(Centrale PC 2023 maths 2)

Notations

$\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n à coefficients réels.

$(H_j)_{j\in\mathbb{N}}$ désigne la famille de polynômes définie par $H_0 = 1$ et, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $H_j = \dfrac{1}{j!}\displaystyle\prod_{i=0}^{j-1}(X - i)$.

Pour $(k, n) \in \mathbb{N}^2$, on note $\dbinom{n}{k}$ le coefficient binomial k parmi n. On note $\dbinom{0}{0} = 1$ et $\dbinom{n}{k} = 0$ si $k > n$.

$[\![a, b]\!]$ désigne l'ensemble des entiers compris entre a et b. Ainsi $[\![a, b]\!] = \{n \in \mathbb{Z} | a \leqslant n \leqslant b\}$

I Utilisation de séries entières

I.A- Une première formule

1. Donner sans démonstration le rayon de convergence et la somme de la série entière réelle $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} x^n$.

2. En déduire le rayon de convergence et la somme de la série entière réelle $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} nx^n$.

3. Pour $k \in \mathbb{N}$, montrer que la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\binom{n}{k}x^n$ admet 1 pour rayon de convergence et que, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n}{k}x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}} \tag{I.1}$$

I.B- Utilisation d'une famille de polynômes

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $f_k : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n^k x^n$.

1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, f_k est définie sur $]-1, 1[$.

2. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $(H_0, \ldots, H_k)$ est une base de $\mathbb{R}_k[X]$ et qu'il existe une unique famille $(\alpha_{k,0}, \ldots, \alpha_{k,k})$ dans $\mathbb{R}^{k+1}$ telle que $X^k = \displaystyle\sum_{j=0}^{k}\alpha_{k,j}H_j$.

3. Pour $k \in \mathbb{N}$, donner les valeurs de $\alpha_{k,0}$ et $\alpha_{k,k}$.

4. Pour tout $(j, k) \in \mathbb{N}^2$ tel que $1 \leqslant j \leqslant k$, montrer que $\alpha_{k,j} = j^k - \displaystyle\sum_{i=0}^{j-1}\binom{j}{i}\alpha_{k,i}$.

5. Écrire une fonction Python `alpha` qui prend un couple d'entiers (k, j) en paramètre et qui renvoie la valeur $\alpha_{k,j}$. On supposera avoir accès à une fonction `binome` telle que `binome(n,k)` renvoie le coefficient binomial $\dbinom{n}{k}$.

6. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme réel P_k tel que, pour tout $x \in]-1, 1[$, $f_k(x) = \dfrac{P_k(x)}{(1-x)^{k+1}}$ et que ce polynôme vérifie la relation

$$P_k = \sum_{j=0}^{k}\alpha_{k,j}X^j(1-X)^{k-j}$$

7. À l'aide de la fonction Python `alpha`, écrire une fonction Python `P` qui prend l'entier k en paramètre et qui renvoie la liste des coefficients de degré 0 à k de P_k.

8. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P_{k+1} = X(1-X)P_k' + (k+1)XP_k$.

9. Calculer explicitement P_2 et P_3.

10. Déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, le degré de P_k ainsi que son coefficient dominant.

11. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in]0, 1[$, $x^{k+1}P_k\left(\dfrac{1}{x}\right) = P_k(x)$.

12. En déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $j \in [\![0, k]\!]$, un lien entre les coefficients de degré j et $k + 1 - j$ de P_k.

I.C- Une dernière formule

On s'intéresse dans cette sous-partie à la série entière $\sum_{n\geqslant 0}\binom{2n}{n}x^n$ dont on note R le rayon de convergence.

1. Déterminer R et montrer que, pour tout $x \in]-R,R[$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}x^n = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}$.

2. Montrer que, pour tout $x \in]-R,R[\setminus\{0\}$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}\frac{x^n}{n+1} = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} \tag{I.2}$$

3. En déduire que, pour tout $x \in]-R,R[\setminus\{0\}$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}x^n = \frac{1}{2x}\left(\frac{1}{\sqrt{1-4x}}-1\right).$$

4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} = \frac{1}{2}\binom{2n+2}{n+1} \tag{I.3}$$

II Étude de sommes doubles

On considère dans cette partie des familles de nombres réels indexées par $\mathbb{N}^2$ c'est-à-dire du type $(a_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$.

Dans ce contexte, on se demande s'il est possible de définir les quantités $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty}a_{i,j}$ et $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty}a_{i,j}$ et si ces quantités, lorsqu'elles sont définies, sont nécessairement égales.

On rappelle et on admet les deux résultats suivants.

- Si $a_{i,j} \geqslant 0$ pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, alors les deux sommes $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty}a_{i,j}$ et $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty}a_{i,j}$ existent dans $[0,+\infty]$ et sont égales. En particulier (cas d'une famille sommable de réels positifs), si l'une des sommes est finie, l'autre aussi et elles sont égales.
- (Cas d'une famille sommable de réels quelconques.) Si $(a_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est une famille de nombres réels telle que la somme $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty}|a_{i,j}|$ est finie, alors les sommes $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty}a_{i,j}$ et $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty}a_{i,j}$ existent et sont égales.

II.A- Application

II.A.1) Une première application

Soit $x \in]-1,1[$.

1. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{nx^n}{1-x^n}$ converge et que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{nx^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}nx^{n(1+k)}$.

2. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{p\geqslant 1}\frac{x^p}{(1-x^p)^2}$ converge et que sa somme est égale à celle de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{nx^n}{1-x^n}$.

II.A.2)- Une deuxième application

On admet que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1. Montrer que l'on peut définir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = n\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^3(k+1)}$.

2. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}u_n$ converge et calculer sa somme.

II.B- Contre-exemples

II.B.1) Un premier contre-exemple

On considère la famille $(b_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ définie, pour tout $(i,j)\in\mathbb{N}^2$, par $b_{i,j}=\begin{cases}0 & \text{si } i>j,\\ -1 & \text{si } i=j,\\ \dfrac{1}{2^{j-i}} & \text{si } i<j.\end{cases}$

1. Montrer l'existence de $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} b_{i,j}$ et calculer sa valeur.

2. Montrer l'existence de $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} b_{i,j}$ et calculer sa valeur.

3. A-t-on $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} b_{i,j}=\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} b_{i,j}$?

II.B.2)- Un deuxième contre-exemple

On considère la famille $(c_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ définie, pour tout $(i,j)\in\mathbb{N}^2$, par $c_{i,j}=\begin{cases}0 & \text{si } i>j,\\ j & \text{si } i=j,\\ -2i\,3^{i-j} & \text{si } i<j.\end{cases}$

1. Montrer l'existence de $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} c_{i,j}$ et calculer sa valeur.

2. Soit $j\in\mathbb{N}$. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{i\geqslant 0} c_{i,j}$ converge et que $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} c_{i,j}=\frac{1}{2}\,\frac{3^j-1}{3^{j-1}}$.

3. Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{j\geqslant 0}\sum_{i=0}^{+\infty} c_{i,j}$?

III Probabilités

Dans cette troisième partie, toutes les variables aléatoires considérées sont des variables aléatoires discrètes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},P)$.
La lettre p désigne un nombre réel de l'intervalle $]0,1[$.

III.A- Un conditionnement

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ suivant la loi géométrique de paramètre p :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad P(X=n)=p(1-p)^{n-1}.$$

Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la loi conditionnelle de Y sachant $[X=n]$ est la loi de Poisson de paramètre n :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall k\in\mathbb{N},\quad P(Y=k\mid X=n)=e^{-n}\frac{n^k}{k!}.$$

1. Déterminer la loi conjointe de X et Y.

2. Calculer $P(Y=0)$ et montrer que, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$,

$$P(Y=k)=\frac{p}{(1-p)k!}\,f_k\left(\frac{1-p}{e}\right),$$

où f_k est la fonction définie en **I.B**.

3. Vérifier que l'on a bien $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}P(Y=k)=1$.

4. Montrer que Y admet une espérance finie et calculer cette espérance.

5. Montrer que Y admet une variance et calculer cette variance.

III.B- Pile ou face infini

On considère la répétition infinie du lancer d'une pièce dont la probabilité de « faire pile » est p. Pour modéliser cette expérience, on admet que l'on peut définir une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre p. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $[X_n = 1]$ désigne l'événement « le $n^{\text{ème}}$ lancer donne pile » et $[X_n = 0]$ désigne l'événement « le $n^{\text{ème}}$ lancer donne face ».
Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit A_n et B_n par

- A_n : « à l'issue des $2n$ premiers lancers, il y a autant de piles que de faces »
- B_n : « à l'issue des $2n$ premiers lancers, il y a pour la première fois autant de piles que de faces »

Par exemple si les six premiers lancers donnent dans l'ordre (face, face, pile, pile, face, pile), A_1 n'est pas réalisé mais A_2 et A_3 le sont, B_2 est réalisé mais B_1 et B_3 ne le sont pas.
Enfin on définit C, « au bout d'un certain nombre (non nul) de lancers, il y a autant de piles que de faces ».
On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, A_n et B_n sont des événements, et que C est un événement.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer A_n à l'aide de la variable aléatoire $X_1 + \ldots + X_n$ et en déduire $P(A_n)$.
2. Montrer que les événements $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont incompatibles.
3. Montrer que C est un événement et que $P(C) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(B_n)$.
4. On pose $A_0 = \Omega$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(A_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(B_k)P(A_{n-k})$.
5. À l'aide notamment de la formule (I.3), montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$P(B_n) = \frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1}\big(p(1-p)\big)^n.$$
6. On suppose que $p \neq \dfrac{1}{2}$, montrer que $P(C) = 1 - \sqrt{1-4p(1-p)}$ (on pourra utiliser la formule (I.2)).
7. On suppose que $p = \dfrac{1}{2}$, montrer que $P(C) = 1$.