

Centrale-Supélec 2023, filière PSI, épreuve de Physique-Chimie 2

Corrigé proposé par JPh Caniparoli ; contact (erreurs, ...) : artefact.act@wanadoo.fr

I Le transformateur miniaturisé

I.A - les enroulements

Q 1.

$$R = \frac{L}{\gamma S}$$

Q 2.

- section : $S = 10 \mu\text{m} \times 3 \mu\text{m} = 30 \mu\text{m}^2$
- longueur : $L = 3 \times 100 \mu\text{m} + 2 \times 75 \mu\text{m} + 2 \times 50 \mu\text{m} + 25 \mu\text{m} = 575 \mu\text{m}$
- résistance :

$$R = \frac{575 \times 10^{-6}}{5,9 \times 10^7 \times 30 \times 10^{-12}} = 0,32 \Omega$$

La résistance électrique est la source de pertes par effet Joule, qui se traduisent par une chute ohmique dépendant de la charge pour une même tension d'alimentation, et par un échauffement du système.

Q 3. La rétroaction s'effectue sur la borne inverseuse, donc l'ALI fonctionne a priori en régime linéaire. Dans le modèle idéal de gain infini, $i_+ = i_- = 0$, et en régime linéaire, $v_- = v_+ = 0$, puisque la borne non-inverseuse est reliée à la masse. La loi des nœuds appliquée à la borne inverseuse s'écrit, en notation complexe

$$\frac{U_e}{Z} + \frac{U_s}{R_{\text{réf}}} = 0$$

soit

$$U_s = -\frac{R_{\text{réf}}}{Z} U_e$$

Q 4. On peut déduire $Z = -R_{\text{réf}} U_e / U_s$. La tension de sortie est en avance sur la tension d'entrée de $1,5 \times 200 \text{ ns} = 300 \text{ ns}$ sur le signal d'entrée, pour une période de $5 \times 200 \text{ ns} = 1 \mu\text{s}$, soit une avance de phase

$$\varphi_{s/e} = 360 \times \frac{300}{1000} \approx 108^\circ$$

Le rapport d'amplitudes vaut

$$\frac{U_e}{U_s} = \frac{3 \times 2 \times 10^{-3}}{2,6 \times 2} \approx 1,1 \times 10^{-3}$$

soit $|Z| = 1,1 \Omega$

pour les arguments, en tenant compte du signe

$$\varphi_{\underline{Z}} = \arg(\underline{Z}) = -\varphi(s/e) \pm 180^\circ \approx 72^\circ$$

soit

$$Z_r = |\underline{Z}| \cos \varphi_{\underline{Z}} = 1,1 \times \cos(72) = 0,34 \Omega ; Z_i = |\underline{Z}| \sin \varphi_{\underline{Z}} = 1,1 \times \sin(72) = 1,05 \Omega$$

On constate que la valeur de Z_i est proche de celle de R déterminée à la question 2, mais l'incertitude est élevée car $\varphi_{\underline{Z}}$ est proche de 90° , zone dans laquelle cosinus varie rapidement (pour un décalage de 280 ns, correspondant à une demi sous-graduation d'écart, on trouve $\varphi_{s/e} \approx 101^\circ$, soit $Z_r = 0,21 \Omega$).

On considère que Z_i est associé à l'inductance L , soit $Z_i = L\omega = 2\pi L/T$, avec $T = 1 \mu\text{s}$. Par conséquent

$$L = \frac{Z_i T}{2\pi} = 1,7 \times 10^{-7} \text{ H} = 0,17 \mu\text{H}$$

Q 5. L'augmentation de l'amplitude du signal d'entrée permet une détermination plus précise de celle-ci, car l'influence du bruit est diminuée.

Cependant, dans l'hypothèse d'un régime linéaire, comme l'amplitude du signal d'entrée est multipliée par 5, celle du signal de sortie, aussi, soit une amplitude théorique de $5 \times 5 = 25 \text{ V}$, supérieure à la tension de saturation usuelle d'un ALI (15 V) : le signal de sortie serait une sinusoïde d'amplitude 25 V écrêtée à $\pm 15 \text{ V}$, ne permettant pas la mesure de u_s .

Comme u_s est proportionnel à $R_{\text{réf}}$, il faut envisager de diminuer $R_{\text{réf}}$ pour garder $U_0 = 30 \text{ mV}$ en évitant la saturation en tension de l'ALI.

Q 6. L'oscillogramme fait apparaître une saturation à $\pm 2 \text{ V}$, qui n'est donc pas une saturation en tension, mais une saturation en courant de l'ALI.

D'après la relation $i_s = (u_s - u_-)/R'_{\text{réf}} = u_s/R'_{\text{réf}}$, on calcule

$$i_{s\text{max}} = \frac{u_{s, \text{max}}}{R'_{\text{réf}}} = \frac{2}{100} = 20 \text{ mA}$$

qui correspond à l'ordre de grandeur du courant maximal en sortie de l'ALI. Ceci confirme l'hypothèse de saturation en courant de l'ALI.

Q 7. Le système est équivalent à deux condensateurs en parallèle :

- l'un dont les armatures sont la face interne de l'enroulement extérieur (gris clair) et la face externe de l'enroulement intérieur
- l'autre dont les armatures sont la face interne de l'armature intérieure et la partie de la face externe de l'armature extérieure en vis à vis
- ces deux condensateurs sont en parallèle puisque chacune des faces interne et externe d'un enroulement est au même potentiel dans le cadre de l'ARQS.

Si on considère que les deux enroulements sont équidistants, la distance entre leurs lignes moyennes vaut la moitié de la distance entre la ligne moyenne de deux spires successives de l'enroulement extérieur, donnée en figure 1, soit $25/2 = 12,5 \mu\text{m}$

Cette distance est constituée de deux demi épaisseurs du matériau constituant les spires (10 μm sur la figure 1) et de la distance séparant les faces en regard des armatures, qui vaut donc

$$e = 2,5 \mu\text{m}$$

L'aire des armatures est égale à leur largeur (3 μm , figure 1b) fois leur longueur. On peut les estimer en considérant la longueur de la ligne moyenne de l'armature en gris foncé (on surestime l'une des longueurs et on sous-estime l'autre, ce qui conduit à une compensation partielle des erreurs)

- Pour le condensateur formé de la surface interne de l'enroulement extérieur et de la surface externe de l'enroulement intérieur, on peut l'estimer à $L_1 = (100 - 12,5) + 2 \times 75 + 2 \times 50 + 25 = 362,5 \mu\text{m}$;
- Pour le second, $L_2 = (100 - 12,5) + 2 \times 75 + 50 = 287,5 \mu\text{m}$

La capacité a pour ordre de grandeur

$$C_p = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{e} = \frac{8,85 \times 10^{-12} \times 5 \times 10^4 \times 3 \times 10^{-6} \times (362,5 + 287,5) \times 10^{-6}}{2,5 \times 10^{-6}} = 3,5 \times 10^{-10} \text{ F} = 0,35 \text{ nF}$$

En statique la valeur maximale de ϵ_r est de l'ordre de 4000. On se trouve ici largement au-dessus. Probablement une dépendance fréquentielle.

Q 8. La relation fonctionnelle du condensateur s'écrit, comme $u_2 = mu_1$

$$i = C_p \frac{d(u_1 - u_2)}{dt} = C_p(1 - m) \frac{du_1}{dt}$$

La loi des nœud s'écrit sur les deux entrées du transformateur, en notant i_p et i_s les intensités entrante au primaire et au secondaire

$$i_1 = i + I_p : i_2 = i_s - i$$

La loi de transformation des intensités $i_p = -mi_s$ et l'hypothèse $i_2 = 0$ conduisent aux relations

$$i_1 = i - mi_s = (1 - m)i$$

et finalement, en utilisant la relation du condensateur

$$i_1 = (1 - m)^2 C_p \frac{du_1}{dt}$$

Pour le transformateur idéal, en l'absence de capacité parasite, $i_1 = i_p = -mi_s = -mi_2 = 0$.

Q 9. La dérivée temporelle de u_1 est nulle sauf dans les périodes de variation de u_1 , pour lesquelles

$$\frac{du_1}{dt} = \frac{9}{0,06 \times 10^{-6}} = 1,5 \times 10^8 \text{ V} \cdot \text{s}^{-1}$$

soit, avec $m = 0,9$ et $C_p = 0,35 \text{ nF}$

$$i_{1, \text{max}} = 0,1^2 \times 3,5 \times 10^{-10} \times 1,5 \times 10^8 = 5,25 \times 10^{-4} \text{ A} = 0,525 \text{ mA}$$

Ce défaut n'entraîne pas directement de dissipation d'énergie dans le transformateur car le condensateur est un dipôle non dissipatif. Cependant il va introduire des déphasages entre tension et intensité, d'où une variation du facteur de puissance (mais celle-ci compense probablement partiellement les effets du facteur de puissance de type inductif associé aux inductances de fuite).

Ce défaut peut être la source de phénomènes de résonance, puisque le transformateur présente simultanément des inductances et une capacité.

Finalement ce défaut est plus important à haute fréquence puisque il est proportionnel à la dérivée temporelle de la tension d'entrée.

I.B - Le matériau magnétique

Q 10. Le moment cinétique de l'électron sur son orbite circulaire d'axe \vec{e}_z et sa norme ont pour expressions

$$\vec{\sigma}_e = m_e r \vec{e}_r \wedge r \omega \vec{e}_\theta = m_e r^2 \omega \vec{e}_z ; \sigma_e = m_e r^2 \omega = \hbar$$

Le moment magnétique et sa norme ont pour expressions

$$\vec{\mu}_e = I \vec{S} = I \pi r^2 \vec{e}_z ; \mu_e = |I| \pi r^2$$

L'expression de l'intensité est obtenu en considérant la rotation de l'électron, qui passe en tout point de son orbite à la fréquence $f = \omega/(2\pi)$, d'où

$$I = \frac{-e}{T} = -fe = -\frac{\omega e}{2\pi}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \mu_e &= \frac{\omega e}{2\pi} \pi r^2 = \frac{e \omega r^2}{2} = \frac{e}{2m_e} \sigma_e = \frac{e \hbar}{2m_e} \\ \mu_e &= \frac{e \hbar}{2m_e} = 9,4 \times 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2 \end{aligned}$$

Q 11. L'aimantation est le moment magnétique par unité de volume. Si tous les moments magnétiques sont alignés, l'aimantation vaut, en notant δN le nombre d'atomes dans le volume mésoscopique δV et n la densité volumique d'atomes

$$\begin{aligned} M_{\text{sat}} &= \frac{\delta N z \mu_e}{\delta V} = n z \mu_e = \left(\frac{\rho_{\text{Fe}} \mathcal{N}_a}{\mathcal{M}_{\text{Fe}}} \right) z \mu_e \\ M_{\text{sat}} &= \frac{7,87 \times 10^3 \times 6,02 \times 10^{23} \times 4 \times 9,4 \times 10^{-24}}{55,8 \times 10^{-3}} = 3,19 \times 10^6 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1} \end{aligned}$$

Q 12. En supposant l'aimantation uniforme sur le cube côté a

$$m_a = M_{\text{sat}} a^3 = 3,19 \times 10^6 \times (150 \times 10^{-6})^3 = 1,08 \times 10^{-5} \text{ A} \cdot \text{m}^2$$

En considérant une boucle circulaire de diamètre $d = a$:

$$m_a = \frac{I \pi a^2}{4} ; I = \frac{4m_a}{\pi a^2} = \frac{4M_{\text{sat}} a}{\pi} = 610 \text{ A}$$

On peut imaginer que ce phénomène d'origine microscopique donne des conséquences à l'échelle macroscopique.

Q 13. En suivant l'énoncé (les lignes de champ adoptent la symétrie de révolution du tore), on suppose que les propriétés d'invariance et de symétrie du tore peuvent être utilisées, indépendamment de la répartition non-uniforme des spires

La conservation du flux impose à valeur moyenne sur chaque section du champ magnétique d'être uniforme le long du tore car la section S_t est uniforme. L'uniformité sur les sections du tore n'est approximativement réalisée que si le rayon de la section du tore est petit devant le rayon de la ligne moyenne du tore (approximation filiforme).

Q 14. Comme les lignes de champ sont des cercles d'axe l'axe du tore, les champs \vec{H} et \vec{B} sont orthoradiaux : $\vec{H} = H \vec{e}_\theta$, $\vec{B} = B \vec{e}_\theta$.

Q 15. On oriente les spires de sorte que leur normale orientée soit de même sens que le vecteur orthoradial.

Le théorème d'Ampère pour les matériaux appliqué à la ligne de champ moyenne s'écrit, compte tenu de l'uniformité des normes des champs

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = H \ell_t = I_{\text{enlacé}} = N_t i$$

La relation constitutive du matériau $\vec{B} = \mu_0 \mu_r H$ conduit alors aux expressions

$$H = \frac{N_t i}{\ell_t} ; B = \frac{\mu_0 \mu_r N_t i}{\ell_t}$$

Q 16. L'uniformité du champ magnétique sur les sections du tore permet d'écrire le flux sur chaque section

$$\phi_c = B S_t = \frac{\mu_0 \mu_r S_t N_t i}{\ell_t}$$

soit pour l'ensemble du bobinage

$$\phi = N_t \phi_c = \frac{\mu_0 \mu_r S_t N_t^2 i}{\ell_t}$$

La relation de Faraday s'écrit, en notant que les orientations relatives de u et i correspondent à la convention récepteur :

$$u = -e = \frac{d\phi}{dt} = \frac{\mu_0 \mu_r S_t N_t^2}{\ell_t} \frac{di}{dt}$$

En régime sinusoïdal à la pulsation $\omega = 2\pi f_0$ et en notation complexe

$$\underline{u} = \frac{\mu_0 \mu_r S_t N_t^2}{\ell_t} j(2\pi f_0) \underline{i}$$

soit

$$\underline{Z} = j \frac{2\pi \mu_0 \mu_r f_0 S_t N_t^2}{\ell_t}$$

Dans ce modèle aucun phénomène dissipatif n'a été intégré, donc il n'y a pas de dissipation d'énergie dans le matériau modélisé idéalement. Ceci se retrouve dans l'expression de \underline{Z} qui est imaginaire pur.

Q 17. La puissance moyenne consommée a pour expression

$$P_c = \Re(\underline{Z}) I_{\text{eff}}^2$$

Or d'après la question précédente, adaptée à une perméabilité complexe

$$\underline{Z} = j \frac{2\pi \mu_0 \underline{\mu}_r f_0 S_t N_t^2}{\ell_t} = j \frac{2\pi \mu_0 (\mu_r' - j\mu_r'') f_0 S_t N_t^2}{\ell_t} = \frac{2\pi \mu_0 (j\mu_r' + \mu_r'') f_0 S_t N_t^2}{\ell_t}$$

d'où

$$P_c = \frac{2\pi \mu_0 \mu_r'' f_0 S_t N_t^2}{\ell_t} I_{\text{eff}}^2$$

Q 18. En notation complexe

$$\underline{B} = \mu_0 \underline{\mu_r} \underline{H}$$

Si d'autre part l'intensité dans la bobine varie sinusoidalement à la pulsation ω avec une intensité maximale I_{\max} , H et B s'écrivent en notation complexe, en choisissant l'origine des temps de manière à ce que le déphasage à l'origine de H soit nul

$$\underline{H} = \frac{N_t}{\ell_t} I_{\max} \exp(j\omega t) ; \underline{B} = \mu_0 \frac{N_t}{\ell_t} I_{\max} \underline{\mu_r} \exp(j\omega t) = \mu_0 \frac{N_t}{\ell_t} I_{\max} |\underline{\mu_r}| \exp(j\omega t + \varphi_{B/H})$$

et en notation réelle

$$H(t) = \frac{N_t}{\ell_t} I_{\max} \cos(\omega t) ; B(t) = \mu_0 \frac{N_t}{\ell_t} I_{\max} |\underline{\mu_r}| \cos(\omega t + \varphi_{B/H})$$

Donc H et B oscillent à la pulsation ω , avec un déphasage $\varphi_{B/H} = \arg(\mu_r) = \arg(\mu_r' - j\mu_r'') : B$ présente un retard de phase compris entre 0 et $\pi/2$ sur H car μ_r' et μ_r'' sont positifs.

Mathématiquement il s'agit de l'équation paramétrique d'une ellipse comprise dans le rectangle centré sur l'origine, de côtés $2\frac{N_t}{\ell_t} I_{\max}$ selon l'axe des abscisses (H) et $\mu_0 \frac{N_t}{\ell_t} I_{\max} |\underline{\mu_r}|$ selon l'axe des ordonnées, de grand axe de pente positive, parcouru dans le sens trigonométrique (car B est en retard sur H)

Avec les données de l'énoncé :

$$H_{\max} = \frac{N_t}{\ell_t} I_{\max} = \frac{500 \times 12}{0,125} = 48\,000 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$B_{\max} = \mu_0 \frac{N_t}{\ell_t} I_{\max} |\underline{\mu_r}| = 4 \times \pi \times 10^{-7} \times 48\,000 \times \sqrt{10^3^2 + 4^2} = 60 \text{ T}$$

Ce dernier ordre de grandeur est irréaliste dans la mesure où l'ordre de grandeur du champ magnétique à partir desquels les matériaux saturent est de 1 à 10 T.

Le champ coercitif est obtenu lorsque le champ magnétique s'annule, soit la condition $\cos(\omega t + \varphi_{B/H}) = 0 : \omega t + \varphi_{B/H} = \pi/2[\pi]$, et alors $H = \pm H_c = H_{\max} \cos(\omega t) = \pm H_{\max} \sin(\varphi_{B/H})$

Le champ magnétique rémanent est obtenu à excitation nulle, soit $\cos(\omega t) = 0 : \omega t = \pi/2[\pi]$ et alors $B = \pm B_r = B_{\max} \cos(\omega t + \varphi_{B/H}) = \pm B_{\max} \sin(\varphi_{B/H})$

On calcule

$$\sin(\varphi_{B/H}) = -\frac{\mu_r''}{\sqrt{\mu_r'^2 + \mu_r''^2}} = \frac{-4}{\sqrt{1000^2 + 4^2}} \approx -4 \times 10^{-3}$$

soit finalement

$$H_c = H_{\max} \frac{\mu_r''}{\sqrt{\mu_r'^2 + \mu_r''^2}} = \frac{N_t I_{\max}}{\ell_t} \frac{\mu_r''}{\sqrt{\mu_r'^2 + \mu_r''^2}} = 1,9 \times 10^2 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$B_r = B_{\max} \frac{\mu_r''}{\sqrt{\mu_r'^2 + \mu_r''^2}} = \mu_0 \mu_r'' \frac{N_t}{\ell_t} I_{\max} = 0,24 \text{ T}$$

Q 19.

$$P_c = \frac{2\pi \mu_0 \mu_r'' f_0 S_t N_t^2}{\ell_t} I_{\text{eff}}^2 = \frac{8 \times \pi^2 \times 10^{-7} \times 4 \times 50 \times 0,6 \times 10^{-4} \times 500^2 \times 12^2}{0,125} = 27 \text{ W}$$

Il s'agit de pertes fer. Elles ont deux origines :

- les pertes par hystérésis, associées au caractère irréversible des variations d'aimantation ;
- les pertes par courant de Foucault, pertes par effet Joule associées aux courants induits dans le noyau ferromagnétique, dépendant de sa conductivité.

L'énoncé ne précise pas si la valeur de μ_r' est déterminée à 50 Hz, ce qui ne permet pas de distinguer les deux types de pertes, dont le comportement fréquentiel est différent (les pertes par courants de Foucault varient comme le carré de la fréquence, contrairement aux pertes par hystérésis).

II Le transformateur piézoélectrique

II.A - L'effet piézoélectrique

Q 20. D'après le schéma 7b, les charges positives se déplacent globalement vers le haut, les charges négatives vers le bas, donc la face inférieure se charge négativement.

En l'absence d'indication, on suppose que seules des charges surfaciques apparaissent, la charge volumique restant nulle. Le champ total est la superposition des champs créés par l'armature inférieure (charge surfacique $\sigma < 0$) et par l'armature supérieure (charge surfacique $-\sigma$, pour respecter la neutralité du système global).

- Pour le plan inférieur ($z = 0$), il y a invariance par translations selon les directions x et y , donc les composantes des champs ne dépendent que de la variable z .
- Le potentiel $V_{\text{inf}}(z)$ ne dépend que de z , d'où

$$\vec{E}_{\text{inf}} = -\overrightarrow{\text{grad}} V(z) = \frac{dV}{dz} \vec{e}_z = E_{\text{inf}}(z) \vec{e}_z$$

- Le plan inférieur est plan de symétrie, donc les champs électriques en deux points symétriques sont symétriques, soit comme les champs sont colinéaires à \vec{e}_z : $E_{\text{inf}}(-z) = -E_{\text{inf}}(z)$
- L'application du théorème de Gauss au tube de champ compris entre $-z$ et $z > 0$, de section S donne

$$\oiint \vec{E}_{\text{inf}} \cdot d\vec{S}_{\text{sortant}} = E_{\text{inf}}(z)S - E_{\text{inf}}(-z)S = 2E_{\text{inf}}(z)S = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{\sigma S}{\epsilon_0 \epsilon_r}$$

d'où

$$\vec{E}_{\text{inf}}(z < 0) = \frac{-\sigma}{2\epsilon_0 \epsilon_r} \vec{e}_z ; \vec{E}_{\text{inf}}(z > 0) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0 \epsilon_r} \vec{e}_z$$

- Le raisonnement pour le plan supérieur ($z = d$) est identique, en remplaçant σ par $-\sigma$:

$$\vec{E}_{\text{sup}}(z < d) = -\frac{-\sigma}{2\epsilon_0 \epsilon_r} \vec{e}_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0 \epsilon_r} \vec{e}_z ; \vec{E}_{\text{sup}}(z > d) = \frac{-\sigma}{2\epsilon_0 \epsilon_r} \vec{e}_z$$

- Le principe de superposition donne enfin entre les deux faces ($0 < z < d$)

$$\vec{E} = \vec{E}_{\text{inf}}(z > 0) + \vec{E}_{\text{sup}}(z < d) = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r} \vec{e}_z$$

Q 21. Dans les deux cas la tension est identique. Dans le système à deux couches cette tension est appliquée sur une distance deux fois moindre. Comme le champ est uniforme, on peut écrire l'expression de la tension pour les systèmes à une et à deux couches :

$$U = \int \vec{E}_{\text{ext}} \cdot d\vec{l} = E_{\text{ext}} d = E_2 \frac{d}{2}$$

soit

$$\vec{E}_2 = 2\vec{E}_{\text{ext}}$$

Dans le cas de N couches, la même tension est appliquée sur une distance d/N , d'où

$$\vec{E}_N = N\vec{E}_{\text{ext}}$$

En effectuant explicitement l'intégration

$$\vec{E}_N = N\vec{E}_{\text{ext}} = N \frac{U}{d} (-\vec{e}_z)$$

Pour une même tension imposée, le champ est N fois plus élevé, ce qui conduit à une déformation N fois plus importante.

II.B - Propagation de la déformation

L'énoncé n'est absolument pas clair : dans la partie IIA, une déformation perpendiculaire aux armatures conduit à un champ dans la même direction, et inversement. Dans la partie IIB, il semble que le champ et la déformation sont perpendiculaires (champ selon \vec{e}_z , déformation selon \vec{e}_x), mais on réutilise les résultats de la partie IIA sur le système à N couches, sans relier explicitement ces effets.

Q 22. En admettant que l'on puisse directement transposer les résultats de la partie IIA :

— pour le primaire à N couches, $E_p = NU_p/d$, d'où une déformation en largeur

$$\delta = \beta E_z = \beta NU_p/d$$

— au secondaire l'effet piézoélectrique inverse impose

$$E_z = \delta/\beta = NU_p/d$$

Comme le secondaire est constitué d'une couche unique, on en déduit

$$U_s = dE_z = NU_p$$

Le résultat précédent ne fait aucune référence à l'aspect variable ou non du champ électrique, donc ce transformateur peut fonctionner en régime stationnaire, contrairement au transformateur électromagnétique

Q 23. Le rapport F/S homogène à une pression s'exprime en Pa, ξ et x sont des longueurs, donc la dérivée $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ est sans dimension, donc la constante K est homogène à une pression et s'exprime en Pa.

La partie grisée exerce sur la partie située au-delà de $x + dx$ la force $\vec{F}_-(x + dx, t)$, donc d'après la loi de l'action et de la réaction la partie située au-delà de $x + dx$ exerce sur le système la force

$$\vec{F}_+(x + dx, t) = -\vec{F}_-(x + dx, t) = SK \frac{\partial \xi}{\partial x}(x + dx, t) \vec{u}_x$$

La force résultante sur le système a pour expression

$$\vec{F}_r = \vec{F}_-(x, t) + \vec{F}_+(x + dx, t) = KS \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}(x + dx, t) - \frac{\partial \xi}{\partial x}(x, t) \right) \vec{u}_x$$

soit en se limitant à l'ordre 1

$$\vec{F}_r = KS \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right) dx \vec{u}_x = KS \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx \vec{u}_x$$

Q 24. Le principe fondamental de la dynamique appliqué à la tranche comprise entre x et $x + dx$ s'écrit

$$dm \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right) \vec{u}_x = d\vec{F}_r = KS \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx \vec{u}_x$$

La masse de la tranche vaut $dm = \rho dV = \rho S dx$, soit, en projection sur l'axe \vec{u}_x

$$\rho S dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = KS \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx$$

et après simplification

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\rho}{K} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

Il s'agit de l'équation de d'Alembert, la célérité des ondes associée a pour expression

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$$

Q 25. Les conditions aux limites sont :

— en $x = 0$ le déplacement imposé $\xi(0, t) = \xi_0 \cos(\omega t)$ soit en notation complexe :

$$\underline{\xi}(0, t) = \xi_0 \exp(j\omega t) = (\underline{A} + \underline{B}) \exp(j\omega t)$$

d'où, après simplification de l'exponentielle complexe :

$$\xi_0 = \underline{A} + \underline{B}$$

— en $x = L$ la condition d'extrémité libre, qui se traduit par la nullité de la force $\vec{F}_-(L, t) = -SK \left(\frac{\partial x_i}{\partial x} \right) (L, t) \vec{u}_x$, soit en notation complexe :

$$0 = -SKjk (-\underline{A} \exp(j(\omega t - kL)) + \underline{B} \exp(j(\omega t + kL)))$$

soit après simplification par $SKjk \exp(j\omega t)$

$$-\exp(-jkL)\underline{A} + \exp(jkL)\underline{B} = 0 : \underline{B} = \exp(-2jkL)\underline{A}$$

\underline{A} et \underline{B} vérifient système linéaire des deux équations à deux inconnues précédent. En reportant l'expression de \underline{B} en fonction de \underline{A} précédente dans la première équation, on trouve

$$\underline{A} = \frac{\xi_0}{1 + \exp(-2jkL)} ; \underline{B} = \frac{\xi_0}{1 + \exp(-2jkL)} \exp(-2jkL)$$

d'où l'expression du champ de déformation (en séparant parties temporelle et spatiale des exponentielles) :

$$\xi_p(x, t) = \frac{\xi_0}{1 + \exp(-2jkL)} \exp(j\omega t) (\exp(-jkx) + \exp(-jk(2L - x)))$$

$$\xi_p(x, t) = \frac{\xi_0}{D} \exp(j\omega t) (\exp(-jkx) + \exp(-jk(2L - x)))$$

qui s'identifie à l'expression de l'énoncé, où

$$D = 1 + \exp(-2jkL)$$

le premier terme correspond à une onde progressive selon les x croissants, le second à une onde progressive selon les x décroissants. Le second terme peut être interprété comme l'onde réfléchi en $x = L$ associée au premier terme (onde incidente). En $x = L$ les deux ondes sont égales, donc l'onde de déplacement se réfléchit sans changement de signe, ce qui correspond à un déphasage nul.

Q 26. L'onde résultante est une onde stationnaire (l'extrémité est un nœud de vibration pour la force) dont l'amplitude est proportionnelle à $x i_0 / D$. On en déduit la présence de résonances si D s'annule, soit la condition de résonance $1 + \exp(-2jkL) = 0$, qui conduit à la relation $2kL = \pi[2\pi]$, soit en utilisant la relation $f = \omega / (2\pi) = kc / (2\pi)$, l'expression des fréquences de résonance :

$$f = \frac{c}{4L} \left[\frac{c}{2L} \right] ; f_n = \left(n - \frac{1}{2} \right) \frac{c}{2L}$$

où n est un entier positif non nul.

La fréquence de résonance minimale s'écrit

$$f_0 = f_1 = \frac{c}{4L} = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \frac{1}{4L} = \sqrt{\frac{2 \times 10^{11}}{7,8 \times 10^3}} \frac{1}{4 \times 2 \times 10^{-2}} = 63,3 \text{ kHz}$$

La divergence de l'amplitude peut conduire physiquement à la rupture du matériau, donc à sa destruction.

Q 27. En présence de la force supplémentaire, la seconde loi de Newton pour une tranche d'épaisseur dx s'écrit :

$$dm \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \vec{u}_x = KS \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx \vec{u}_x - \frac{1}{\tau} \frac{\partial \xi}{\partial t} dm \vec{u}_x$$

puis après simplification

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= \frac{K}{\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{\tau} \frac{\partial \xi}{\partial t} \\ c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial \xi}{\partial t} \end{aligned}$$

Q 28. On reporte la solution en onde plane harmonique dans l'équation précédente, pour obtenir la relation de dispersion :

$$-c^2 \underline{k}^2 = -\omega^2 + \frac{j\omega}{\tau}$$

En séparant partie réelle et imaginaire $\underline{k} = k' + jk''$, soit $\underline{k}^2 = k'^2 - k''^2 + 2jk'k'' \approx k'^2 + 2jk'k''$ (dans l'approximation $k' \ll k''$) :

$$k'^2 = \frac{\omega^2}{c^2} ; 2k'k'' = \frac{-\omega}{\tau c^2}$$

Pour la solution $k' = \omega/c$ (onde se propageant selon les x croissants, la partie imaginaire a pour expression

$$k'' = -\frac{1}{2\tau c}$$

Q 29. La relation $k' = \omega/c$ est inchangée, donc les valeurs de k' étant imposées par les conditions aux limites, le phénomène de dissipation ne modifie pas les fréquences de résonance.

Du fait de la dissipation d'énergie les amplitudes aux fréquences de résonance sont finies (plus de divergence).

Q 30. D'après le graphe a) la puissance de sortie est maximale ($P_s = 4,5 \text{ mW}$) lorsque $\log(R_c) = 1,7$, soit $R_c = 50 \text{ k}\Omega$. Pour cette valeur, le rendement vaut approximativement $\eta = 0,16$, soit une puissance d'entrée $P_e = P_s/\eta \approx 28 \text{ mW}$, du même ordre de grandeur, mais inférieure à la valeur déduite des tensions et intensités efficaces en entrée (20 V et $2,2 \text{ mA}$, soit un produit égal à 44 VA : les deux grandeurs sont vraisemblablement déphasées en entrée).

$$P_e = 28 \text{ mW} ; P_s = 4,5 \text{ mW} ; P_{\text{perdue}} = 23,5 \text{ mW}$$

On constate que les pertes sont importantes.

La tension efficace en sortie vaut $U_s = 15 \text{ V}$ pour une résistance de charge $R_c = 50 \text{ k}\Omega$, soit une puissance en sortie calculée

$$P'_s = \frac{U_s^2}{R_c} = 4,5 \text{ mW}$$

en accord avec la valeur donnée par le graphique a).

III Mesures de champ magnétique avec un capteur Fluxgate

Q 31. On suppose, comme dans le modèle du solénoïde infini, que le champ et l'excitation magnétique sont nuls hors du noyau.

- dans l'hypothèse où les effets de bord sont négligés, tout plan de section droite est plan de symétrie de la distribution de courant, donc l'excitation et le champ magnétiques en tout point, perpendiculaires au plan de section droite sont dirigés par Oz : $\vec{H} = H\vec{u}_z$, $\vec{B} = B\vec{u}_z$;
- le système est invariant par rotation autour de l'axe Oz , et dans l'hypothèse où les effets de bord sont négligés par translation le long de cet axe : en coordonnées cylindriques d'axe Oz , $\vec{H} = H(r)\vec{u}_z$, $\vec{B} = B(r)\vec{u}_z$, en accord avec l'hypothèse d'un champ uniforme dans le barreau.
- le théorème d'Ampère dans les milieux appliqué à un rectangle dont deux des côtés de longueur ℓ sont colinéaires à Oz , l'un à l'intérieur, l'autre à l'extérieur ($\vec{H} = 0$), les deux autres perpendiculaires à Oz ($\vec{H} \cdot d\vec{\ell} = 0$) s'écrit

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = H\ell = nI_e\ell$$

Par conséquent l'excitation magnétique dans le noyau a pour expression :

$$\vec{H} = nI_e\vec{u}_z$$

Q 32. Pour un milieu linéaire, $\vec{B} = \mu_0\mu_r\vec{H}$:

$$\vec{B} = \mu_0\mu_r nI_e\vec{u}_z$$

Ce champ est uniforme et colinéaire à l'axe des spires de la bobine de mesure : le flux magnétique à travers cette dernière a pour expression

$$\phi = N_f B S = N_f \mu_0 \mu_r n I_e(t) \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi \mu_0 \mu_r D^2 N_f n I_{0e} \cos(\omega t)}{4}$$

et d'après la loi de Faraday, la tension u_s à ses bornes a pour expression, dans le domaine de réponse linéaire :

$$u_s(t) = -\frac{d\phi}{dt} = \frac{\pi \mu_0 \mu_r D^2 N_f n \omega I_{0e} \sin(\omega t)}{4}$$

Q 33. En comportement linéaire ($-H_0 < H < H_0$), d'après la question précédente

$$u_s(t) = -\frac{d\phi}{dt} = \frac{\pi\mu_0\mu_r D^2 N_f n \omega I_{0e} \sin(\omega t)}{4}$$

En comportement saturé, $M = \pm M_{\text{sat}}$, soit $B = \mu_0(H \pm M_{\text{sat}})$. Par conséquent le flux à travers la bobine de mesure vaut

$$\phi = N_f B S = N_f \frac{\pi D^2}{4} \mu_0 (H \pm M_{\text{sat}}) = N_f \frac{\pi D^2}{4} \mu_0 (n I_{0e} \cos(\omega t) \pm M_{\text{sat}})$$

On en déduit l'expression de la tension aux bornes de la bobine de mesure en régime saturé

$$u_s(t) = \frac{\pi\mu_0 D^2 N_f n \omega I_{0e} \sin(\omega t)}{4}$$

Q 34. Comme $H(t) = nI_e(t) = nI_{0e} \cos(\omega t)$, avec $nI_{0e} = H_{\text{max}} = 2H_0$:

— le régime est linéaire pour $|H| \leq H_0$, soit $|\cos(\omega t)| \leq 1/2$, donc sur une période ($0 \leq t \leq T$), dans les intervalles de temps $[T/6, T/3]$ et $[2T/3, 5T/6]$, ou sur le graphique pour les intervalles de phase $[\pi/3, 2\pi/3]$ et $[4\pi/3, 5\pi/3]$. Dans ces domaines ($\mu_r \gg 1$)

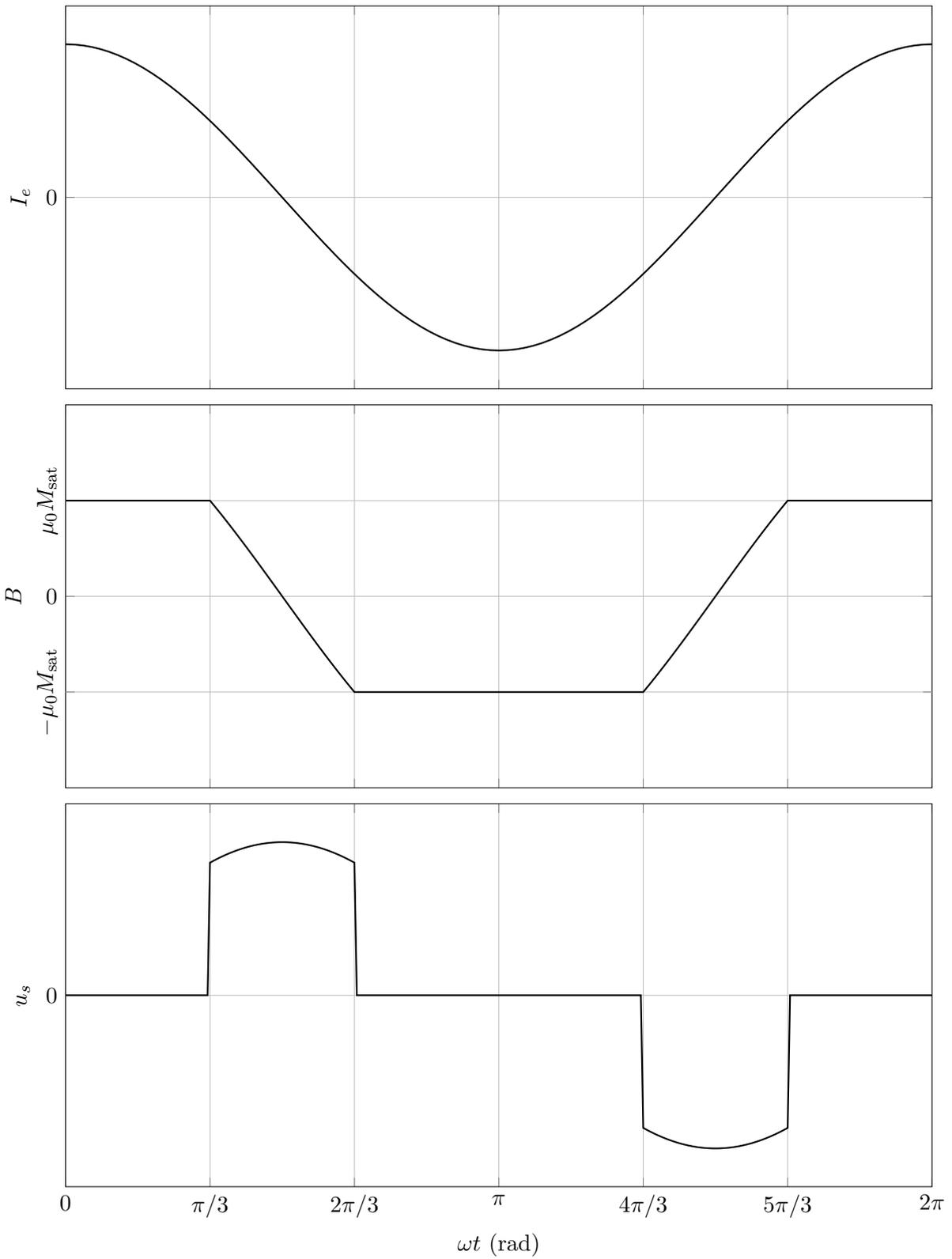
$$B = \mu_0\mu_r nI_e(t) = \mu_0\mu_r nI_{0e} \cos(\omega t) = 2\mu_0\mu_r H_0 \cos(\omega t) \approx 2\mu_0 M_{\text{sat}} \cos(\omega t)$$

$$u_s(t) = \frac{\pi\mu_0\mu_r D^2 N_f n \omega I_{0e} \sin(\omega t)}{4} = U_{s0} \sin(\omega t)$$

— dans le domaine saturé, en tenant compte de l'ordre de grandeur $\mu_r \gg 1$

$$B(t) = \mu_0(H \pm M_{\text{sat}}) = \mu_0(nI_e \pm (\mu_r - 1)H_0) \approx \pm\mu_0\mu_r H_0 \approx \mu_0 M_{\text{sat}}$$

$$u_s(t) = \frac{\pi\mu_0 D^2 N_f n \omega I_{0e} \sin(\omega t)}{4} = \frac{U_{s0} \sin(\omega t)}{\mu_r} \approx 0$$



Q 35. D'après le principe de superposition :

$$\vec{H} = \vec{H}_{\text{ext}} + \vec{H}_{\text{excitation}} = (H_{\text{ext}} + nI_e(t)) \vec{u}_z$$

soit, pour le même courant d'excitation que précédemment

$$H_{\text{ext}} - 2H_0 < H < H_{\text{ext}} + 2H_0$$

D'après le graphe de l'évolution de B , les saturations haute et basse sont atteintes, d'où les conditions :

$$H_{\text{ext}} - 2H_0 < -H_0 ; H_{\text{ext}} + 2H_0 > H_0$$

qui entraînent l'encadrement $-H_0 < H_{\text{ext}} < H_0$.

D'autre part on constate que l'intervalle de temps passé en saturation haute est plus important que l'intervalle de temps passé en saturation basse, donc que l'excitation totale, qui reste sinusoïdale, est positive en moyenne, soit $H_{\text{ext}} > 0$

Par conséquent l'excitation extérieure vérifie $0 < H_{\text{ext}} < H_0$ (proposition b)

Q 36. Si on considère le passage en saturation basse, qui se produit pour $\omega t \approx 5\pi/6$, on obtient la relation :

$$-H_0 = H_{\text{ext}} + 2H_0 \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = H_{\text{ext}} + \sqrt{3}H_0$$

soit

$$\frac{H_{\text{ext}}}{H_0} = \sqrt{3} - 1 = 0,73$$

Q 37. La comparaison des harmoniques pour les différentes valeurs montre que seule l'amplitude de l'harmonique de rang 2 (f_2) permet la mesure de H_{ext} :

- les harmoniques de rang 1 et 3 sont très peu sensibles à la présence de la composante continue H_{ext} ;
- la partie imaginaire de l'harmonique de rang 5 est sensible à H_{ext} mais ne permet pas la détermination de son signe ;
- l'harmonique de rang 4 est d'amplitude très faible.

On constate en outre que l'amplitude de l'harmonique de rang 2 est approximativement proportionnelle à H_{ext} , permettant ainsi la détermination de sa valeur et de son signe.

Q 38. L'énoncé est très imprécis pour cette question et la suivante :

- le champ extérieur est noté H_{ext} , sans préciser s'il s'agit du seul champ extérieur imposé, où s'il s'agit du champ d'excitation total, incluant le champ créé par le bobinage excitateur
- il n'est pas précisé si l'aimantation \vec{M} représente l'aimantation avant correction de l'excitation, où en tenant compte de cette correction.

En supposant que $\vec{M} = M\vec{u}_z$ représente l'aimantation tenant compte de la correction :

$$H_r = H_{\text{ext}} - 4\pi\alpha M = H_{\text{ext}} - 4\pi\alpha(\mu_r - 1)H_r$$

soit

$$H_r = \frac{H_{\text{ext}}}{1 + 4\pi\alpha(\mu_r - 1)}$$

puis comme l'extérieur du barreau est assimilé au vide :

$$H_r = \frac{B_{\text{ext}}}{\mu_0(1 + 4\pi\alpha(\mu_r - 1))}$$

Q 39. Ici encore, en l'absence d'indication, il faut faire des hypothèses.

- la longueur finie du cylindre doit jouer également sur le champ créé par le bobinage d'excitation, d'une manière différente de celle vue à la question précédente (la géométrie des champs n'est approximativement identique que dans le cylindre). On suppose que cet effet est négligeable, et que les résultats de la question 31 restent applicables (question de feeling : la correction est donnée à partir de H_{ext} qui désigne le champ d'excitation extérieur à mesurer, indépendant de l'excitation générée par le bobinage d'excitation).

Dans cette hypothèse, $H_{\text{excitation}} = nI_e$, d'où un bruit du champ d'excitation $H_b = ni_b$.

- Le champ magnétique extérieur B_{ext} génère l'excitation $H_r = \frac{B_{\text{ext}}}{\mu_0(1 + 4\pi\alpha(\mu_r - 1))}$ dans le cylindre.
- La condition de détection s'écrit $H_r > 0,1H_b$, soit

$$\frac{B_{\text{ext}}}{\mu_0(1 + 4\pi\alpha(\mu_r - 1))} > 0,1ni_b$$

d'où

$$B_{\text{ext}} > B_{\text{min}} = 0,1\mu_0ni_b(1 + 4\pi\alpha(\mu_r - 1))$$

- D'après les données, $\eta = \ell/D = 13,0/2,25 = 5,78$, d'où $\alpha \approx 2 \times 10^{-3}$

$$B_{\text{min}} = 4 \times 10^{-8} \times \pi \times 646 \times 55 \times 10^{-9} \times (1 + 4 \times \pi \times 2 \times 10^{-3} \times 3999) = 4,5 \times 10^{-10} \text{ T} = 0,45 \text{ nT}$$