Correction du DS6

Problème 1 : (CCP PC 2009 maths 1)

Partie I

1. On a $(M^TSM)^T = \mathcal{M}^TS^TM = M^TSM$ donc M^TSM est symétrique. D'autre part, pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $X^T(M^TSM)X = (M^TX)S(MX) \geqslant 0$ car $MX \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, donc $\boxed{M^TSM \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})}$

2. Cours

3. $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{X}_A = X(X-2)$ donc $\mathrm{Sp}(A) = \{0, 2\} \subset \mathbb{R}^+$ et $\boxed{A \in \mathcal{S}_2^+(\mathbb{R})}$ par contre $0 \in \mathrm{Sp}(A)$ donc $\boxed{A \notin \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})}$

4. $\mathrm{Sp}(S) \subset \mathbb{R}^{+*}$ donc $0 \notin \mathrm{Sp}(S)$ et S est inversible. On a $S = P\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)P^T$ avec $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda_i > 0$ donc, avec $P^{-1} = P^T$, $S^{-1} = P\mathrm{diag}\left(\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}\right)P^T$; les valeurs propres de S^{-1} sont les inverses de celles de S. On en déduit $\mathrm{Sp}(S^{-1}) \subset \mathbb{R}^{+*}$ et S^{-1} est symétrique donc $\boxed{S^{-1} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})}$

5. Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(S)$ et X un vecteur propre associé, on a $X^TSX = \lambda\|X\|^2 = 0$ et $\|X\| \neq 0$, donc $\mathrm{Sp}(S) = \{0\}$. Comme S est symétrique, elle est diagonalisable donc semblable à la matrice nulle donc $\boxed{S = 0}$

6. a) Si on pose $S = S_2 - S_1$, on a, pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^TSX \geqslant 0$ car $S_1 \leqslant S_2$ et $X^TSX \leqslant 0$ car $S_2 \leqslant S_1$ donc $X^TSX = 0$, ce qui donne $S = 0$ avec la question précédente ie $\boxed{S_2 = S_1}$

   b) Si $S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $S_2 = I_2$; $-1 \in \mathrm{Sp}(S_1 - S_2)$ et $-1 \in \mathrm{Sp}(S_2 - S_1)$ donc ni $S_2 - S_1$, ni $S_1 - S_2$ n'est positive.

   c) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $X^TS_1X \leqslant X^TS_2X$ donc si $\alpha \geqslant 0$, on a $X^T\alpha S_1X \leqslant X^T\alpha S_2X$ et $\boxed{\alpha S_1 \leqslant \alpha S_2 \text{ si } \alpha \geqslant 0}$. Si $\alpha < 0$, on a $\alpha S_2 \leqslant \alpha S_1$.

   d) On a $(S_2 + S) - (S_1 + S) = S_2 - S_1 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ donc $\boxed{S_1 + S \leqslant S_2 + S}$

7. $M^TS_2M - M^TS_1M = M^T(S_2 - S_1)M$ donc, d'après **I.1**, comme $S_2 - S_1 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, on a $M^T(S_2 - S_2)M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ donc $\boxed{M^TS_1M \leqslant M^TS_2M}$

8. a) On a $\mathrm{Sp}(S - I_n) \in \mathbb{R}^+$ donc comme $\mathcal{X}_S(\lambda) = \det(\lambda I_n - S) = \det((\lambda - 1)I_n - (S - I_n)) = \mathcal{X}_{S - I_n}(\lambda - 1)$, on en déduit $\mathrm{Sp}(S) = 1 + \mathrm{Sp}(S - I_n)$ donc les valeurs propres de S sont $\geqslant 1$ et $\boxed{S \text{ est inversible}}$

   b) D'après **I.4**, $\mathrm{Sp}(S^{-1}) \subset]0, 1]$ donc $\mathrm{Sp}(S^{-1} - I_n) = \mathrm{Sp}(S^{-1}) - 1 \subset \mathbb{R}^-$ donc $\boxed{S^{-1} \leqslant I_n}$ (S^{-1} est symétrique)

9. Fait en cours

10. Si $S_1 \leqslant S_2$ alors d'après **7.** $(M_1^{-1})^TS_1M_1^{-1} \leqslant (M_1^{-1})^TS_2M_1^{-1}$, ie $I_n \leqslant (M_1^{-1})^TS_2M_1^{-1}$. On en déduit, par **8**, que $(M_1^{-1})^TS_2M_1^{-1}$ est inversible donc S_2 est inversible, et $I_n \geqslant \left((M_1^{-1})^TS_2M_1^{-1}\right)^{-1} = M_1S_2^{-1}M_1^T$. À nouveau, d'après **7.** on a $M_1^{-1}I_n(M_1^{-1})^T \geqslant S_2$, ie $\boxed{S_2^{-1} \leqslant S_1^{-1}}$

Partie II

1. a) On a, pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $p_{i,j}\lambda_j = \mu_ip_{i,j}$ donc, soit $p_{i,j} = 0$ et on a bien $p_{i,j}f(\lambda_j) = f(\mu_i)p_{i,j}$, soit $\lambda_j = \mu_i$ et on a aussi $p_{i,j}f(\lambda_j) = f(\mu_i)p_{i,j}$. On a donc bien $\boxed{Pf(D) = f(\Delta)P}$

   b) Si $S = PDP^T = Q\Delta Q^T$ alors $(Q^TP)D = \Delta(Q^TP)$ et $Q^TP \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc, avec la question précédente, on a $(Q^TP)f(D) = f(\Delta)(Q^TP)$ donc $Pf(D)P^T = Qf(\Delta)Q^T$

2. On écrit $A = PDP^T$ avec $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $D = \mathrm{diag}(0, 2)$; on a donc $\cos(\pi D) = \mathrm{diag}(\cos(0), \cos(2\pi)) = I_2$ puis $\cos(\pi A) = PI_2P^T$ donc $\boxed{\cos(\pi A) = I_2}$

3. a) On peut définir $g(S)$ si et seulement si $\mathrm{Sp}(S) \subset \mathbb{R}^{+*}$ donc si et seulement si $\boxed{S \text{ est définie positive}}$
   Dans ce cas, on a, si $S = PDP^T$ avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_i)$ alors $g(D) = -\mathrm{diag}(\lambda_i^{-1}) = -D^{-1}$ donc $g(S) = -PD^{-1}P^T$ et $\boxed{g(S) = -S^{-1}}$
   Enfin, si S_1 et S_2 sont définies positives et vérifient $S_1 \leqslant S_2$ alors $S_2^{-1} \leqslant S_1^{-1}$ d'après **I.10** puis $-S_1^{-1} \leq -S_2^{-1}$ d'après **I.6.c**, donc on en déduit que $\boxed{g \text{ est matriciellement croissante sur } \mathbb{R}^{+*}}$

   b) On peut définir $g(S)$ si et seulement si $\mathrm{Sp}(S) \subset]-1, +\infty[$. Dans ce cas, si $S = PDP^T$ alors $h(S) = Ph(D)P^T$ avec $h(D) = \mathrm{diag}\left(\dfrac{\lambda_i}{1 + \lambda_i}\right)$ (car $1 + \lambda_i \neq 0$) ; on vérifie alors $h(D) = I_n - (D + I_n)^{-1}$ puis, en multipliant par P et P^T, $h(S) = I_n + P(D + I_n)^{-1}P^T = I_n + (P(D + I_n)P^T)^{-1}$ donc $\boxed{h(S) = I_n - (S + I_n)^{-1}}$
   Si $S_1 \leqslant S_2$ avec $\mathrm{Sp}(S_1) \subset]-1, +\infty[$ et $\mathrm{Sp}(S_2) \subset]-1, +\infty[$ alors (**I.6.d**), $(S_1 + I_n) \leqslant (S_2 + I_n)$ donc (**I.10**) $(S_2 + I_n)^{-1} \leqslant (S_1 + I_n)^{-1}$ et (**I.6.c**), $-(S_1 + I_n)^{-1} \leqslant -(S_2 + I_n)^{-1}$; enfin (**I.6.d**) $I_n - (S_1 + I_n)^{-1} \leqslant I_n - (S_2 + I_n)^{-1}$ ce qui signifie que $\boxed{h \text{ est matriciellement croissante sur }]-1, +\infty[}$

4. Si $X=(x_i)$ alors $X^TA(t)X=\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}(t)x_ix_j$ donc, par combinaison linéaire de fonctions intégrables sur I, $t\mapsto X^TA(t)X$ est intégrable sur I et $\displaystyle\int_I X^TA(t)X\,\mathrm{d}t=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\left(\int_I a_{i,j}(t)\,\mathrm{d}t\right)x_ix_j=X^T\left(\int_I A(t)\,\mathrm{d}t\right)X$, par définition des coefficients de la matrice $\displaystyle\int_I A(t)\,\mathrm{d}t$.

5. a) La fonction $t\mapsto\dfrac{x}{(1+xt)t^\alpha}$ est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ car $x>0$; de plus, on a les équivalents $\dfrac{x}{(1+xt)t^\alpha}\underset{t\to0}{\sim}\dfrac{x}{t^\alpha}$ avec $\alpha<1$ et $\dfrac{x}{(1+xt)t^\alpha}\underset{t\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{t^{1+\alpha}}$ avec $1+\alpha>1$, donc $\boxed{t\mapsto\dfrac{x}{(1+xt)t^\alpha}\text{ est intégrable sur }\mathbb{R}^{+*}\text{ si }x>0}$

b) Pour $x>0$, la fonction $u\mapsto u/x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ strictement croissante et bijective de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, donc $F(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha\,\mathrm{d}u}{(1+u)u^\alpha}$ puis $\boxed{F(x)=x^\alpha\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{(1+u)u^\alpha}}$ La constante $C=F(1)$ est strictement positive car la fonction $u\mapsto\dfrac{1}{(1+u)u^\alpha}$ est continue, positive et non nulle sur $\mathbb{R}^{+*}$.

c) Si $S=PDP^T$ alors D est inversible (car $\mathrm{Sp}(S)=\mathrm{Sp}(D)\subset\mathbb{R}^{+*}$) puis $S^{-1}+tI_n=P(D^{-1}+tI_n)P^T$ et $D^{-1}+tI_n=\mathrm{diag}(t+\lambda_i^{-1})$ est inversible car $t+\lambda_i^{-1}>0$. On en déduit $\boxed{(S^{-1}+tI_n)\in\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})}$
Si $f(x)=\dfrac{x}{t^\alpha(1+xt)}$ (pour $t>0$ fixé) alors $f(S)=Pf(D)P^T$ et on vérifie que $f(D)=\mathrm{diag}\left(f(\lambda_i)\right)$; on a vu (**II5.a**) que $t\mapsto f(\lambda_i)=\dfrac{\lambda_i}{(1+\lambda_it)t^\alpha}$ est alors intégrable. Avec le résultat admis juste avant, on en déduit $\boxed{t\mapsto\dfrac{1}{t^\alpha}(S^{-1}+tI_n)^{-1}\text{ est intégrable sur }\mathbb{R}^{+*}}$ et $F(S)=P(F(D))P^T=P\left(\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^\alpha}(D^{-1}+tI_n)^{-1}\,\mathrm{d}t\right)P^T$ donc $F(S)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^\alpha}P(D^{-1}+tI_n)^{-1}P^T\,\mathrm{d}t$ donc $\boxed{F(S)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^\alpha}(S^{-1}+tI_n)\,\mathrm{d}t}$

d) On a $B^{-1}\leqslant A^{-1}$ (par **I.10**) puis $B^{-1}+tI_n\leqslant A^{-1}+tI_n$ (par **I.6.d**) ; comme $\mathrm{Sp}(B^{-1}+tI_n)\subset\mathbb{R}^{+*}$, on a, avec **I.10**, $(A^{-1}+tI_n)^{-1}\leqslant(B^{-1}+tI_n)^{-1}$ et, enfin, par définition de la relation $\leq$ et la définition de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ $\boxed{\forall X\in\mathcal{M}_{n,}(\mathbb{R}),X^T(A^{-1}+tI_n)^{-1}X\leqslant X^T(B^{-1}+tI_n)^{-1}X}$

e) Par division de cette inégalité (entre deux réels) par $t^\alpha>0$ et intégration entre 0 et $+\infty$, on en déduit, en utilisant **II.4**, $X^TF(A)X\leqslant X^TF(B)X$. Enfin , par division de cette inégalité par $C>0$, on obtient $X^Tp_\alpha(A)X\leqslant X^Tp_\alpha(B)X$, ie $\boxed{p_\alpha\text{ est matriciellement croissante sur }\mathbb{R}^{+*}\text{ si }\alpha\in]0,1[}$

6. On a $\mathrm{Tr}(A(x)-B(x))=2\,\mathrm{ch}(x)-\mathrm{ch}(x)^{-1}=\dfrac{2\,\mathrm{ch}^2(x)-1}{\mathrm{ch}(x)}>0$ et $\det(A(x)-B(x))=(\mathrm{ch}^2(x)-1)-\mathrm{sh}^2(x)=0$ donc les valeurs propres de $A(x)-B(x)$ sont positives (car réelles) et $\boxed{A(x)\geqslant B(x)}$
On vérifie que $A(x)=P\begin{pmatrix}e^x&0\\0&e^{-x}\end{pmatrix}P^T$ avec $P=\dfrac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$ donc $p_\alpha(A(x))=P\begin{pmatrix}e^{\alpha x}&0\\0&e^{-\alpha x}\end{pmatrix}P^T=A(\alpha x)$. $B(x)$ étant diagonale, on a directement $p_\alpha(B(x))=\begin{pmatrix}0&0\\0&\mathrm{ch}(x)^{-\alpha}\end{pmatrix}$. Plutôt que de chercher les valeurs propres de $p_\alpha(A(x))-p_\alpha(B(x))$, on peut raisonner ainsi : $\det(p_\alpha(A(x))-p_\alpha(B(x)))=\mathrm{ch}^2(\alpha x)-\dfrac{\mathrm{ch}(\alpha x)}{\mathrm{ch}(x)^\alpha}-\mathrm{sh}^2(\alpha x)=1-\dfrac{\mathrm{ch}(\alpha x)}{\mathrm{ch}(x)^\alpha}$ donc $\det(p_\alpha(A(x))-p_\alpha(B(x)))\underset{x\to0}{\sim}\alpha(1-\alpha)\dfrac{x^2}{2}$. On en déduit que si $\alpha>1$, $\det(p_\alpha(A(X))-p_\alpha(B(x))<0$ au voisinage de 0 ce qui veut dire que $p_\alpha(A(x))-p_\alpha(B(x))$ possède une valeur propre strictement négative donc n'est pas positive et comme $A(x)\geqslant B(x)$, on conclut $\boxed{p_\alpha\text{ n'est pas matriciellement croissante si }\alpha>1}$

Problème 2 : (Centrale PC 2017 maths 2)

Préliminaires

1. a) Si $x\in\mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ et $e^{x^2/2}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{2^nn!}$ (les deux RCV valent $+\infty$).

b) On a $e^{t^2/2}-\mathrm{ch}(t)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^nn!}-\frac{1}{(2n)!}\right)t^{2n}\geqslant0$ car $2^nn!=2\times4\times\cdots\times(2n)\leqslant1\times2\times3\times\cdots\times(2n-1)(2n)=(2n)!$

2. La fonction exp est convexe sur $\mathbb{R}$ car $\exp''=\exp\geqslant0$ donc $\boxed{\forall\lambda\in[0,1],e^{\lambda a+(1-\lambda)b}\leqslant\lambda e^a+(1-\lambda)e^b}$

3. On étudie $\varphi : t \mapsto te^{-\gamma t}$ sur $\mathbb{R}^+$: φ est $\mathcal{C}^1$ et positive ; $\varphi'(t) = e^{-\gamma t}(1-\gamma t)$ donc $0 \leqslant \varphi(t) \leqslant \varphi\left(\dfrac{1}{\gamma}\right)$ et $\boxed{\varphi \text{ est bornée sur } \mathbb{R}^+}$

Partie I

1. On suppose $\sum e^{\alpha|x_n|}P(X = x_n)$ ACV. Comme $\alpha > 0$, $\alpha x_n \leqslant \alpha|x_n|$ donc $0 \leqslant e^{\alpha X} \leqslant e^{|\alpha|X}$ donc, d'après le théorème de comparaison, comme $E(e^{|\alpha|X})$ est finie, $\boxed{E(e^{\alpha X}) \text{ existe}}$

2. a) $e^{\alpha|n|}P(X = n) = e^{-\lambda}\dfrac{(e^\alpha \lambda)^n}{n!}$ donc $E(e^{\alpha|X|})$ existe pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\boxed{E(e^{\alpha X}) = \exp\left(\lambda(e^\alpha - 1)\right)}$

b) $e^{\alpha|n|}P(Y = n) = pe^\alpha\left((1-p)e^\alpha\right)^{n-1}$ donc X admet un moment exponentiel d'ordre α si et seulement si $|(1-p)e^\alpha| < 1 \Leftrightarrow \alpha < -\ln(1-p)$ et $\boxed{E(e^{\alpha X}) = \dfrac{pe^\alpha}{1-(1-p)e^\alpha} \text{ pour } \alpha < -\ln(1-p)}$

c) $Z(\Omega)$ est un ensemble fini donc $E(e^{\alpha|Z|})$ existe pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et $E(e^{\alpha X}) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(pe^\alpha)^k(1-p)^{n-k}$ donc $\boxed{E(e^{\alpha X}) = (1-p+pe^\alpha)^n \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{R}}$

Partie II

1. La fonction $t \mapsto te^{-\alpha t}$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$, ie il existe $C > 0$ telle que $\forall t \in \mathbb{R}^+, t \leqslant Ce^{\alpha t}$ donc $|x_n| \leqslant Ce^{\alpha|x_n|}$ puis $0 \leqslant X \leqslant Ce^{\alpha|X|}$ donc, d'après le théorème de comparaison (avec $e^{\alpha|X|}$ d'espérance finie), $\boxed{E(X) \text{ existe}}$

2. Pour appliquer la loi faible des grands nombres, il faut justifier que X^2 admet une espérance : $t \mapsto t^2e^{-\alpha t}$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$ (même étude de fonction que pour le préliminaire) ; il existe donc $D > 0$ telle que $\forall t \in \mathbb{R}^+, t^2 \leqslant De^{\alpha t}$ puis $0 \leqslant X^2 \leqslant De^{\alpha|X|}$ donc, d'après le théorème de comparaison, $E(X^2)$ existe. On en déduit, les X_i étant indépendantes, $\boxed{P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \dfrac{V(X)}{n\varepsilon^2}}$

3. a) Si $|t| \leqslant \alpha$ alors $0 \leqslant e^{tx_n}P(X = x_n) \leqslant e^{\alpha|x_n|}P(X = x_n)$ donc $\Psi(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} e^{tx_n}P(X = x_n)$ existe. On pose $u_n(t) = e^{tx_n}P(X = x_n)$ et on applique le théorème de continuité des séries de fonctions :

H1 : Les fonctions u_n sont continues sur $[-\alpha, \alpha]$

H2 : $|u_n(t)| \leqslant e^{\alpha|x_n|}P(X = x_n)$ (indép de t) donc $\|u_n\|_{\infty,[-\alpha,\alpha]} \leqslant e^{\alpha|x_n|}P(X = x_n)$, qui est le terme général d'une série convergente, donc $\sum u_n$ CVN sur $[-\alpha, \alpha]$

On en déduit $\boxed{\Psi \text{ est continue sur } [-\alpha, \alpha]}$

b) On applique cette fois le théorème de dérivation :

H1 : les fonctions u_n sont $\mathcal{C}^1$ sur $]-\alpha, \alpha[$

H2 : $\sum u_n$ CVS sur $]-\alpha, \alpha[$ par CVN (d'après **II.3.a**)

H3 : $u_n'(t) = x_ne^{tx_n}P(X = x_n)$ donc $|u_n'(t)| \leqslant |x_n|e^{tx_n}P(X = x_n)$; soit $[-a, a] \subset]-\alpha, \alpha[$, on a donc $\|u_n'\|_{\infty,[-a,a]} \leqslant |x_n|e^{a|x_n|}P(X = x_n) = \beta_n$; la fonction $t \mapsto te^{(a-\alpha)t}$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$, d'après le préliminaire, donc $\beta_n \leqslant Ce^{\alpha|x_n|}$ et $\sum \beta_n$ converge. On en déduit que $\sum u_n'$ CVN sur tout segment de $]-\alpha, \alpha[$

On en déduit que Ψ est $\mathcal{C}^1$ sur $]-\alpha, \alpha[$ et $\Psi'(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x_ne^{tx_n}P(X = x_n)$ donc, par le théorème de transfert, $\boxed{\Psi'(t) = E(Xe^{tX}) \text{ si } |t| < \alpha}$

4. a) $\Psi(0) = E(1) = 1$, $\Psi'(0) = E(X) = m$ et $f_\varepsilon'(t) = e^{-(m+\varepsilon)}\left(\Psi'(t) - (m+\varepsilon)\Psi(t)\right)$, on a $\boxed{f_\varepsilon(0) = 1 \text{ et } f_\varepsilon'(0) = -\varepsilon}$

b) D'après la formule de Taylor-Young, comme Ψ est $\mathcal{C}^1$ sur $]-\alpha, \alpha[$, on a $f(t) \underset{t\to 0}{=} 1 - \varepsilon t + o(t)$ donc $f_\varepsilon(t) - 1 \underset{t\to 0}{\sim} -\varepsilon t$ donc si $t > 0$ est suffisamment petit, on a $0 < f_\varepsilon(t) < 1$, ce qui justifie l'existence de $t_0 \in]0, \alpha[$.

5. On a $e^{tS_n} = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} e^{tX_k}$; les X_i étant indépendantes, les e^{tX_i} le sont aussi donc $E(e^{tS_n}) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} E(e^{tX_k})$, ce qui donne bien $\boxed{E(e^{tS_n}) = (\Psi(t))^n}$

6. a) Pour $t > 0$, on a $\dfrac{S_n(\omega)}{n} \geqslant m + \varepsilon \Leftrightarrow tS_n(\omega) \geqslant nt(m+\varepsilon) \Leftrightarrow e^{S_n(\omega)} \geqslant e^{nt(m+\varepsilon)} = \left(e^{t(m+\varepsilon)}\right)^n$ donc $\boxed{P\left(\dfrac{S_n}{n} \geqslant m + \varepsilon\right) = P\left(e^{tS_n} \geqslant \left(e^{t(m+\varepsilon)}\right)^n\right)}$ On peut alors appliquer l'inégalité de Markov à la variable positive

e^{tS_n} : on a $P\left(e^{tS_n} \geqslant \left(e^{t(m+\varepsilon)}\right)^n\right) \leqslant \dfrac{E\left(e^{tS_n}\right)}{\left(e^{t(m+\varepsilon)}\right)^n} = \left(\dfrac{\Psi(t)}{e^{t(m+\varepsilon)}}\right)^n$ donc $\boxed{P\left(\dfrac{S_n}{n} \geqslant m+\varepsilon\right) \leqslant (f_\varepsilon(t))^n}$

b) Il suffit de prendre $r = f_\varepsilon(t_0)$ avec le réel t_0 introduit à la question **II.4.b**

7. Comme $\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) = \left(\dfrac{S_n}{n} \geqslant m+\varepsilon\right) \cup \left(\dfrac{S_n}{n} \leqslant m-\varepsilon\right)$, les deux événements étant incompatibles, on a $P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) = P\left(\dfrac{S_n}{n} \geqslant m+\varepsilon\right) + P\left(\dfrac{S_n}{n} \leqslant m-\varepsilon\right)$. Pour majorer la seconde probabilité, on applique la question précédente à la suite $(-X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$, qui vérifie les mêmes hypothèses que la suite (X_k) (en particulier $-X$ admet elle aussi un moment exponentiel d'ordre α, le même que X) : comme $E(-X) = -m$, il existe donc un réel $r' \in]0,1[$ tel que $P\left(-\dfrac{S_n}{n} \geqslant -m+\varepsilon\right) \leqslant (r')^n$ donc $P\left(\dfrac{S_n}{n} \leqslant m-\varepsilon\right) \leqslant (r')^n$. Avec $q = \max\{r, r'\} < 1$, on a $\boxed{P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant 2q^n}$.

Cette majoration est meilleure que celle donnée par la loi faible des grands nombres puisque $q^n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Partie III

1. On a $0 \leqslant e^{\alpha|X|} \leqslant e^{\alpha c}$ donc $e^{\alpha|X|}$ est bornée donc admet une espérance finie (théorème de comparaison) ; $\boxed{X \text{ admet un moment exponentiel pour tout } \alpha \in \mathbb{R}}$

2. a) On a $-cY + c(1-Y) = -c\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{X}{2c}\right) + c\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{X}{2c}\right) = X$.

b) Comme $|X| \leqslant c$, on a $Y \in [0,1]$, il suffit d'appliquer la question **2** du préliminaire avec $a = -c$, $b = c$ et $\lambda = Y$.

3. a) On a $E(Y) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2c}E(X) = \dfrac{1}{2}$ et par croissance de l'espérance, $E(e^X) \leqslant e^{-c}E(Y) + e^c(1 - E(Y)) = \mathrm{ch}(c)$.

b) En appliquant ce qui précède à la variable tX qui vérifie $E(tX) = tE(X) = 0$ et $|tX| \leqslant tc$, on obtient $\boxed{\Psi(t) \leqslant \mathrm{ch}(ct) \text{ si } t > 0}$

4. On a $m = 0$ donc $f_\varepsilon(t) = e^{-\varepsilon t}\Psi(t) \leqslant e^{-\varepsilon t}\,\mathrm{ch}(ct)$ et avec la question **1.a** du préliminaire, $\mathrm{ch}(ct) \leqslant e^{c^2t^2/2}$ donc $\boxed{f_\varepsilon(t) \leqslant e^{-\varepsilon t + c^2t^2/2}}$

5. On applique **II.6.a**, avec $m = 0$, et on obtient $P\left(\dfrac{S_n}{n} \geqslant \varepsilon\right) \leqslant (f_\varepsilon(t))^n \leqslant e^{n\left(-\varepsilon t + c^2t^2/2\right)}$ pour tout $t > 0$ et si on choisit $t = \dfrac{\varepsilon}{c^2}$, on obtient $P\left(\dfrac{S_n}{n} \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \exp\left(-n\dfrac{\varepsilon^2}{2c^2}\right)$.

On applique alors la même chose à la suite $(-X_k)$, qui vérifie à nouveau les mêmes hypothèses que (X_k), et on trouve aussi $P\left(\dfrac{S_n}{n} \leqslant -\varepsilon\right) \leqslant \exp\left(-n\dfrac{\varepsilon^2}{2c^2}\right)$. Comme $\left(\left|\dfrac{S_n}{n}\right| \geqslant \varepsilon\right) = \left(\dfrac{S_n}{n} \geqslant \varepsilon\right) \cup \left(\dfrac{S_n}{n} \leqslant -\varepsilon\right)$, les événements étant incompatibles, on a $\boxed{P\left(\left|\dfrac{S_n}{n}\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant 2\exp\left(-n\dfrac{\varepsilon^2}{2c^2}\right)}$