

Physique 1 - Mines Ponts PSI - Proposition de corrigé

Corrigé rédigé par Thibault Debelhoir et Jean Maysonnave, relu par Stéphane Ravier. N'hésitez pas à nous signaler par mail (jean.maysonnave@ac-creteil.fr et thibault.debelhoir@ac-creteil.fr) toute coquille ou erreur !

I. La circulation capillaire

1. Le nombre de Reynolds \mathcal{R}_e est un nombre adimensionné qui s'évalue via la relation :

$$\mathcal{R}_e = \frac{LU}{\nu}$$

Ici, L , U et ν représentent respectivement la distance typique, la vitesse typique et la viscosité cinématique de l'écoulement. Ce nombre correspond au rapport des contributions convective et diffusive au transport de quantité de mouvement dans l'écoulement. Si \mathcal{R}_e est grand, la diffusion (liée à la viscosité) est faible en comparaison de la convection. L'écoulement est donc dominé par la convection, ce qui peut par exemple donner des turbulences. A l'inverse, si \mathcal{R}_e est petit (typiquement inférieur à 1), la diffusion domine, l'écoulement est alors caractérisé par un "lissage" du champ des vitesses dû aux frottements visqueux.

2. On peut évaluer la longueur moyenne l_0 d'un capillaire à partir de la longueur cumulée de tous les capillaires $L_0 = 10^8$ m (donnée) et du nombre total de capillaires N . Ce dernier peut s'obtenir via $N = \frac{\sigma}{\pi R^2}$, chaque capillaire ayant une section circulaire. Ainsi :

$$l_0 = \frac{L_0}{N} = \frac{\pi R^2 L_0}{\sigma} \sim \frac{3 \times 10^{-10} \times 10^8}{5 \cdot 10^{-1}} \sim 6 \text{ cm}$$

Remarque : on aurait pu aussi utiliser la donnée du volume sanguin total, mais cela paraît moins précis car tous les vaisseaux ne sont pas des capillaires.

3. A chaque contraction (tous les $\tau = 1$ s), un volume $V_0 = 10^{-4} \text{ m}^3$ est éjecté du coeur. Le débit volumique total est donc en ordre de grandeur $D_{v,t} = \frac{V_0}{\tau}$. Le débit massique d'un capillaire D_m est le débit massique total $D_{m,t}$ divisé par le nombre de capillaire N . Et $D_{m,t} = \rho D_{v,t}$ comme la masse volumique est constante. Ainsi :

$$D_m = \frac{D_{m,t}}{N} = \frac{\rho D_{v,t}}{N} = \frac{\rho V_0 \pi R^2}{\tau \sigma} = \frac{1,1 \cdot 10^3 \times 10^{-4} \times 3 \times 10^{-10}}{5 \cdot 10^{-1}} = \frac{1,1 \times 3}{5} \cdot 10^{-10} \sim 7 \cdot 10^{-11} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$$

Le nombre de Reynolds est quant à lui donné par :

$$\mathcal{R}_e = \frac{LU}{\nu} = \frac{2RU\rho}{\eta} = \frac{2R \times \frac{D_v}{\pi R^2} \times \rho}{\eta} = \frac{2D_m}{\eta \pi R} = \frac{2 \times 7 \cdot 10^{-11}}{1,6 \cdot 10^{-3} \times 3 \times 10^{-5}} = 3 \cdot 10^{-3}$$

(où $U = \frac{D_v}{\pi R^2}$ et D_v sont respectivement la vitesse moyenne dans un capillaire et le débit volumique d'un capillaire). Le nombre de Reynolds est petit devant 1. C'est un écoulement clairement laminaire que l'on étudie donc.

4. L'hypothèse incompressible se traduit mathématiquement par $\text{div } \vec{v} = 0$. Cette relation donne ici en coordonnées cylindriques $\frac{\partial v}{\partial z}(r, z) = 0$. Donc le champ des vitesses ne dépend pas de z de sorte que l'on a simplement $\vec{v} = v(r)\hat{e}_z$. Les lignes de courant sont toutes parallèles à \hat{e}_z . Sur chaque ligne de courant, r est alors fixé. Par ailleurs la vitesse ne dépend pas du temps. Ainsi la vitesse est une constante, et une particule de fluide n'est pas accélérée. Par extension, l'élément de fluide n'est donc pas accéléré non plus.

5. Cette question est maladroitement posée. Une relation mécanique différentielle spatiale est demandée, ce qui sous-entend qu'elle doit être obtenue à partir d'un bilan mécanique sur un système infinitésimal. Mais l'élément de fluide proposé ne l'est pas.

On va donc effectuer un bilan des forces mais sur un élément de fluide de forme cylindrique, d'axe \hat{e}_z , de rayon r et compris entre les côtes z et $z + dz$. Cet élément de fluide a donc une masse $dm = \rho \pi r^2 dz$. Le bilan s'écrit donc :

$$dm\vec{a} = [P(z) - P(z + dz)]\pi r^2 \hat{e}_z + \eta(2\pi r dz) \frac{dv}{dr}(r)\hat{e}_z$$

Or $\vec{a} = \vec{0}$ d'après la question 4, et $[P(z) - P(z + dz)] = -\frac{dP}{dz}(z)dz$. En projetant le bilan sur l'axe \hat{e}_z , on aboutit à :

$$\frac{dP}{dz}(z) = \frac{2\eta}{r} \frac{dv}{dr}(r)$$

Puisque le membre de droite ne dépend que de la variable r et celui de gauche que de la variable z , les deux membres sont alors nécessairement constants. Donc $\frac{dP}{dz}(z)$ est constant.

6. La relation précédente nous donne que :

$$\frac{dv}{dr}(r) = \frac{r}{2\eta} \frac{dP}{dz}(z)$$

et on peut intégrer cette relation, en ayant bien en tête que $\frac{dP}{dz}(z)$ est une constante. Ainsi :

$$v(r) = \frac{r^2}{4\eta} \frac{dP}{dz}(z) + A$$

et puis, pour trouver A , on peut utiliser la condition d'adhérence du fluide sur les parois. Comme l'écoulement est visqueux, on peut supposer $v(r=R) = 0$ de sorte que $A = -\frac{R^2}{4\eta} \frac{dP}{dz}(z)$. En fin de compte :

$$v(r) = -\frac{R^2 - r^2}{4\eta} \frac{dP}{dz}(z)$$

7. Il faut donc commencer par calculer le débit massique, donné par : $D_m = \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{2\pi} \rho \vec{v} \cdot d\vec{S}$ où $d\vec{S}$ est une portion de couronne, d'axe Oz , comprise entre les angles θ et $\theta + d\theta$ et entre les rayons r et $r + dr$. Ainsi :

$$D_m = \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{2\pi} \rho v(r) r d\theta dr = -\frac{2\pi\rho}{4\eta} \frac{dP}{dz} \int_{r=0}^R (R^2 r - r^3) dr = -\frac{2\pi\rho}{4\eta} \frac{dP}{dz} \left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4} \right) = -\frac{\pi\rho R^4}{8\eta} \frac{dP}{dz}$$

On en déduit :

$$R_u = \frac{|dP/dz|}{D_m} = \frac{8\eta}{\pi\rho R^4}$$

8. La gradient de pression est constant donc : $|dP/dz| = \Delta P/l$, soit $\Delta P = R_u D_m l$ en valeur absolue. La pression est nécessairement plus forte à gauche qu'à droite car les frottements sur les parois la font progressivement baisser (perte de charge). Pour l'AN à la main, on a :

$$\Delta P = \frac{8\eta}{\pi\rho R^4} D_m l = \frac{8 \times 1,6 \cdot 10^{-3}}{3,1 \times 1,1 \cdot 10^3 \times 10^{-20}} \times 7 \cdot 10^{-11} \times 5 \cdot 10^{-2} = \frac{8 \times 1,6 \times 7 \times 5}{3 \times 1,1} \cdot 10^1 \sim 1,3 \cdot 10^3 \text{ Pa}$$

9. Les forces de pression exercées sur la capillaire s'appliquent à ses extrémités gauche et droite. La puissance \mathcal{P} recherchée s'exprime donc selon : $\mathcal{P} = \iint \vec{F}_P(z=0) \cdot \vec{v}(r) + \iint \vec{F}_P(z=l) \cdot \vec{v}(r) = \iint P(z=0) d\vec{S} \cdot \vec{v}(r) - \iint P(z=l) d\vec{S} \cdot \vec{v}(r)$ où les intégrales portent sur les surfaces droites du capillaire en $z=0$ et $z=l$ respectivement. Les forces de pression, dirigées suivant Oz comme le vecteur vitesse, sont également uniformes sur ces surfaces et donc :

$$\mathcal{P} = [P(z=0) - P(z=l)] \iint v(r) dS = \Delta P \iint v(r) dS$$

et $\iint v(r) dS = D_v$ par définition :

$$\mathcal{P} = \Delta P D_v = \Delta P \frac{D_m}{\rho} = \frac{R_u D_m^2 l}{\rho}$$

10. Dans l'énoncé, le volume systolique $V_0 = 10^{-4} \text{ m}^3$ permet facilement d'évaluer le débit volumique total pour le coeur. C'est le volume de sang éjecté tous les $\tau = 1 \text{ s}$. Le débit volumique total serait ainsi $D_{v,t} = V_0/\tau$. La différence de pression que voit ce volume éjecté est en moyenne ΔP , ainsi :

$$\mathcal{P} = \Delta P D_{v,t} = \frac{\Delta P V_0}{\tau} = 1,3 \cdot 10^3 \times 10^{-4} = 0,13 \text{ W}$$

Remarque : Le résultat est un peu faible puisqu'une estimation courante est plutôt de l'ordre de 1 à 2 W. Mais le modèle retenu ignore l'influence de la pesanteur par exemple alors que cette dernière domine clairement. Avec les données, l'ensemble du sang fait un tour complet en une minute. Sur ce trajet, il faut lutter contre la pesanteur sur une hauteur de l'ordre de 1 m, ce qui correspond à environ 1 W supplémentaire.

II. Le magnétron

11. Afin que le champ magnétique soit uniforme, le bobinage doit être très long, plus précisément sa longueur doit être beaucoup plus grande que son diamètre. Pour que le champ soit porté par le vecteur \hat{e}_z , le bobinage doit être centré autour de l'axe (Oz). Enfin, pour que le champ soit stationnaire, le courant I doit être constant.

12. Puisque le dispositif est invariant par translation selon \hat{e}_z (en négligeant les effets de bord) et par rotation selon \hat{e}_θ (en approximant l'anode comme une unique partie cylindrique), le potentiel électrostatique ne dépend que de la variable r . Par ailleurs, puisque l'espace entre les deux électrodes est vide, le potentiel électrostatique vérifie l'équation de Laplace $\Delta V = 0$. Ainsi $\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}V}) = 0$, soit, en utilisant les invariances,

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV}{dr} \right) = 0.$$

Donc

$$V(r) = C_1 \ln r + C_2$$

où C_1 et C_2 sont des constantes. Or, d'après l'énoncé, $V(b) - V(a) = U_0$, ainsi $C_1 \ln(b/a) = U_0$. Finalement

$$V(r) = U_0 \frac{\ln r}{\ln(b/a)} + C_2.$$

13. D'après le PFD appliqué à un électron dans le référentiel du dispositif supposé galiléen, on a

$$m_e \vec{a} = -e \left(\vec{v} \wedge \vec{B}_0 + \vec{E} \right) = -e \left(\vec{v} \wedge (B_0 \hat{e}_z) - \overrightarrow{\text{grad}V} \right),$$

ce qui, projeté sur le vecteur \hat{e}_z , donne $m_e \ddot{z} = 0$ car, par définition du produit vectoriel, $\vec{v} \wedge (B_0 \hat{e}_z)$ est perpendiculaire à \hat{e}_z et, d'après la réponse à la question précédente, $\overrightarrow{\text{grad}V}$ est porté par \hat{e}_r . Ainsi $\dot{z} = C_3$ où C_3 est une constante.

L'énoncé précise que les électrons émis par la cathode ont avec une faible vitesse. Faisons alors l'approximation d'une vitesse initiale nulle. On a alors $\dot{z}(0) = 0$, d'où $C_3 = 0$. Finalement

$$\dot{z} = 0$$

à tout instant. Ainsi le mouvement est nécessairement contenu dans un plan perpendiculaire à \hat{e}_z .

14. Dans un référentiel galiléen, la somme des moments, par rapport à un point fixe A , des forces \vec{F}_i qui s'exercent sur un point matériel vérifie

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \sum_i \overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\vec{F}_i).$$

où \vec{L}_A est son moment cinétique par rapport à A . Il s'agit du théorème du moment cinétique (TMC).

Appliquons le TMC à un électron, noté M , dans le référentiel du dispositif supposé galiléen. Prenons pour A l'intersection entre l'axe (Oz) et le plan du mouvement de M . On a alors

$$\frac{d \left[\overrightarrow{AM} \wedge (m_e \vec{v}) \right]}{dt} = \overrightarrow{AM} \wedge (-e \vec{E}) + \overrightarrow{AM} \wedge (-e \vec{v} \wedge \vec{B}_0)$$

soit

$$\frac{d \left[m_e (r \hat{e}_r + z \hat{e}_z) \wedge (\dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\theta} \hat{e}_\theta) \right]}{dt} = (r \hat{e}_r + z \hat{e}_z) \wedge (e \overrightarrow{\text{grad}V}) + (r \hat{e}_r + z \hat{e}_z) \wedge \left[-e (\dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\theta} \hat{e}_\theta) \wedge (B_0 \hat{e}_z) \right].$$

En projetant cette égalité sur le vecteur \hat{e}_z (et en utilisant le fait que $\overrightarrow{\text{grad}V}$ est porté par \hat{e}_r), on trouve

$$\frac{d(m_e r^2 \dot{\theta})}{dt} = e B_0 r \dot{r}.$$

Cela peut se réécrire

$$\frac{d(m_e r^2 \dot{\theta})}{dt} = \frac{d\left(\frac{1}{2} e B_0 r^2\right)}{dt}$$

soit

$$m_e r^2 \dot{\theta} = \frac{1}{2} e B_0 r^2 + C_4$$

où C_4 est une constante. Comme on fait l'approximation d'une vitesse initiale nulle, on sait que $\dot{\theta} = 0$ lorsque $r = a$. Ainsi

$$C_4 = -\frac{1}{2}eB_0a^2.$$

Finalement

$$\dot{\theta} = \frac{\omega_c}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right).$$

15. La fréquence f_0 de l'onde produite est donnée par celle des électrons au voisinage de l'anode, ainsi

$$f_0 = \frac{\dot{\theta}(b)}{2\pi} = \frac{\omega_c}{4\pi} \left(1 - \frac{a^2}{b^2} \right).$$

On en déduit que

$$B_0 = \frac{4\pi f_0 m_e}{e \left(1 - \frac{a^2}{b^2} \right)} \sim \frac{4 \times 3 \times 2,5 \times 10^9 \times 9 \times 10^{-31}}{1,5 \times 10^{-19} \times \left(1 - \frac{1}{6^2} \right)} \sim \frac{270}{1,5} \cdot 10^{-3} \sim 0,2 \text{ T}.$$

16. Appliquons le théorème de l'énergie mécanique à un électron dans le référentiel du dispositif supposé galiléen entre l'instant initial où l'électron se trouve sur la cathode et un instant quelconque. L'électron est soumis à la force de Lorentz. Puisque la partie électrique est conservative et que la partie magnétique ne travaille pas, on en déduit que l'énergie mécanique est conservée entre ces deux instants. De plus, on a donc

$$E_c(t=0) + E_p(t=0) = E_c(t) + E_p(t).$$

En faisant de nouveau l'approximation d'une vitesse initiale nulle, on obtient

$$0 - eV(a) = \frac{1}{2}m_e \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) - eV(r),$$

soit

$$0 - eU_0 \frac{\ln a}{\ln(b/a)} - eC_2 = \frac{1}{2}m_e \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) - eU_0 \frac{\ln r}{\ln(b/a)} - eC_2.$$

Ainsi

$$\dot{r}^2 = \frac{2eU_0}{m_e} \frac{\ln(r/a)}{\ln(b/a)} - r^2 \dot{\theta}^2 = \frac{2eU_0}{m_e} \frac{\ln(r/a)}{\ln(b/a)} - r^2 \frac{e^2 B_0^2}{4m_e^2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right)^2.$$

Puisque $\dot{r} > 0$, on a finalement

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2eU_0}{m_e} \frac{\ln(r/a)}{\ln(b/a)} - \frac{e^2 B_0^2}{4m_e^2 r^2} (r^2 - a^2)^2}.$$

17. Pour que les électrons atteignent, comme le précise l'énoncé, le voisinage immédiat de l'anode sans jamais entrer en contact avec celle-ci, on doit avoir $\dot{r} = 0$ lorsque $r = b$. Ainsi

$$\sqrt{\frac{2eU_0}{m_e} \frac{\ln(b/a)}{\ln(b/a)} - \frac{e^2 B_0^2}{4m_e^2 b^2} (b^2 - a^2)^2} = 0$$

soit

$$U_0 = \frac{(b^2 - a^2)^2}{b^2} \frac{eB_0^2}{8m_e}.$$

18. Soit un électron ayant un mouvement circulaire de rayon r quelconque à la vitesse angulaire ω . Son vecteur-vitesse est alors $\vec{v} = r\omega\hat{e}_\theta$ et son vecteur-accélération $\vec{a} = -r\omega^2\hat{e}_r$. D'après le PFD appliqué à cet électron dans le référentiel du dispositif supposé galiléen, on a

$$m_e \vec{a} = -e \left(\vec{v} \wedge \vec{B}_0 + \vec{E} \right)$$

d'où

$$-m_e r \omega^2 \hat{e}_r = -e (r\omega\hat{e}_\theta) \wedge (B_0\hat{e}_z) - e\vec{E} = -er\omega B_0 \hat{e}_r - e\vec{E}.$$

Finalement

$$\vec{E} = \frac{m_e r \omega (\omega - \omega_c)}{e} \hat{e}_r.$$

19. On sait que le potentiel électrique V vérifie

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V.$$

Ainsi d'après l'expression, rappelée dans l'énoncé, de l'opérateur gradient dans le système de coordonnées cylindriques, on sait que V ne dépend que de r et que

$$\frac{dV}{dr} = -\frac{m_e r \omega (\omega - \omega_c)}{e}.$$

Donc

$$V(r) = \frac{m_e r^2 \omega (\omega_c - \omega)}{2e} + C_5.$$

Or, $V(b) - V(a) = U_0$, d'où

$$U_0 = \frac{m_e (b^2 - a^2) \omega (\omega_c - \omega)}{2e}.$$

20. Soit n la densité particulière des électrons. D'après l'équation de Maxwell-Gauss, on a

$$\text{div} \vec{E} = \frac{-en}{\epsilon_0}$$

Ainsi d'après l'expression, rappelée dans l'énoncé, de l'opérateur divergence dans le système de coordonnées cylindriques,

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{m_e r^2 \omega (\omega - \omega_c)}{e} \right) = \frac{-en}{\epsilon_0}$$

d'où

$$n = \frac{2m_e \epsilon_0 \omega (\omega_c - \omega)}{e^2}.$$

Finalement

$$n = \frac{4\epsilon_0 U_0}{e (b^2 - a^2)}.$$

21. Cette question est, sans doute volontairement, assez floue. Nous proposons ici une réponse plutôt détaillée et quantitative. Mais attendait-on plutôt une réponse plus succincte ?

Afin de savoir s'il est raisonnable de considérer le champ magnétique comme inchangé, déterminons le champ magnétique \vec{B}_e créé par le mouvement des électrons en un point M quelconque pour lequel $r < b$. On admet, par analogie avec le solénoïde que ce champ est nul pour $r > b$. Le mouvement des électrons étant invariant par translation selon \hat{e}_z (en négligeant les effets de bord) et par rotation selon \hat{e}_θ , donc \vec{B}_e ne dépend que de r . Par ailleurs le plan $(M, \hat{e}_r, \hat{e}_\theta)$ est un plan d'antisymétrie (toujours en négligeant les effets de bord), donc le \vec{B}_e est porté par \hat{e}_z .

Choisissons un contour d'Ampère rectangulaire constitué de deux côtés portés par \hat{e}_z , l'un situé en $r < b$, l'autre à l'extérieur du dispositif, et de deux côtés portés par \hat{e}_r distants d'une distance h . D'après le théorème d'Ampère, on a

$$\oint \vec{B}_e \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$$

soit, si $r > a$,

$$B_e(r)h = \mu_0 \int \vec{j} \cdot d\vec{S} = \mu_0 h \int_r^b (-enr' \omega \hat{e}_\theta) \cdot dr' \hat{e}_\theta = -\mu_0 h e n \omega \int_r^b r' dr'.$$

Ainsi

$$\vec{B}_e = -\mu_0 e n \omega \frac{b^2 - r^2}{2} \hat{e}_z.$$

Par ce même raisonnement, on montre que si $r < a$, on a

$$\vec{B}_e = -\mu_0 e n \omega \frac{b^2 - a^2}{2} \hat{e}_z.$$

On remarque que la norme de ce champ est maximale pour $r < a$ (et est alors indépendante de r). Comparons alors cette norme à B_0 . On a

$$\frac{\|\vec{B}_e\|}{B_0} = \mu_0 e n \omega \frac{b^2 - a^2}{2B_0} = \mu_0 e \frac{4\epsilon_0 U_0}{e (b^2 - a^2)} \omega \frac{b^2 - a^2}{2B_0} = \frac{2\omega U_0}{B_0 c^2} = \frac{2\omega}{B_0 c^2} \frac{m_e (b^2 - a^2) \omega (\omega_c - \omega)}{2e}$$

d'où

$$\frac{\|\vec{B}_e\|}{B_0} < \frac{2\omega}{B_0 c^2} \frac{m_e b^2 \omega \omega_c}{2e} = \frac{\omega^2 b^2}{c^2} = \frac{4\pi^2 f_0^2 b^2}{c^2} = \frac{4 \times 9 \times 6 \times 10^{18} \times 36 \times 10^{-6}}{9 \times 10^{16}} = \frac{2^5 \times 3^5}{3^2} \cdot 10^{-4} = 32 \times 27 \cdot 10^{-4} = 9 \cdot 10^{-2}.$$

Ainsi, on remarque que la norme du champ magnétique créé par le mouvement des électrons est au moins un ordre de grandeur plus petite que B_0 . Il est donc assez raisonnable de considérer le champ magnétique comme inchangé.

III. Lévitiation magnétique

22. L'excitation magnétique \vec{H} et le champ magnétique \vec{B} sont reliés par la relation

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}.$$

On remarque que \vec{H} et \vec{M} ont alors la même dimension. On a ainsi

$$[\chi] = 1.$$

Pour un matériau magnétique linéaire, on définit la perméabilité magnétique relative μ_r par l'expression

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}.$$

Or, on a

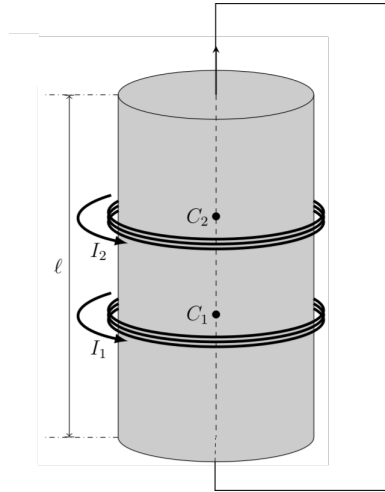
$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \chi \vec{H} = \mu_0 (1 + \chi) \vec{H}.$$

Ainsi

$$\mu_r = 1 + \chi.$$

23. Puisque ces lignes de champ sont des droites parallèles à l'intérieur du matériau magnétique, on sait que le champ \vec{B} est uniforme. Par ailleurs, d'après la question précédente, les champs \vec{H} et \vec{M} sont proportionnels à \vec{B} , ils sont donc également uniformes.

Appliquons le théorème d'Ampère dans un milieu magnétique au contour fermé représenté ci-dessous.



On a

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{\text{libre, enlacé}}.$$

Comme le champ \vec{B} à l'extérieur du matériau est négligée, le champ \vec{H} l'est également. En notant $\vec{H} = H_0 \hat{e}_z$, on obtient alors

$$H_0 l = N_1 I_1 + N_2 I_2.$$

Or $B_0 = \mu_0 \mu_r H_0$, d'où

$$B_0 = \frac{\mu_0 \mu_r (N_1 I_1 + N_2 I_2)}{l}.$$

24. Le flux à travers la première bobine s'écrit

$$\varphi_1 = N_1 \pi R^2 B_0 = N_1 \pi R^2 \frac{\mu_0 \mu_r (N_1 I_1 + N_2 I_2)}{l}.$$

Or

$$\varphi_1 = \varphi_{11} + \varphi_{21} = L_1 I_1 + M_0 I_2.$$

Par identification, on obtient alors

$$L_1 = \frac{\mu_0 \mu_r N_1^2 \pi R^2}{l} \quad \text{et} \quad M_0 = \frac{\mu_0 \mu_r N_1 N_2 \pi R^2}{l}.$$

Par le même raisonnement appliqué à la deuxième bobine, on trouve

$$L_2 = \frac{\mu_0 \mu_r N_2^2 \pi R^2}{l}$$

et heureusement la même expression pour M_0 .

25. La loi des mailles dans la bobine numéro 2 s'écrit :

$$I_2(z, t) = G \times e(z, t) = -G \frac{d\varphi_{12}(z, t)}{dt} - G \frac{d\varphi_{22}(z, t)}{dt}$$

avec $\varphi_{12}(z, t) = M(z)I_1(t)$ et $\varphi_{22}(z, t) = L_2 I_2(z, t)$. Ensuite, il faut effectuer une identification. On réécrit la loi des mailles en complexes, soit :

$$\underline{I}_2 = -jG\omega \times (M(z)\underline{I}_1 + L_2 \underline{I}_2)$$

Le but est d'exprimer \underline{I}_2 en fonction de \underline{I}_1 puis de I . D'abord on peut remettre en forme la relation ci-dessus pour isoler \underline{I}_2 :

$$\underline{I}_2 = \frac{-jG\omega M(z) \times (1 - jG\omega L_2)}{(1 + jG\omega L_2) \times (1 - jG\omega L_2)} \underline{I}_1 = -\frac{jG\omega M(z)}{1 + (G\omega L_2)^2} \underline{I}_1 - \frac{G^2 \omega^2 L_2 M(z)}{1 + (G\omega L_2)^2} \underline{I}_1$$

On prend donc ensuite la partie réelle de ce nombre complexe, or $\underline{I}_1 = I \exp(j\omega t)$ d'où :

$$\underline{I}_2 = -\frac{G\omega M(z)}{1 + (G\omega L_2)^2} I \exp\left(j\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right)t\right) - \frac{G^2 \omega^2 L_2 M(z)}{1 + (G\omega L_2)^2} I \exp(j\omega t)$$

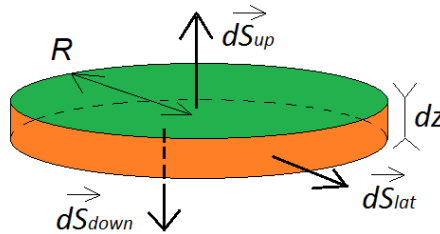
soit, en réels :

$$I_2(z, t) = \frac{G\omega M(z)}{1 + (G\omega L_2)^2} I \sin(\omega t) - \frac{G^2 \omega^2 L_2 M(z)}{1 + (G\omega L_2)^2} I \cos(\omega t)$$

d'où $\alpha(z) = \frac{G^2 \omega^2 L_2 M(z)}{1 + (G\omega L_2)^2}$ et $\beta(z) = \frac{G\omega M(z)}{1 + (G\omega L_2)^2}$.

Remarque : le calcul peut également être mené en restant en réels de bout en bout.

26. On peut écrire la conservation du flux magnétique sur un disque de rayon R d'épaisseur dz , compris entre les côtes z et $z + dz$ (où se situe la bobine numéro 2), représenté ci-dessous :



On a $\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$, qui donne :

$$\iint_{up} \vec{B} \cdot (dS_{up} \hat{e}_z) + \iint_{down} \vec{B} \cdot (-dS_{down} \hat{e}_z) + \iint_{lat} \vec{B} \cdot (dS_{lat} \hat{e}_r) = 0$$

soit, en admettant que la composante verticale du champ magnétique ne dépend toujours que de z :

$$B_z(z + dz)\pi R^2 - B_z(z)\pi R^2 + (2\pi R dz)B_r(z) = 0$$

puis :

$$\frac{dB_z}{dz}(z) = -\frac{2}{R} B_r(z)$$

Ainsi :

$$B_r(z) = -\frac{R}{2} \frac{dB_z}{dz}(z)$$

Il nous faudrait $B_z(z)$. Et justement $\varphi_{12}(z, t) = M(z)I_1(t) = N_2 \int_{up} \vec{B} \cdot (dS_{up} \hat{e}_z) = N_2 \pi R^2 B_z(z)$ soit $B_z(z) = \frac{M(z)I_1(t)}{N_2 \pi R^2} = \frac{M_0 f(z)I_1(t)}{N_2 \pi R^2}$.

On peut donc évaluer la dérivée de sorte que :

$$B_r(z) = -\frac{R}{2} \times \frac{M_0 I_1(t)}{N_2 \pi R^2} \times \frac{df}{dz}(z) = -\frac{R}{2} \times \frac{\mu_0 \mu_r N_1 N_2 \pi R^2}{l} \times \frac{I_1(t)}{N_2 \pi R^2} \times \frac{df}{dz}(z)$$

soit

$$B_r(z) = -\frac{\mu_0 \mu_r N_1 R}{2l} I_1(t) \frac{df}{dz}(z)$$

27. La force exercée sur la bobine numéro 2 est :

$$\vec{F} = \int_0^{N_2 2\pi} I_2(z, t) d\vec{l} \wedge \vec{B} = \int_0^{N_2 2\pi} I_2(z, t) R d\theta \hat{e}_\theta \wedge (B_r \hat{e}_r + B_\theta \hat{e}_\theta + B_z \hat{e}_z) = I_2(z, t) R \int_0^{N_2 2\pi} (-B_r \hat{e}_z + B_z \hat{e}_r) d\theta$$

Or B_z est constant sur le contour de l'intégrale donc :

$$\int_0^{N_2 2\pi} B_z \hat{e}_r d\theta = B_z \int_0^{N_2 2\pi} \hat{e}_r d\theta = \vec{0}$$

Ainsi l'expression de \vec{F} se réduit à sa composante verticale qui est :

$$F_z(z, t) = -I_2(z, t) R \int_0^{N_2 2\pi} B_r \hat{e}_z d\theta = -N_2 2\pi R B_r I_2(z, t) = \frac{2\pi \mu_0 \mu_r N_1 N_2 R^2}{2l} \times \frac{df(z)}{dz} \times I_1(t) I_2(z, t)$$

On veut la valeur moyenne temporelle de cette période qui va se déduire de celle du produit $I_1(t) I_2(z, t)$ qui concentre toute la dépendance temporelle. On a :

$$\langle I_1(t) I_2(z, t) \rangle = I^2 \beta(z) \langle \cos(\omega t) \sin(\omega t) \rangle = -I^2 \alpha(z) \langle \cos^2(\omega t) \rangle = -\frac{I^2 \alpha(z)}{2}$$

donc :

$$\langle F_z \rangle = -\frac{\pi \mu_0 \mu_r N_1 N_2 R^2 I^2}{2l} \alpha(z) \frac{df(z)}{dz}$$

On attend que $M(z)$ soit positive et décroisse avec z (l'induction est d'autant moins ressentie que la bobine 2 est éloignée de la bobine 1), ainsi $\alpha(z) > 0$ est positif et $\frac{df}{dz} < 0$. De sorte que la force est positive.

Cette force est d'autant plus forte que z est petit. C'est bien logique, parce que les lignes de champ s'évasent à partir de la bobine 1 si on prend en compte la composante radiale. L'évasement se traduit par une diminution de l'intensité du champ magnétique à mesure que z augmente. C'est cette situation qui peut conduire à une potentielle lévitation magnétique. A cette force vers le haut s'ajoute en effet le poids orienté vers le bas évidemment. Si ces deux forces se compensent pour une altitude donnée, on va observer un équilibre. Ce serait très intéressant à tester en pratique!

***** FIN DU CORRIGE *****