellement croissante sur $[0, +\infty[$ ; on pourra utiliser les matrices $A(x) = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,x & \mathrm{sh}\,x \\ \mathrm{sh}\,x & \mathrm{ch}\,x \end{pmatrix}$ et $B(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\mathrm{ch}\,x} \end{pmatrix}$ avec $x > 0$ petit.

**Fin du problème I**

## Problème II : Autour de la loi faible des grands nombres

(Extrait de Centrale PC 2017 maths 2)

Dans ce problème, toutes les variables aléatoires sont réelles, discrètes et définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
Pour toute variable aléatoire $X$ d'espérance finie, on note $E(X)$ l'espérance de $X$.
Soit $\alpha$ un réel strictement positif. On dit que la variable aléatoire réelle discrète $X$ admet un moment exponentiel d'ordre $\alpha$ si la variable aléatoire $e^{\alpha|X|}$ est d'espérance finie. *Cela signifie, par le théorème de transfert, que si $X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$, avec $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} e^{\alpha|x_n|}P(X = x_n)$ est absolument convergente.*

**Préliminaires**

Les trois questions de ces préliminaires sont indépendantes.
On rappelle que la fonction cosinus hyperbolique, que l'on note ch, est définie, pour tout réel $t$, par

$$\operatorname{ch}(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

**1.** a) Donner le développement en série entière de la fonction cosinus hyperbolique et celui de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto e^{t^2/2}$. On donnera le rayon de convergence de ces deux séries entières.

b) En déduire que $\forall t \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}(t) \leqslant e^{t^2/2}$.

**2.** Soit $a$ et $b$ deux réels vérifiant $a < b$. Montrer que $\forall \lambda \in [0, 1], e^{\lambda a+(1-\lambda)b} \leqslant \lambda e^a + (1 - \lambda)e^b$.

**3.** Soit $g$ définie sur $\mathbb{R}^+$ par $\forall t \in \mathbb{R}^+, g(t) = te^{-\gamma t}$ où $\gamma \in \mathbb{R}^{+*}$ ; montrer que $g$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

**Partie I : Variable aléatoire discrète admettant un moment exponentiel**

**1.** Soit $\alpha$ un réel strictement positif et $X$ une variable aléatoire discrète admettant un moment exponentiel d'ordre $\alpha$. Montrer que la variable aléatoire $e^{\alpha X}$ admet une espérance finie.

**2.** Pour chacune des variables aléatoires réelles suivantes, déterminer les réels $\alpha$ strictement positifs tels que la variable aléatoire admette un moment exponentiel d'ordre $\alpha$ et calculer $E(e^{\alpha X})$ dans ce cas.

a) $X$ une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda$, où $\lambda$ est un réel strictement positif.

b) $Y$ une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p$, où $p$ est un réel strictement compris entre 0 et 1.

c) $Z$ une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètre $n$ et $p$, où $n$ est un entier strictement positif et $p$ est un réel strictement compris entre 0 et 1.

**Partie II : Une majoration de $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right)$**

Dans la suite du problème, on considère $\varepsilon$ un réel strictement positif, $X$ une variable aléatoire réelle discrète à valeurs dans $\{x_p, p \in \mathbb{N}\}$, et $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi que $X$.
*On fera attention au fait que l'on n'a pas nécessairement $\lim\limits_{p\to+\infty} x_p = +\infty$ et que la suite $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ n'a pas forcément de limite.*

Pour tout entier $n$ strictement positif, on définit la variable aléatoire $S_n$ par $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.

Dans cette partie, on suppose que la variable aléatoire $X$ admet un moment exponentiel d'ordre $\alpha$ où $\alpha$ est un réel strictement positif.

**1.** Montrer que la variable $X$ admet une espérance finie. *On pourra utiliser la question* **3** *du préliminaire.*
On notera $m$ l'espérance de $X$.

**2.** Appliquer, avec les justifications utiles, la loi faible des grands nombres pour la suite de variables aléatoires $(X_k)$.

**3.** a) Montrer que la fonction $\Psi : t \mapsto E(e^{tX})$ est définie et continue sur le segment $[-\alpha, \alpha]$.

b) Montrer que la fonction $\Psi$ est dérivable sur l'intervalle $]-\alpha, \alpha[$ et montrer que sa fonction dérivée vérifie

$$\forall t \in ]-\alpha, \alpha[, \Psi'(t) = E\left(Xe^{tX}\right).$$

**4.** On considère l'application $f_\varepsilon$ définie par

$$f_\varepsilon : \begin{array}{ccc} [-\alpha, \alpha] & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ t & \longmapsto & e^{-(m+\varepsilon)t}\Psi(t) \end{array}$$

a) Donner les valeurs de $f_\varepsilon(0)$ et $f'_\varepsilon(0)$.

b) En déduire qu'il existe un réel $t_0$ appartenant à l'intervalle $]0, \alpha[$ vérifiant $0 < f_\varepsilon(t_0) < 1$.

**5.** Montrer que pour tout réel $t$ appartenant au segment $[-\alpha,\alpha]$ et tout $n$ appartenant à $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire réelle $e^{tS_n}$ admet une espérance égale à $\big(\Psi(t)\big)^n$.

**6.** a) Soit $t$ un réel appartenant à l'intervalle $]0,\alpha]$ et soit $n$ appartenant à $\mathbb{N}^*$.

Montrer que $P\left(\dfrac{S_n}{n} \geqslant m+\varepsilon\right) = P\left(e^{tS_n} \geqslant \left(e^{t(m+\varepsilon)}\right)^n\right)$, puis que $P\left(\dfrac{S_n}{n} \geqslant m+\varepsilon\right) \leqslant \big(f_\varepsilon(t)\big)^n$.

b) En déduire qu'il existe un réel $r$ appartenant à l'intervalle $]0,1[$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P\left(\dfrac{S_n}{n} \geqslant m+\varepsilon\right) \leqslant r^n$.

**7.** Montrer qu'il existe $s \in ]0,1[$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*, P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant 2s^n$.

Comparer ce résultat à la majoration obtenue avec la loi faible des grands nombres.

**Partie III : Une majoration de $P\left(\left|\dfrac{S_n}{n}\right| \geqslant \varepsilon\right)$**

Dans cette partie, on suppose qu'il existe un réel $c$ strictement positif tel que la variable aléatoire réelle discrète $X$ vérifie $E(X) = 0$ et $\forall \omega \in \Omega$, $|X(\omega)| \leqslant c$.

**1.** Montrer que la variable aléatoire $X$ admet un moment exponentiel d'ordre $\alpha$ pour tout réel $\alpha$ strictement positif. Les fonctions $\Psi$ et $f_\varepsilon$ introduites dans la partie **II** sont ainsi définies sur $\mathbb{R}$.

**2.** On considère $Y$ la variable aléatoire réelle définie par $Y = \dfrac{1}{2} - \dfrac{X}{2c}$.

a) Vérifier que $X = -cY + (1-Y)c$.

b) Montrer que $e^X \leqslant Ye^{-c} + (1-Y)e^c$.

**3.** a) Montrer que $E(e^X) \leqslant \mathrm{ch}(c)$.

b) En déduire que $\forall t \in \mathbb{R}^{+*}, \Psi(t) \leqslant \mathrm{ch}(ct)$.

**4.** Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}^{+*}, f_\varepsilon(t) \leqslant \exp\left(-t\varepsilon + \dfrac{1}{2}c^2t^2\right)$.

**5.** Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, P\left(\left|\dfrac{S_n}{n}\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant 2\exp\left(-n\dfrac{\varepsilon^2}{2c^2}\right)$.

**6.** Soit $n$ un entier naturel non nul, $p$ un élément de l'intervalle $]0,1[$ et $Z$ une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètre $(n,p)$.

À l'aide de la question précédente, majorer $P\left(\left|\dfrac{Z}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right)$ en fonction de $n$, $p$ et $\varepsilon$.

**Fin du problème II**