

Partie I.A

1. $\boxed{R = 1}$
2. $\boxed{R = 1}$
3. $\left| \frac{\binom{n+1}{k}}{\binom{n}{k}} \right| = \frac{n+1}{n+1-k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ donc $\boxed{R = 1}$

Pour $|x| < 1$, $\frac{1}{1-x} \sum_{n=1}^{+\infty} x^n$ donc en dérivant k fois l'égalité, $\frac{k!}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k}$ puis

$$\frac{x^k}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} x^n, \text{ puis } \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \begin{cases} 0 & \text{si } n < k \\ \binom{n}{k} & \text{si } n \geq k \end{cases}$$

Partie I.B

1. $\boxed{R = 1}$
2. $(H_0, \dots, H_k)$ est une famille de k polynômes de $\mathbb{R}_k[X]$, de degrés échelonnés, donc est une base de $\mathbb{R}_k[X]$; ce qui donne l'existence et l'unicité des $\alpha_{k,i}$ (les coordonnées de X^k dans la base $(H_0, \dots, H_k)$).
3. On a $H_i(0) = 0$ pour $i \geq 1$ et $H_0(0) = 1$ donc $\boxed{\alpha_{k,0} = 0^k = 0}$ Comme H_k est le seul polynôme de degré k , en identifiant le coefficient dominant de X^k , on trouve $\boxed{\alpha_{k,k} = k!}$
4. On a $H_i(j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \leq i-1 \\ \binom{j}{i} & \text{si } j \geq i \end{cases}$ donc en évaluant X^k en $X = j$, on trouve $j^k = \sum_{i=0}^k \alpha_{k,i} H_i(j) = \sum_{i=0}^j \alpha_{k,i} H_i(j) = \alpha_{k,j} H_j(j) + \sum_{i=0}^{j-1} \alpha_{k,i} H_i(j) = \alpha_{k,j} + \sum_{i=0}^{j-1} \alpha_{k,i} \binom{j}{i}$
5. Rien n'interdit une fonction récursive assez inefficace :

```
def alpha(k, j) :
    if k == 0 :
        return 1
    elif j == 0 :
        return 0
    else :
        r = j**k
        for i in range(j) :
            r = r - binome(j, i)*alpha(k, i)
        return r
```

6. On a $n^k = \sum_{j=0}^k \alpha_{k,j} H_j(n)$ donc $f_k(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^k \alpha_{k,j} H_j(n) x^n \stackrel{\text{finie}}{=} \sum_{j=0}^k \alpha_{k,j} \sum_{n=0}^{+\infty} H_j(n) x^n$ puis $H_j(n) = \binom{n}{j}$ donc $\sum_{n=0}^{+\infty} H_j(n) x^n = \frac{x^j}{(1-x)^{j+1}}$ d'après **I.A.3**. On a donc $f_k(x) = \sum_{j=0}^k \alpha_{k,j} \frac{x^j}{(1-x)^{j+1}} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}} \sum_{j=0}^k \alpha_{k,j} x^j (1-x)^{k-j}$, ce qui donne l'existence des polynômes P_k et la relation souhaitée.

Reste l'unicité : si Q_k est un autre polynôme tel que $f_k(x) = \frac{Q_k(x)}{(1-x)^{k+1}}$ sur $] -1, 1[$ alors $P_k = Q_k$ sur $] -1, 1[$ donc $P_k = Q_k$ car $P_k - Q_k$ s'annule sur $] -1, 1[$ donc possède une infinité de racines.

7. On peut commencer par calculer les coefficients de $X^j(1-X)^{k-j}$ avant de faire une combinaison linéaire

```
def P(k) :
    L = [0]*(k+1)
    for h in range(k+1) :
        M = [(-1)**i*binome(k-j, i) for i in range(k-j+1)] # (1-X)^{k-j}
        M = [0]*j + M # X^j(1-X)^{k-j}
        for i in range(k+1) :
            L[i] += alpha(k, j)*M[i]
    return L
```

8. On a $f'_k(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^{k+1} x^{n-1}$ donc $xf'_k(x) = f_{k+1}(x)$ donc $x \left(\frac{P'_k(x)}{(1-x)^{k+1}} + \frac{(k+1)P_k(x)}{(1-x)^{k+2}} \right) = \frac{P_{k+1}(x)}{(1-x)^{k+2}}$ ce qui donne, par unicité de P_{k+1} , $\boxed{P_{k+1} = X(1-X)P'_k + (k+1)XP_k}$
9. $P_0 = 1$ puis $P_1 = X$ donc $\boxed{P_2 = X^2 + X \text{ et } P_3 = X^3 + 4X^2 + X}$
10. On montre par récurrence sur k que $P_k = X^k + Q_k$ avec $\deg(Q_k) \leq k-1$: évident pour $k=0$ (ou 1). Si on suppose le résultat vrai pour P_k alors $P_{k+1} = X(1-X)(kX^{k-1} + Q'_k) + (k+1)(X^{k+1} + XQ_k) = X^{k+1} + X(1-X)Q'_k + (k+1)XQ_k$ et $\deg(X(1-X)Q'_k + (k+1)XQ_k) \leq k$. On en déduit que $\boxed{P_k \text{ est unitaire de degré } k}$
11. On procède à nouveau par récurrence sur k : le résultat est évident pour $k=0$; s'il est vrai pour P_k alors on a $(k+1)x^k P_k \left(\frac{1}{x} \right) - x^{k-1} P'_k \left(\frac{1}{x} \right) = P'_k(x)$ donc $x^{k+2} P_{k+1} \left(\frac{1}{x} \right) = (x-1)x^k P'_k \left(\frac{1}{x} \right) + (k+1)x^{k+1} P_k \left(\frac{1}{x} \right) = (x-1) \left[(k+1)x^{k+1} P_k \left(\frac{1}{x} \right) - xP'_k(x) \right] + (k+1)P_k(x) = (x-1)[(k+1)P_k(x) - xP'_k(x)] + (k+1)P_k(x) = x(1-x)P'_k(x) + (k+1)xP_k(x) = P_{k+1}(x)$
12. Si $P_k = \sum_{i=1}^k a_i X^i$ (car $P_k(0) = 0$ si $k \geq 1$) alors $x^{k+1} P_k \left(\frac{1}{x} \right) = \sum_{i=1}^k a_i x^{k+1-i} \stackrel{j=k+1-i}{=} \sum_{j=1}^k a_{k+1-j} X^j$ donc $\boxed{a_j = a_{k+1-j}}$

Partie I.C

1. On a $\left| \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{\binom{2n}{n}} \right| = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 4$ donc $\boxed{R = \frac{1}{4}}$
- Pour $|x| < \frac{1}{4}$, $\frac{1}{\sqrt{1-4x}} = (1-4x)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1/2)(-3/2) \dots (-1/2-n+1)}{n!} (-4x)^n$ et (calcul déjà fait plusieurs fois) $\frac{(-1/2)(-3/2) \dots (-1/2-n+1)}{n!} (-4)^n = \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{2^n n!} 4^n = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} 4^n = \binom{2n}{n}$
2. Si on pose $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}$ et G la primitive de g nulle en 0 alors on a $G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^{n+1}}{n+1}$ donc le membre de gauche est $\frac{1}{x}G(x)$. Il suffit donc de vérifier que $G(x) = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-4x})$: si on pose $h(x) = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-4x})$, on a bien $h(0) = 0$, h est dérivable sur $\left] -\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right[$ et $h'(x) = \frac{1}{2} \frac{(1/2)(4)}{\sqrt{1-4x}} = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}$
3. On remarque cette fois que le terme de gauche et le produit de Cauchy des deux séries entières des questions **I.C.2** et **I.C.3** donc vaut $\frac{1}{\sqrt{1-4x}} \times \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x} = \frac{1}{2x} \left(\frac{1}{\sqrt{1-4x}} - 1 \right)$
4. Avec **I.C.1**, $\frac{1}{\sqrt{1-4x}} - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{2n}{n} x^n \stackrel{n=k+1}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{2k+2}{k+1} x^{k+1}$ donc $\frac{1}{2x} \left(\frac{1}{\sqrt{1-4x}} - 1 \right) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n+2}{n+1} x^n$
- ce qui donne, en identifiant avec les coefficients du DSE de **I.C.3** $\boxed{\frac{1}{2} \binom{2n+2}{n+1} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k}}$

Partie II.A.1

1. Comme $|x| < 1$, on a $\frac{nx^n}{1-x^n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum \frac{nx^n}{1-x^n}$ est ACV. Toujours avec $|x| < 1$, donc $|x^n| < 1$, on a $\frac{nx^n}{1-x^n} = nx^n \sum_{k=0}^{+\infty} (x^n)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} nx^{n(k+1)}$
2. On utilise le deuxième résultat donné avec $a_{n,k} = ix^{n(k+1)}$ (la sommabilité a déjà été prouvée au dessus) : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{nx^n}{1-x^n} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} nx^{n(1+k)}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} nx^{n(1+k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} n(x^{k+1})^n = f_1(x^{k+1}) = \frac{x^{k+1}}{(1-x^{k+1})^2}$. Reste à poser $p = k+1$.

Partie II.A.2

1. $\frac{1}{k^3(k+1)} \sim \frac{1}{k^4}$ (SATP) donc u_n existe
2. On pose $a_{n,k} = \begin{cases} \frac{n}{k^3(k+1)} & \text{si } k \geq n \\ 0 & \text{si } k < n \end{cases}$ et on applique le théorème de Fubini (le premier résultat rappelé puisque $a_{n,k} \geq 0$) : $a_{n,k} = 0$ pour $n > k$ donc $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,k} = \sum_{n=0}^k \frac{n}{k^3(k+1)} = \frac{k(k+1)}{2k^3(k+1)} = \frac{1}{2k^2}$ donc $(a_{n,k})_{n,k \geq 1}$ est sommable

$$\text{et } \boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{\pi^2}{12}}$$

Partie II.B.1

$$1. \left| \frac{1}{2} \right| < 1 \text{ donc } \sum_{j=0}^{+\infty} b_{i,j} = -1 + \sum_{j=i+1}^{+\infty} \frac{1}{2^{j-i}} = -1 + \frac{1/2}{1-1/2} = 0 \text{ et } \boxed{\sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} b_{i,j} = 0}$$

$$2. \sum_{i=0}^{+\infty} b_{i,j} = -1 + \sum_{i=0}^{j-1} \frac{1}{2^{j-i}} \stackrel{k=j-i}{=} -1 + \sum_{k=1}^j \frac{1}{2^k} = -1 + \frac{1}{2} \times \frac{1-(1/2)^j}{1-1/2} = \frac{1}{2^j} \text{ et } \boxed{\sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{+\infty} b_{i,j} = \frac{1}{1-1/2} = 2}$$

3. Bien sûr que non

Partie II.B.2

$$1. \left| \frac{1}{3} \right| < 1 \text{ donc } \sum_{j=0}^{+\infty} c_{i,j} = i - 2i \sum_{j=i+1}^{+\infty} 3^{i-j} \stackrel{k=j-i}{=} i - 2i \sum_{k=1}^{+\infty} 3^{-k} = i - 2i \frac{1/3}{1-1/3} = 0. \text{ On a donc } \boxed{\sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} c_{i,j} = 0}$$

$$2. c_{i,j} = 0 \text{ pour } i > j \text{ donc la somme est finie et } \sum_{i=0}^{+\infty} c_{i,j} = j - 2 \sum_{i=0}^{j-1} i 3^{i-j}. \text{ On pose alors } f(x) = \sum_{i=0}^{j-1} x^i = \frac{1-x^j}{1-x} \text{ pour } x \in]1, +\infty[\text{ et on remarque que } \sum_{i=0}^{+\infty} c_{i,j} = j - \frac{2}{3^{j-1}} f'(3) = j - \frac{2}{3^{j-1}} \frac{-j 3^{j-1} (1-3) + (1-3^j)}{(1-3)^2} = \boxed{\frac{3^j - 1}{2 \times 3^{j-1}}}$$

$$3. \frac{3^j - 1}{2 \times 3^{j-1}} \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \frac{3}{2} \text{ donc la série } \sum_{j \geq 0} \left(\sum_{i=0}^{+\infty} c_{i,j} \right) \text{ est grossièrement divergente.}$$

Partie III.A

$$1. P(X = n, Y = k) = P(Y = k | X = n) P(X = n) = e^{-n} \frac{n^k}{k!} p (1-p)^{n-1}$$

$$2. P(Y = 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n, Y = 0) = \frac{p}{e} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1-p}{e} \right)^{n-1} = \frac{p}{e} \times \frac{1}{1 - \frac{1-p}{e}} = \boxed{\frac{p}{e - 1 + p}}$$

$$\text{De même, } P(Y = k) = \frac{p}{(1-p)k!} \sum_{n=1}^{+\infty} n^k \left(\frac{1-p}{e} \right)^n = \boxed{\frac{p}{(1-p)k!} f_k \left(\frac{1-p}{e} \right)} \text{ car le terme } n = 0 \text{ est nul}$$

3. à 5. Pour les 3 questions qui suivent, on peut gagner du temps en passant par la fonction génératrice de Y : si $t \in [0, 1]$ (toutes les séries sont donc à termes positifs donc on va pouvoir appliquer Fubini)

$$\begin{aligned} G_Y(t) &= \frac{p}{e - 1 + p} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{p t^k}{(1-p)k!} f_k \left(\frac{1-p}{e} \right) = \frac{p}{e - 1 + p} + \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p (nt)^k}{(1-p)k!} \left(\frac{1-p}{e} \right)^n \\ &= \frac{p}{e - 1 + p} + \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{p (nt)^k}{(1-p)k!} \left(\frac{1-p}{e} \right)^n = \frac{p}{e - 1 + p} + \frac{p}{1-p} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1-p}{e} \right)^n \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(nt)^k}{k!} \\ &= \frac{p}{e - 1 + p} + \frac{p}{1-p} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1-p}{e} \right)^n [e^{nt} - 1] = \frac{p}{e - 1 + p} + \frac{p}{1-p} \sum_{n=1}^{+\infty} (1-p)^n e^{n(t-1)} - \frac{p}{1-p} \frac{\frac{1-p}{e}}{1 - \frac{1-p}{e}} \\ &= \frac{p}{1-p} \sum_{n=1}^{+\infty} (1-p)^n e^{n(t-1)} = \frac{p e^t}{e - (1-p)e^t} \end{aligned}$$

donc $\boxed{G_Y(t) = \frac{p}{e^{1-t} + (1-p)} \text{ si } t \in [0, 1]}$ (on aurait pu faire le même calcul avec $t \in]-1, 1[$ en vérifiant la sommabilité, ie le même calcul avec $|t|$ à la place de t)

$$\text{On en déduit } \boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} P(Y = k) = G_Y(1) = 1 \text{ puis } E(Y) = G'_Y(1) = \frac{1}{p} \text{ et } V(Y) = G''_Y(1) + E(Y) - E(Y)^2 = \frac{1}{p^2}}$$

Partie III.B

1. Comme $X_i(\Omega) = \{0, 1\}$, le nombre de piles est le nombre de fois où X_i prend la valeur 1 et $\boxed{A_n = (X_1 + \dots + X_{2n} = n)}$
 $X_1 + \dots + X_{2n}$ est une somme de $2n$ variables indépendantes suivant $\mathcal{B}(p)$ donc $X_1 + \dots + X_{2n} \sim \mathcal{B}(2n, p)$ et

$$\boxed{P(A_n) = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n}$$

2. Un événement ne pouvant se produire pour la première fois qu'une seule fois, les (B_n) sont deux à deux incompatibles.
3. On a $C = \bigcup_{n \geq 1} B_n$ donc C est une réunion dénombrable d'événement donc est aussi un événement. Par σ -additivité,

les B_n étant 2 à 2 incompatibles, on a
$$P(C) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(B_n)$$

4. On note B_∞ l'événement « on n'a jamais autant de piles que de faces » : $B_\infty = \overline{\bigcup_{n \geq 1} B_n}$ est donc bien un événement.

La famille $((B_n)_{n \geq 1}, B_\infty)$ est un SCE et on a donc $P(A_n) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(A_n | B_k) P(B_k) + P(A_n \cap B_\infty)$. On a $A_n \cap B_\infty = \emptyset$

et si $k > n$, $A_n \cap B_k = \emptyset$ donc il reste $P(A_n) = \sum_{k=1}^n P(A_n | B_k) P(B_k)$. Si B_k est réalisée, on peut considérer qu'on recommence le jeu à partir du lancer $2k + 1$ (on était à l'équilibre après le lancer $2k$); on sera donc à nouveau à l'équilibre après le lancer $2n$ avec la même probabilité que celle d'y être après $2n - 2k$ lancers. On a donc

$$P(A_n) = \sum_{k=1}^n P(A_{n-k}) P(B_k)$$

5. Comme $P(A_0) = P(\Omega) = 1$, on a $P(B_n) = P(A_n) - \sum_{k=1}^{n-1} P(A_{n-k}) P(B_k)$ et on va pouvoir déterminer la valeur de

$P(B_n)$ par récurrence forte sur n :

$B_1 = A_1$ donc $P(B_1) = P(A_1) = p(1-p)$ qui est bien le résultat attendu pour $n = 1$.

Si on suppose $P(B_k) = \frac{2}{k} \binom{2k-2}{k-1} p^k (1-p)^k$ pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ alors on a

$$\begin{aligned} P(B_n) &= \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n - \sum_{k=1}^{n-1} \binom{2n-2k}{n-k} p^{n-k} (1-p)^{n-k} \frac{2}{k} \binom{2k-2}{k-1} p^k (1-p)^k \\ &= \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n - 2p^n (1-p)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \binom{2n-2k}{n-k} \binom{2k-2}{k-1} \\ &\stackrel{k=h+1}{=} \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n - 2p^n (1-p)^n \sum_{h=0}^{n-2} \frac{1}{h+1} \binom{2n-2-2h}{n-1-h} \binom{2h}{h} \\ &\stackrel{I.3}{=} \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n - 2p^n (1-p)^n \left[\frac{1}{2} \binom{2n}{n} - \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} \right] \end{aligned}$$

donc
$$P(B_n) = \frac{2}{n} \binom{2n-2}{n-1} p^n (1-p)^n$$

6. On a $P(C) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(B_n) \stackrel{n=k+1}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{k+1} \binom{2k}{k} p^{k+1} (1-p)^{k+1}$ donc avec (I.2), pour $x = p(1-p) \in \left] 0, \frac{1}{4} \right[$, on a

$$P(C) = p(1-p) \times \frac{1 - \sqrt{1 - 4p(1-p)}}{p(1-p)} \text{ donc } P(C) = 1 - \sqrt{1 - 4p(1-p)}$$

7. Si $p = \frac{1}{2}$ alors $x = \frac{1}{4}$ donc on ne peut pas appliquer directement (I.2) donc on commence par vérifier que (I.2) est

encore valable en $x = \frac{1}{4}$ en vérifiant que $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^n}{n+1}$ est continue sur $\left[0, \frac{1}{4} \right]$:

H1 : $u_n = x \mapsto \binom{2n}{n} \frac{x^n}{n+1}$ est continue sur $\left[0, \frac{1}{4} \right]$

H2 : $\|u_n\|_\infty = \binom{2n}{n} \frac{4^{-n}}{n+1} \sim \frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} 2\sqrt{\pi n}}{\left(\frac{n}{e}\right)^{2n} 2\pi n} \times \frac{4^{-n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{\pi n^{3/2}}}$ donc $\sum u_n$ CVN sur $\left[0, \frac{1}{4} \right]$

S est donc continue sur $\left[0, \frac{1}{4} \right]$ et on a $P(C) = \frac{1}{4} S\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}^-} \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}$ donc $P(C) = 1$