PSI2 | **DM17** | pour le lundi 11 mars 2024

(d'après CCP PSI 2004 maths 1)

E_0 est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions f définies sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs réelles, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et vérifiant $f(0) = 0$.
E_1 est l'ensemble des fonctions f appartenant à E_0 et telles que la fonction $t \mapsto \left(\dfrac{f(t)}{t}\right)^2$ soit intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
On note, pour $f \in E_1$,

$$N_1(f) = \left[\int_0^{+\infty} \left(\frac{f(t)}{t}\right)^2 \mathrm{d}t\right]^{1/2}.$$

E_2 est l'ensemble des fonctions f appartenant à E_0 et telles que la fonction $t \mapsto (f'(t))^2$ soit intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
On note, pour $f \in E_2$,

$$N_2(f) = \left[\int_0^{+\infty} (f'(t))^2 \mathrm{d}t\right]^{1/2}.$$

Partie I - Exemple I

Dans cette partie, on suppose que f est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(t) = \arctan t$.

1. Montrer que f appartient à E_1.

2. Justifier que f appartient à E_2.

3. Calculer $N_2(f)$; on pourra utiliser le changement de variable $t = \tan\theta$ et se souvenir que $1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$.

4. Montrer que, pour $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $G_x : t \mapsto \dfrac{\arctan(xt)}{t(t^2+1)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

5. Calcul de $N_1(f)$

Pour $x \in \mathbb{R}_+$ on pose $\theta(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t(t^2+1)} \mathrm{d}t$.

a) À l'aide d'une intégration par parties, établir une relation entre $[N_1(f)]^2$ et $\theta(1)$.

On admet que la fonction θ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et que, pour tout $x \geqslant 0$, on a

$$\theta'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}$$

b) Déterminer, pour $x \neq 1$, deux réels a et b, dépendant de x, tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}^{+*}, \frac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)} = \frac{1}{1-x^2}\left(\frac{a}{1+t^2} + \frac{b}{1+x^2t^2}\right)$$

c) En déduire, pour $x \in \mathbb{R}^+$, une expression simple (donc sans symbole intégral) de $\theta(x)$.

d) Déterminer la valeur de $N_1(f)$ et celle de $\dfrac{N_1(f)}{N_2(f)}$.

Partie II - Exemple 2

Dans cette partie, on suppose que f est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(t) = \ln\left(t + \sqrt{t^2+1}\right).$$

1. Calculer $f'(t)$ pour $t \in \mathbb{R}_+$.
En déduire que f est élément de E_2. Quelle est la valeur de $N_2(f)$?

2. Déterminer un équivalent (simple !) de $f(t)$ lorsque $t \to 0^+$ (respectivement lorsque $t \to +\infty$).

3. Montrer que f appartient à E_1.

4. Calcul d'une intégrale.

a) Montrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{-\ln t}{1-t^2}$ est intégrable sur l'intervalle $]0,1[$.

On note désormais $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{-\ln t}{1-t^2} \mathrm{d}t$.

b) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto -t^{2k} \ln t$ est intégrable sur l'intervalle $]0,1[$; expliciter la valeur de $J_k = \displaystyle\int_0^1 \left(-t^{2k} \ln t\right) \mathrm{d}t$.

c) Justifier que, pour $t \in]0,1[$, on a

$$\frac{-\ln t}{1-t^2} = \sum_{k=0}^{n} \left(-t^{2k} \ln t\right) + t^{2n+1} \left(\frac{-t \ln t}{1-t^2}\right)$$

d) Montrer que la fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{-t \ln t}{1-t^2}$ se prolonge en une fonction continue sur le segment $[0,1]$.

En déduire qu'il existe une constante $C \geqslant 0$ telle que $\left| \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{-t \ln t}{1-t^2}\right) t^{2n+1} \mathrm{d}t \right| \leqslant \dfrac{C}{2n+2}$.

e) Déduire de ce qui précède que $J = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} J_k$, puis calculer J en sachant que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge et que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

5. Calcul de $N_1(f)$.

Pour simplifier on note $I = [N_1(f)]^2 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{f(t)}{t}\right)^2 \mathrm{d}t$.

On rappelle que $\operatorname{sh} u = \dfrac{e^u - e^{-u}}{2}$, $\operatorname{ch} u = \dfrac{e^u + e^{-u}}{2}$ pour $u \in \mathbb{R}$, et la relation $\operatorname{ch}^2 u - \operatorname{sh}^2 u = 1$.

a) Montrer que $I = 2 \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t\sqrt{t^2+1}} \mathrm{d}t$.

b) Après avoir calculé $f(\operatorname{sh} x)$ (avec $x \in \mathbb{R}$), justifier le changement de variable $t = \operatorname{sh}(u)$ dans l'intégrale obtenue dans la question II.5.a ; que devient I quand on effectue ce changement ?
Même question pour le changement de variable $v = e^{-u}$.

c) En déduire la valeur de $N_1(f)$, puis celle de $\dfrac{N_1(f)}{N_2(f)}$.

Partie III

Le but de cette partie est de comparer, d'une part les ensembles E_1 et E_2, d'autre part les fonctions N_1 et N_2.

1. Soit f une fonction quelconque appartenant à E_0 (donc de classe $\mathcal{C}^1$ et telle que $f(0) = 0$).

On associe à f deux fonctions g et h définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(t) = \dfrac{f(t)}{\sqrt{t}}$ et $h(t) = \dfrac{f(t)}{t}$ pour tout $t > 0$.

On pose $\alpha = f'(0)$.

a) Quelle est la limite de $h(t)$ (respectivement de $g(t)$) quand $t \to 0^+$?

b) Exprimer $f'(t) - \sqrt{t} g'(t)$ en fonction de $h(t)$ lorsque $t \in \mathbb{R}_+^*$.

c) Quelle est la limite de $\sqrt{t} g'(t)$ (respectivement de $g(t) \times g'(t)$) lorsque $t \to 0^+$?
(on exprimera les résultats en fonction de $\alpha = f'(0)$).

d) Établir, pour $x > 0$, la relation :

$$\int_0^x (f'(t))^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{2}(g(x))^2 + \int_0^x \left(\sqrt{t} g'(t)\right)^2 \mathrm{d}t + \frac{1}{4} \int_0^x (h(t))^2 \mathrm{d}t \qquad (R)$$

(après avoir justifié l'intégrabilité sur $]0,x]$ de chacune des fonctions qui interviennent).

2. Comparaison de E_1 et E_2.

a) Déduire de la relation (R) l'inclusion $E_2 \subset E_1$.

b) Les ensembles E_1 et E_2 sont-ils égaux ? (On pourra considérer la fonction $t \mapsto \sin t$)

3. Comparaison de N_1 et N_2.

a) Montrer que E_2 est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E_0.

b) Justifier l'inégalité $N_1(f) \leq 2N_2(f)$, pour $f \in E_2$.

c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit sur $\mathbb{R}_+$ la fonction f_n par $f_n(t) = e^{-t} \sin(nt)$.
Vérifier que $f_n \in E_2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et calculer $N_2(f_n)$.

d) Existe-t-il une constante $K \geqslant 0$ telle que $N_2(f) \leqslant K N_1(f)$ pour toute fonction f de E_2 ?

4. Soit f appartenant à E_2 ; en utilisant la relation (R) montrer que $g(t)$ admet une limite lorsque $t \to +\infty$; quelle est cette limite ?

Fin de l'énoncé