CCMP Physique 2 PC-PSI 2023

Planche à voile et vagues

Corrigé proposé par Nicolas Choimet
nicolas.choimet@live.fr

I. Etude de la planche à voile

I.A. Navigation par vent arrière

1 Manifestement, le modèle suppose la voile fixe (ce qui est pour le moins curieux). Si on adopte cette hypothèse (ce qui revient à supposer $v_\mathrm{v} \gg v_\mathrm{p}$), le nombre de molécules d'air entrant en collision avec la voile pendant τ est donné par :

$$N = nSv_\mathrm{v}\tau = \frac{\rho_\mathrm{a} S v_\mathrm{v} \tau}{m}$$

2 Puisque les molécules cèdent intégralement leur quantité de mouvement à la voile, la variation de quantité de mouvement d'une molécule lors d'un choc vaut :

$$\Delta\vec{p}_\mathrm{mol\acute{e}c} = -m v_\mathrm{v} \hat{e}_x$$

On en déduit, par conservation de la quantité de mouvement :

$$\Delta\vec{p}_\mathrm{voile} = -\Delta\vec{p}_\mathrm{mol\acute{e}c} = m v_\mathrm{v} \hat{e}_x$$

Puisque le choc dure un temps τ, la force subie par la voile du faut d'une collision est donc donnée par :

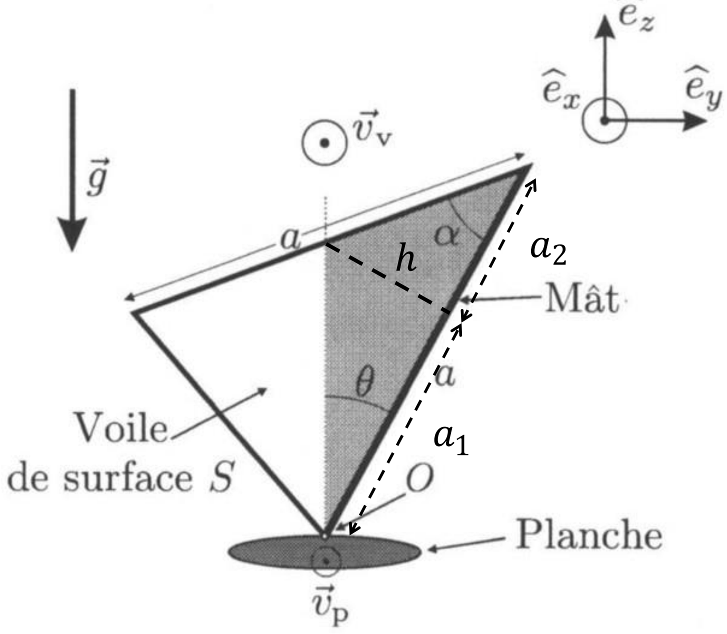
$$\vec{f} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}_\mathrm{voile}}{\mathrm{d}t} = \frac{\Delta\vec{p}_\mathrm{voile}}{\tau} = \frac{m v_\mathrm{v} \hat{e}_x}{\tau}$$

3 Puisque N molécules transfèrent leur quantité de mouvement à la voile pendant le temps de collision τ, on en déduit que la force propulsive vaut :

$$\vec{F} = N\vec{f} = \rho_\mathrm{a} S v_\mathrm{v}^2 \hat{e}_x$$

4 La surface d'un triangle est donnée par le produit de sa base b par sa hauteur h divisé par 2. Par conséquent :

$$S = \frac{bh}{2} = \frac{2a\sin(\alpha/2) \times a\cos(\alpha/2)}{2} = \frac{a^2 \sin\alpha}{2}$$



La hauteur du triangle définissant la surface S' est donnée par :

$$h = a_1 \tan\theta = a_2 \tan\alpha$$

Or, $a = a_1 + a_2$. On en déduit :

$$h = \frac{a}{1/\tan\theta + 1/\tan\alpha}$$

Par conséquent :

$$S' = \frac{a^2}{2/\tan\theta + 2/\tan\alpha}$$

L'angle θ_d est défini par $S' = S/2$. Par conséquent :

$$\frac{1}{1/\tan\theta_\mathrm{d} + 1/\tan\alpha} = \frac{\sin\alpha}{2}$$

soit :

$$\frac{1}{\tan\theta_\mathrm{d}} = \frac{2}{\sin\alpha} - \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{2-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

On obtient finalement :

$$\tan\theta_\mathrm{d} = \frac{\sin\alpha}{2-\cos\alpha}$$

Numériquement, on trouve :

$$\tan\theta_\mathrm{d} = \frac{\sqrt{3}/2}{2-1/2} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2}$$

On en déduit que

$$\theta_{\mathrm{d}} = 30°$$

5 La vitesse du vent apparent est donnée par :

$$\vec{v}_{\mathrm{va}} = \vec{v}_{\mathrm{v}} - \vec{v}_{\mathrm{p}} = (v_{\mathrm{v}} - v_{\mathrm{p}})\hat{e}_x$$

6 Lorsque la planche se déplace à vitesse constante,

$$\vec{F}_{\mathrm{pro}} + \vec{F}_{\mathrm{rés}} = \vec{0}$$

On en déduit :

$$\frac{1}{2}\rho_{\mathrm{e}} C_{\mathrm{p}} S_{\mathrm{p}} v_{\mathrm{p}}^2 = \frac{1}{2}\rho_{\mathrm{a}} C_{\mathrm{v}} S (v_{\mathrm{v}} - v_{\mathrm{p}})^2$$

Par conséquent :

$$(v_{\mathrm{p}} - v_{\mathrm{v}})^2 - \sigma^2 v_{\mathrm{p}}^2 = \big((1-\sigma)v_{\mathrm{p}} - v_{\mathrm{v}}\big)\big((1+\sigma)v_{\mathrm{p}} - v_{\mathrm{v}}\big) = 0$$

On obtient donc deux racines :

$$v_{\mathrm{p}}^{\pm} = \frac{v_{\mathrm{v}}}{1 \pm \sigma}$$

Même si l'on ne dispose d'aucune donnée numérique sur les surfaces et les coefficients C_{v} et C_{p}, le rapport $\rho_{\mathrm{e}}/\rho_{\mathrm{a}}$ des masses volumiques, de l'ordre de 1000 impose certainement $\sigma > 1$. Or, la vitesse de la planche est nécessairement dans le même sens que la vitesse du vent. Par conséquent, seule la solution suivante est acceptable :

$$v_{\mathrm{p}} = \frac{v_{\mathrm{v}}}{1+\sigma} < v_{\mathrm{v}}$$

On en déduit que la planche ne peut aller plus vite que le vent.

I.B. Navigation « au près »

7 La norme au carré de la vitesse du vent apparent s'écrit :

$$v_{\mathrm{va}}^2 = \|\vec{v}_{\mathrm{v}} - \vec{v}_{\mathrm{p}}\|^2 = v_{\mathrm{v}}^2 + v_{\mathrm{p}}^2 - 2\vec{v}_{\mathrm{v}} \cdot \vec{v}_{\mathrm{p}} = v_{\mathrm{v}}^2 + v_{\mathrm{p}}^2 + 2 v_{\mathrm{v}} v_{\mathrm{p}} \underbrace{\cos\beta_0}_{>0} > v_{\mathrm{v}}^2$$

Par conséquent :

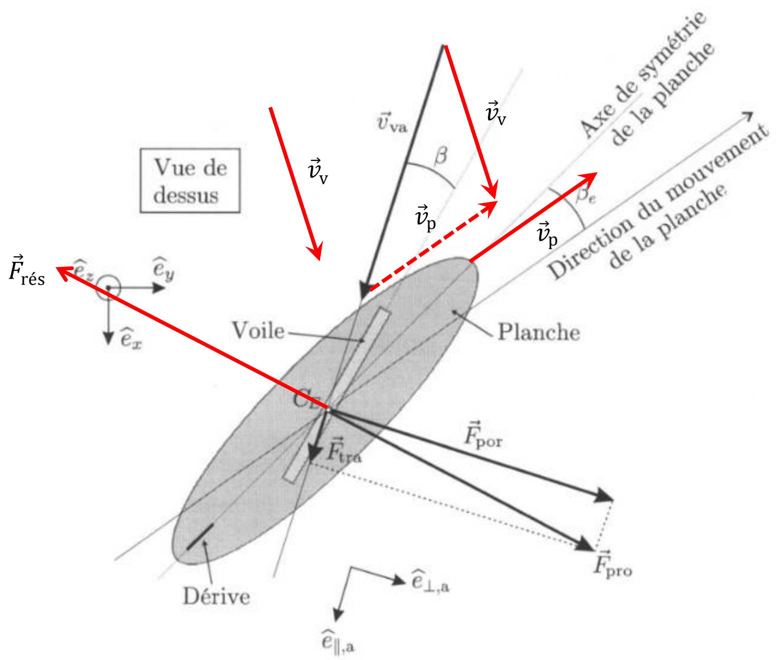
$$v_{\mathrm{va}} > v_{\mathrm{v}}$$

8 La planche est en mouvement rectiligne et uniforme. Par conséquent :

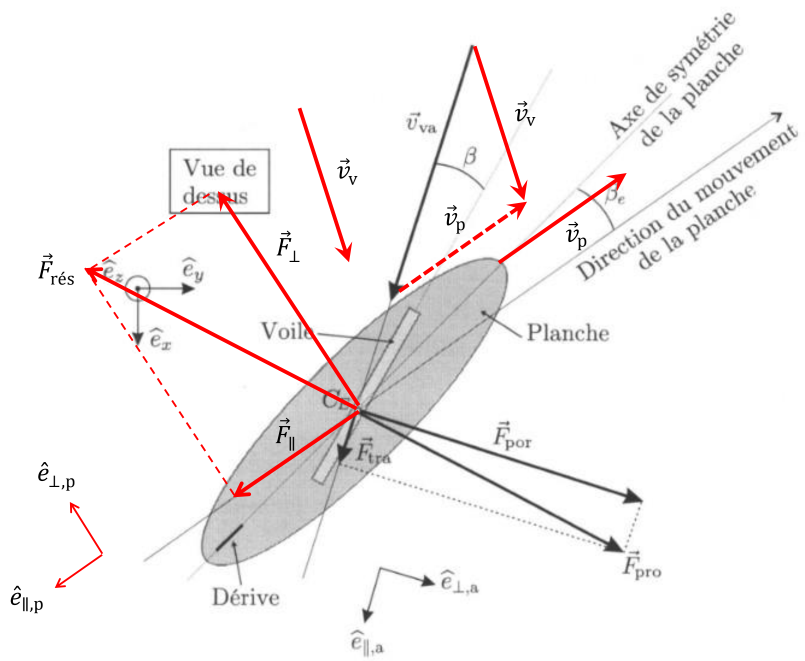
$$\vec{F}_{\mathrm{pro}} + \vec{F}_{\mathrm{rés}} = \vec{0}$$

On en déduit :

$$\|\vec{F}_{\mathrm{pro}}\| = \|\vec{F}_{\mathrm{rés}}\|$$



9 On peut compléter la figure précédente pour faire apparaître les composantes $\vec{F}_\perp$ et $\vec{F}_\parallel$ de $\vec{F}_{\text{rés}}$:



Si $\beta_{\text{e}} = 0$, $\vec{F}_{\text{rés}}$ est parallèle à $\vec{v}_{\text{p}}$ puisque $C_{\text{p},\perp} = 0$. La force $\vec{F}_{\text{rés}}$ ne peut donc compenser la force propulsive. Le mouvement rectiligne et uniforme est donc impossible.

10 En prenant le carré de l'équation $\|\vec{F}_{\text{pro}}\| = \|\vec{F}_{\text{rés}}\|$, on obtient facilement :

$$\frac{1}{4}\rho_{\text{a}}^2 S^2 \left(C_{\text{v},\perp}^2 + C_{\text{v},\parallel}^2\right) v_{\text{va}}^4 = \frac{1}{4}\rho_{\text{e}}^2 S_{\text{p}}^2 \left(C_{\text{p},\perp}^2 + C_{\text{p},\parallel}^2\right) v_{\text{p}}^4$$

soit :

$$v_{\mathrm{va}}^2 = \left(\frac{\rho_{\mathrm{e}} S_{\mathrm{p}}}{\rho_{\mathrm{a}} S} \sqrt{\frac{C_{\mathrm{p},\perp}^2 + C_{\mathrm{p},\parallel}^2}{C_{\mathrm{v},\perp}^2 + C_{\mathrm{v},\parallel}^2}}\right) v_{\mathrm{p}}^2$$

Or, $v_{\mathrm{va}}^2 = v_{\mathrm{v}}^2 + v_{\mathrm{p}}^2 + 2 v_{\mathrm{v}} v_{\mathrm{p}} \cos\beta_0$. Par conséquent :

$$v_{\mathrm{v}}^2 + v_{\mathrm{p}}^2 + 2 v_{\mathrm{v}} v_{\mathrm{p}} \cos\beta_0 = \sigma_1 v_{\mathrm{p}}^2$$

avec :

$$\sigma_1 = \frac{\rho_{\mathrm{e}} S_{\mathrm{p}}}{\rho_{\mathrm{a}} S} \sqrt{\frac{C_{\mathrm{p},\perp}^2 + C_{\mathrm{p},\parallel}^2}{C_{\mathrm{v},\perp}^2 + C_{\mathrm{v},\parallel}^2}}$$

11 Si $0 < \beta_0 < \pi/2$, $\cos\beta_0 > 0$. L'équation obtenue à la question précédente se récrit :

$$\underbrace{v_{\mathrm{v}}^2}_{>0} + (1 - \sigma_1) v_{\mathrm{p}}^2 + \underbrace{2 v_{\mathrm{v}} v_{\mathrm{p}} \cos\beta_0}_{>0} = 0$$

Elle n'admet donc de solution réelle positive que si $1 - \sigma_1 < 0$. Par conséquent :

$$\sigma_1 > 1$$

12 Posons $X = v_{\mathrm{p}}/v_{\mathrm{v}}$. On peut récrire l'équation (5) sous la forme :

$$X^2 - \left(\frac{2\cos\beta_0}{\sigma_1 - 1}\right) X = \frac{1}{\sigma_1 - 1}$$

L'unique racine réelle positive de cette équation s'écrit :

$$X = \frac{\cos\beta_0}{\sigma_1 - 1} + \sqrt{\frac{1}{\sigma_1 - 1} + \frac{\cos^2\beta_0}{(\sigma_1 - 1)^2}}$$

La vitesse de la planche est supérieure à celle du vent si $X > 1$. Cette condition donne :

$$\sqrt{\frac{1}{\sigma_1 - 1} + \frac{\cos^2\beta_0}{(\sigma_1 - 1)^2}} > 1 - \frac{\cos\beta_0}{\sigma_1 - 1}$$

soit :

$$\frac{1}{\sigma_1 - 1} + \frac{\cos^2\beta_0}{(\sigma_1 - 1)^2} > 1 + \frac{\cos^2\beta_0}{(\sigma_1 - 1)^2} - \frac{2\cos\beta_0}{\sigma_1 - 1}$$

Par conséquent :

$$\sigma_1 - 1 < 1 + 2\cos\beta_0$$

soit :

$$\cos\beta_0 > \frac{\sigma_1 - 2}{2}$$

13 L'expression de X trouvée à la question 12 montre que X est une fonction croissante de $\cos \beta_0$, donc une fonction décroissante de β_0 puisque $0 < \beta_0 < \pi/2$. La vitesse de la planche est donc une fonction décroissante de l'angle β_0. On a donc intérêt à choisir β_0 aussi petit que possible, mais non nul. En tout cas, il faut que :

$$0 < \beta_0 < \text{acos}\left(\frac{\sigma_1 - 2}{2}\right)$$

14 L'expression de X trouvée à la question 12 montre que X est une fonction décroissante de σ_1. On a donc intérêt à choisir σ_1 aussi petit que possible. Compte tenu de la condition trouvée à la question 12, il faut néanmoins que $\sigma_1 > 2$.

Ce résultat est cohérent avec l'expression $\sigma_1 = \frac{\rho_\mathrm{e} S_\mathrm{p}}{\rho_\mathrm{a} S}\sqrt{\frac{C_{\mathrm{p},\perp}^2 + C_{\mathrm{p},\parallel}^2}{C_{\mathrm{v},\perp}^2 + C_{\mathrm{v},\parallel}^2}}$: il faut en effet minimiser les frottements avec l'eau pour augmenter la vitesse de la planche.

II. Physique des vagues

II.A. Les équations de la vague linéaire

15 La masse contenue dans le volume fixe (volume de contrôle) $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ s'écrit :

$$\delta m = \rho(x, z, t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

Sa variation pendant le temps $\mathrm{d}t$ s'écrit donc :

$$\mathrm{d}(\delta m) = \frac{\partial \rho}{\partial t}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

La masse sortant de ce volume pendant $\mathrm{d}t$ vaut :

$$\delta m_\mathrm{s} = j_{\mathrm{m},x}(x + \mathrm{d}x, z, t)\mathrm{d}y\mathrm{d}z - j_{\mathrm{m},x}(x, z, t)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + j_{\mathrm{m},z}(x, z + \mathrm{d}z, t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$- j_{\mathrm{m},z}(x, z, t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left(\frac{\partial j_{\mathrm{m},x}}{\partial x} + \frac{\partial j_{\mathrm{m},z}}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

Or, $\vec{j}_\mathrm{m}(x, z, t) = \rho(x, z, t)\,\vec{u}(x, z, t)$. Par conséquent :

$$\delta m_\mathrm{s} = \left(\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

La conservation de la masse s'écrit :

$$\mathrm{d}(\delta m) = -\delta m_\mathrm{s}$$

On en déduit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} = 0$$

16 On peut récrire cette équation sous la forme :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_x\frac{\partial \rho}{\partial x} + u_z\frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u}\cdot\vec{\nabla}\rho + \rho\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) = 0$$

Or, par définition d'un écoulement incompressible,

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla}\rho = 0$$

On en déduit :

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

c'est-à-dire $\mathrm{div}\vec{u} = \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$

17 Le champ des vitesses s'écrit :

$$\vec{u} = \frac{\partial \phi}{\partial x}\hat{e}_x + \frac{\partial \phi}{\partial z}\hat{e}_z = \vec{\nabla}\phi$$

La condition d'incompressibilité s'écrit :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \Delta\phi = 0$$

18 L'équation d'Euler (6) peut s'écrire, à l'aide du potentiel des vitesses ϕ

$$\rho\left(\vec{\nabla}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) + \frac{1}{2}\vec{\nabla}(\vec{u} \cdot \vec{u})\right) = -\rho\vec{\nabla}(gz) - \vec{\nabla}p$$

L'écoulement étant supposé incompressible (et homogène, même si ce n'est pas dit explicitement), la masse volumique est uniforme. On peut donc écrire :

$$\vec{\nabla}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\vec{u} \cdot \vec{u}}{2} + gz + \frac{p}{\rho}\right) = \vec{0}$$

La quantité dont on prend le gradient est donc uniforme et ne dépend éventuellement que du temps. Par conséquent :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\vec{u} \cdot \vec{u}}{2} + gz + \frac{p}{\rho} = f(t)$$

Pour un écoulement stationnaire, l'équation précédente s'écrit :

$$\frac{\vec{u} \cdot \vec{u}}{2} + gz + \frac{p}{\rho} = \mathrm{cste}$$

On reconnaît le théorème de Bernoulli, à ceci près que la constante s'étend à tout l'écoulement et pas seulement à une ligne de courant. Cela est dû à l'hypothèse supplémentaire que nous avons faite : écoulement irrotationnel (ou écoulement potentiel).

19 La composante verticale de la vitesse d'une particule de fluide (en n'importe quel point de l'écoulement) est donnée par :

$$u_z = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

Pour une particule de fluide située en un point de la surface libre, cette composante est aussi donnée par la dérivée particulaire de la cote verticale $\eta(x,t)$ de la particule de fluide (qui ne dépend que de x et pas de z) :

$$u_z(x, z=\eta(x,t), t) = \frac{\mathrm{D}\eta}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial\eta}{\partial t} + u_x\frac{\partial\eta}{\partial x} = \frac{\partial\eta}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}$$

Par conséquent :

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_{z=\eta} = \frac{\partial\eta}{\partial t} + \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_{z=\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}$$

20 En tout point de la surface libre, la pression est imposée par l'atmosphère :

$$p(x, z=\eta(x,t), t) = p_0$$

Or, nous avons montré à la question 18 que :

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\vec{u}\cdot\vec{u}}{2} + gz + \frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho}$$

Par conséquent, en un point de la surface libre :

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{z=\eta} + \left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{u}}{2}\right)_{z=\eta} + g\eta(x,t) = 0$$

soit:

$$\eta(x,t) = -\frac{1}{g}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{z=\eta} - \left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{u}}{2g}\right)_{z=\eta}$$

21 On injecte la solution $\phi(x,z,t) = X(x,t)Z(z)$ dans l'équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}Z(z) + X(x,t)\frac{\mathrm{d}^2 Z}{\mathrm{d}z^2} = 0$$

En divisant cette équation par $\phi(x,z,t) = X(x,t)Z(z)$, on obtient :

$$\frac{1}{X(x,t)}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -\frac{1}{Z(z)}\frac{\mathrm{d}^2 Z}{\mathrm{d}z^2}$$

Les deux membres de cette équation dépendent de variables indépendantes entre elles : ils sont donc constants. On peut donc poser :

$$\frac{1}{X(x,t)}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -\frac{1}{Z(z)}\frac{\mathrm{d}^2 Z}{\mathrm{d}z^2} = -\mu$$

Par conséquent :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -\mu X(x,t) \\ \dfrac{\mathrm{d}^2 Z}{\mathrm{d}z^2} = \mu Z(z) \end{cases}$$

22 Exploitons la condition aux limites $\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_{z=0} = \frac{\partial\eta}{\partial t}$. Celle-ci s'écrit :

$$X(x,t)\left(\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}z}\right)_{z=0} = \frac{\partial\eta}{\partial t} = A\omega\sin(kx-\omega t)$$

On peut donc identifier :

$$\begin{cases} X(x,t) = \sin(kx-\omega t) \\ \left(\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}z}\right)_{z=0} = A\omega \end{cases}$$

23 La condition aux limites au fond du réservoir s'écrit :

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_{z=-H} = X(x,t)\left(\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}z}\right)_{z=-H} = 0$$

Par conséquent :

$$\left(\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}z}\right)_{z=-H} = 0$$

D'autre part, $\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -k^2\sin(kx-\omega t) = -k^2X(x,t) = -\mu X(x,t)$. Par conséquent :

$$\mu = k^2$$

La fonction $Z(z)$ vérifie donc l'équation :

$$\frac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}z^2} - k^2Z(z) = 0$$

La solution s'écrit (de préférence) sous la forme :

$$Z(z) = \alpha\cosh(kz) + \beta\sinh(kz)$$

Il reste à exprimer les constantes d'intégration en exploitant les conditions aux limites :

- En $z=0$:

$$\left(\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}z}\right)_{z=0} = A\omega = k\beta$$

Donc :

$$Z(z) = \alpha\cosh(kz) + \frac{A\omega}{k}\sinh(kz)$$

- En $z=-H$:

$$\left(\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}z}\right)_{z=-H} = 0 = k\left(-\alpha\sinh(kH) + \frac{A\omega}{k}\cosh(kH)\right)$$

Donc :

$$\alpha = \frac{A\omega}{k\tanh(kH)}$$

Conclusion :

$$Z(z) = \frac{A\omega}{k}\left(\sinh(kz) + \frac{\cosh(kz)}{\tanh(kH)}\right)$$

Cette forme suffit à conclure et l'énoncé ne donne aucun formulaire !

On peut récrire $Z(z)$ sous la forme :

$$Z(z) = \frac{A\omega}{k}\left(\frac{\sinh(kz)\sinh(kH) + \cosh(kz)\cosh(kH)}{\sinh(kH)}\right) = \frac{A\omega}{k}\frac{\cosh\big(k(z+H)\big)}{\sinh(kH)}$$

24 L'autre condition aux limites en $z = 0$ donne :

$$\eta(x,t) = A\cos(kz - \omega t) = -\frac{1}{g}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_{z=0} = -\frac{1}{g}(-\omega\cos(kz - \omega t))Z(0)$$

soit :

$$A = \frac{\omega}{g}\frac{A\omega}{k\tanh(kH)}$$

On obtient donc :

$$\omega^2 = gk\tanh(kH)$$

25 Par définition, la vitesse de phase est donnée par $v_\varphi = \omega/k$. Par conséquent :

$$v_\varphi = \frac{g\tanh(kH)}{\omega} = \sqrt{\frac{g\tanh(kH)}{k}}$$

Examinons les deux limites :

- $kH \ll 1$ i.e. $H \ll \lambda$: $\tanh(kH) \sim kH$ donc

$$v_\varphi \approx \sqrt{gH}$$

En eau peu profonde, v_φ est une constante, indépendante ω et/ou k : il n'y a pas dispersion.

- $kH \gg 1$ i.e. $H \gg \lambda$: $\tanh(kH) \approx 1$ donc

$$v_\varphi \approx \sqrt{\frac{g}{k}} \approx \frac{g}{\omega}$$

En eau profonde, v_φ dépend très fortement de ω et/ou k : la propagation des vagues est au contraire très dispersive.

26 Différentions la relation de dispersion quadratique :

$$2\omega\, \mathrm{d}\omega = g\big(\tanh(kH) + kH(1 - \tanh^2(kH))\big)\,\mathrm{d}k$$

On en déduit, à l'aide de la relation de dispersion :

$$v_\mathrm{g} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \frac{g}{2\omega}\left(\frac{\omega^2}{gk} + kH\left(1 - \frac{\omega^4}{g^2k^2}\right)\right) = \frac{\omega}{2k}\left(1 + kH\left(\frac{1}{\tanh(kH)} - \tanh(kH)\right)\right)$$

Or,

$$\frac{1}{\tanh(kH)} - \tanh(kH) = \frac{\cosh^2(kH) - \sinh^2(kH)}{\cosh(kH)\sinh(kH)} = \frac{2}{\sinh(2kH)}$$

Par conséquent :

$$v_\mathrm{g} = \frac{\omega}{2k}\left(1 + \frac{2kH}{\sinh(2kH)}\right) = \frac{v_\varphi}{2}\left(1 + \frac{2kH}{\sinh(2kH)}\right)$$

Examinons les deux limites :

- $kH \ll 1$ i.e. $H \ll \lambda$: $\sinh(2kH) \sim 2kH$ donc

$$v_\mathrm{g} \approx v_\varphi \approx \sqrt{gH}$$

C'est cohérent avec l'absence de dispersion.

- $kH \gg 1$ i.e. $H \gg \lambda$: $\sinh(2kH) \sim \exp(2kH)/2$ donc

$$v_\mathrm{g} \approx \frac{v_\varphi}{2} \approx \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}} \approx \frac{g}{2\omega}$$

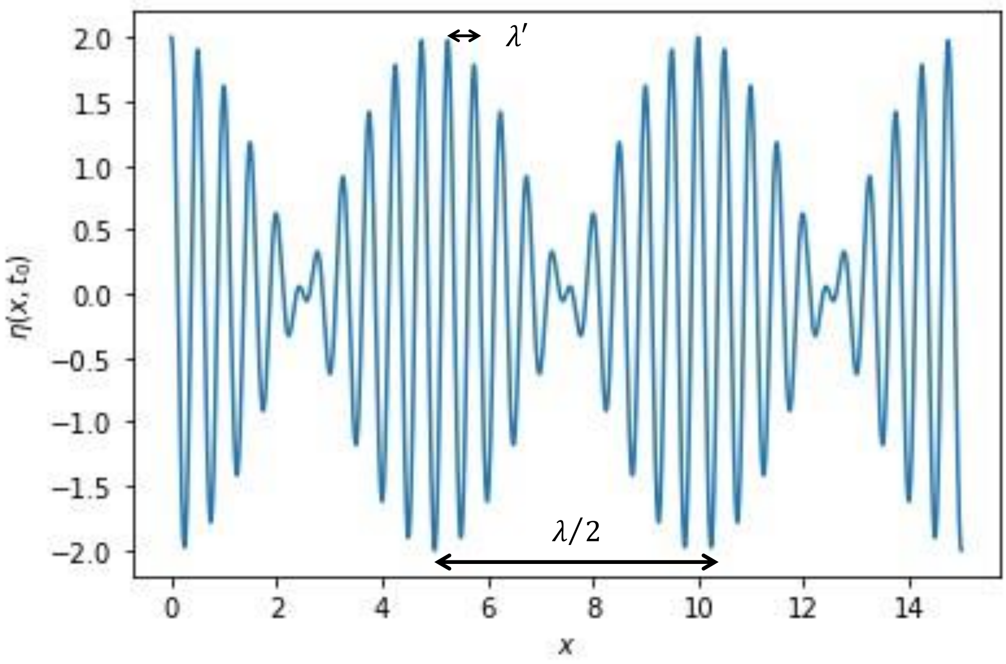
On retrouve la forte dispersion.

27 La vague résultante s'écrit, de manière évidente :

$$\eta(x,t) = 2A\cos\left(\left(\frac{k_1 - k_2}{2}\right)x - \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right)t\right)\cos\left(\left(\frac{k_1 + k_2}{2}\right)x - \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)t\right)$$

Par conséquent :

$$\begin{cases} k = \left|\dfrac{k_1 - k_2}{2}\right| \\ \omega = \left|\dfrac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right| \\ k' = \dfrac{k_1 + k_2}{2} \\ \omega' = \dfrac{\omega_1 + \omega_2}{2} \end{cases}$$



II.B. De l'influence du fond

28 Les lignes pointillées représentent les plans d'onde de l'onde incidente et de l'onde transmise.

En l'absence de réflexion (!!!), la continuité des profils de vague en tout point de l'interface (où $x = 0$) impose :

$$A_1 \cos\left(k_{1,y}y - \omega t\right) = A_2 \cos\left(k_{2,y}y - \omega t\right)$$

On en déduit :

$$\begin{cases} A_1 = A_2 \\ k_{1,y} = k_{2,y} \end{cases}$$

Or, $k_{1,y} = k_1 \sin i_1$ et $k_{2,y} = k_2 \sin i_2$. D'autre part, comme $k_1 H_1 \ll 1$ et $k_2 H_2 \ll 1$, $v_{\varphi 1} = \omega / k_1 = \sqrt{gH_1}$ et $v_{\varphi 2} = \omega / k_2 = \sqrt{gH_2}$. On en déduit :

$$\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = \sqrt{\frac{H_1}{H_2}}$$

29 On tire du résultat précédent que le quotient $\sin i / \sqrt{H}$ est une constante. Comme la profondeur H diminue en approchant du bord, il en est de même de l'angle i : la direction de propagation des vagues tend à s'aligner avec le vecteur $\hat{e}_x$ et les crêtes tendent à devenir parallèle au bord de mer.

30 En l'absence de dissipation et de réflexion, la conservation de l'énergie impose :

$$E_{\mathrm{m}1} v_{\mathrm{g}1} = E_{\mathrm{m}2} v_{\mathrm{g}2}$$

Comme $v_{\mathrm{g}1} = v_{\varphi 1} = \sqrt{gH_1}$ et $v_{\mathrm{g}2} = v_{\varphi 2} = \sqrt{gH_2}$, on en déduit :

$$\frac{A_2^2}{A_1^2} = \sqrt{\frac{H_1}{H_2}} > 1$$

L'amplitude des vagues augmente donc à l'approche du rivage, ce qui est conforme à l'expérience. Cependant, ce résultat est en contradiction avec le résultat obtenu à la question 28. Cette incohérence est due à deux causes :

- d'une part, toute réflexion a été ignorée ;
- d'autre part, la théorie abordée ici est purement linéaire, ce qui n'est plus du tout correct si l'amplitude des vagues devient élevée.