

# Quelques aspects de l'industrie nucléaire

*Synthèse rapide du CAP : Sujet varié et assez proche du cours. Accessible pour un.e étudiant.e sérieux.se. Attention à la partie sur les ALI qui est assez calculatoire et pas nécessairement très simple. Peu de questions de sup.*

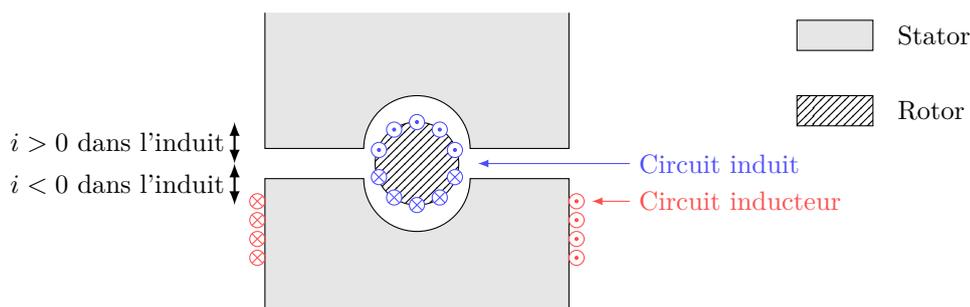
- Plusieurs questions qui manquent de clarté (pour nous Q11, Q18, Q21, Q22, Q28, Q44)
- Des questions limites programme : Q5, Q32, Q42
- Questions 17 et 18 : assez inutiles et trop compliquées pour ce niveau de concours

*Plusieurs remarques sont écrites en bleu dans la correction pour aider à la modification du sujet lorsqu'il est utilisé en classe.*

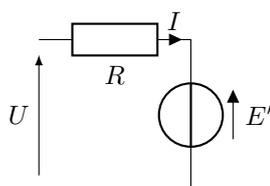
## Préliminaires - Étude d'une machine à courant continu en travaux pratiques

**Q1.** Une machine à courant continu est constituée de deux parties :

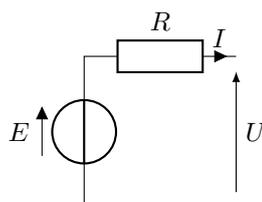
- Un stator (pièce ferromagnétique fixe) sur lequel est bobiné un circuit **inducteur**. Celui-ci est alimenté en courant **continu** et génère un champ magnétique fixe. Le stator canalise ce champ.
- Un rotor (pièce ferromagnétique en rotation) sur lequel est bobiné un circuit **induit**. Il est parcouru par un courant **continu** et génère un champ magnétique fixe également. Les spires de ce circuit sont mises en contact avec le circuit d'alimentation extérieur par des balais conducteurs et un collecteur qui permet d'assurer une direction constante au champ rotorique et ainsi une condition de synchronisme entre champs rotorique et statorique.



**Q2.** Fonctionnement moteur : l'induit est alimenté par une tension  $U$  et parcouru par un courant  $I$  :



Fonctionnement générateur : l'induit délivre une tension  $U$  et un courant  $I$  :



**Q3.** Les deux équations recherchées sont les suivantes :

$$\boxed{E = \phi\Omega} \quad \text{et} \quad \boxed{\Gamma_{em} = \phi I}$$

**Q4.** La première expérience permet de remonter à la valeur de la résistance de l'induit de la MCC1. En effet, la MCC2 n'étant pas alimentée, on en déduit que le rotor est bloqué, ainsi,  $\Omega = 0$  donc  $E' = 0$  pour la MCC1. D'après le premier schéma proposé ci-dessus :

$$U_e = RI_e \quad \text{soit,} \quad R = \frac{U_e}{I_e} = (\bar{R} \pm u(R))$$

avec :

$$- \bar{R} = 460 \, \Omega$$

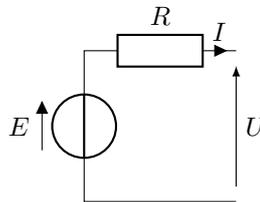
$$- u(R) = R \sqrt{\left(\frac{u(U_e)}{\bar{U}_e}\right)^2 + \left(\frac{u(I_e)}{\bar{I}_e}\right)^2} = 94 \, \Omega$$

Ainsi :

$$R = (46 \pm 9) \cdot 10^1 \, \Omega$$

**Q5.** *Étrange utilisation de linregress au lieu de polyfit...*

Cette fois, le rotor peut tourner, la force électromotrice  $E$  n'est pas nulle. On en déduit ainsi le circuit équivalent suivant :



La loi des mailles donne :

$$U = E + RI \quad \text{or, le voltmètre étant idéal} \quad I = 0$$

Et, d'après la question Q3., on a  $E = \phi\Omega$  et on peut écrire  $\Omega = n \frac{2\pi}{60}$  comme dans le script Python. Ainsi :

$$U = \phi\Omega$$

Ainsi, en traçant  $U$  en fonction de  $\Omega$ , on peut obtenir  $\phi$  la constante électromécanique de la machine à l'aide du coefficient directeur. On obtient directement :

$$\phi = 1,49 \, \text{Wb}$$

*Ici, on ne peut conclure directement sur la validité de la régression linéaire dans la mesure où le coefficient de corrélation n'est pas un indicateur suffisant pour cela. Toutefois, on pourrait effectuer un tracé et vérifier l'allure à l'œil nu pour confirmer cette validité.*

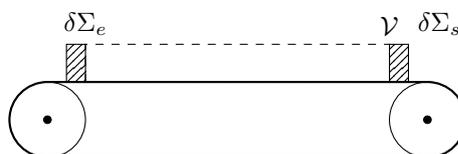
## Partie I - Le minerai d'uranium

### I.1 - Extraction

**Q6.** Conversion :

$$\underline{D_m} = \dot{m}_j \times \frac{1000}{24 \times 3600} = 0,29 \, \text{kg}$$

**Q7.** Pour effectuer le bilan, on considère que les roches forment un amas continu. On considère donc le volume de contrôle  $\mathcal{V}$  proposé dans l'énoncé :



Ce système est ouvert. On considère ainsi le système fermé  $\Sigma^*$  constitué :

— À  $t$  : du système contenu dans  $\mathcal{V}$  ainsi que de la masse entrant dans  $\mathcal{V}$  durant  $dt$  ;

— À  $t + dt$  : du système contenu dans  $\mathcal{V}$  ainsi que de la masse sortant de  $\mathcal{V}$  durant  $dt$ .  
La variation de quantité de mouvement de ce système  $\Sigma^*$  vaut ainsi, en régime stationnaire :

$$d\vec{p}^* = \delta\vec{p}_{\text{entrant}} - \delta\vec{p}_{\text{sortant}}$$

Ainsi, en projetant sur  $\vec{u}_x$  :

$$d\vec{p}^* \cdot \vec{u}_x = 0 - D_m dt v$$

Le système  $\Sigma^*$  n'étant soumis qu'à l'action du tapis sur les roches ( $-\vec{F}$  par principe des actions réciproques), le théorème de la quantité de mouvement en projection sur  $\vec{u}_x$  donne :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \vec{u}_x = -F$$

Ainsi :

$$\boxed{F = D_m v}$$

## I.2 - Vitesse de rotation du rotor du moteur

**Q8.** Une loi des mailles donne, en fonctionnement moteur :

$$U = E - RI$$

avec  $E = \phi\Omega_p$  soit :

$$\boxed{U = \phi\Omega_p - RI} \quad (\mathbf{E}_1)$$

**Q9.** Le système  $\Sigma$  est soumis à  $\Gamma_{em} = \phi I$ , au couple de frottements dont la composante selon  $\vec{u}_z$  est  $-\lambda\Omega$  ainsi qu'à l'action des roches sur le tapis dont le moment projeté sur  $\vec{u}_z$  est  $Fa = D_m va$ . Le théorème du moment cinétique scalaire autour de l'axe  $(O, \vec{u}_z)$  donne ainsi :

$$\frac{d\mathcal{L}_{(Oz)}}{dt} = \phi I - \lambda\Omega + D_m va$$

où  $\mathcal{L}_{(Oz)} = J\Omega$  est le moment cinétique de  $\Sigma$  autour de l'axe  $(O, \vec{u}_z)$ . En régime permanent, on obtient ainsi :

$$\boxed{\phi I + D_m va = \lambda\Omega_p} \quad (\mathbf{E}_2)$$

**Q10.** En injectant l'expression de  $I$  obtenue dans  $(\mathbf{E}_1)$ , on obtient :

$$U = \phi\Omega_p - R \frac{\lambda\Omega_p - D_m va}{\phi} \quad \text{soit,} \quad \boxed{\Omega_p = \frac{U\phi - RD_m av}{\phi^2 - R\lambda}}$$

Dans ce modèle, une augmentation du débit des roches a pour conséquence de ralentir la rotation des cylindres et donc la vitesse du tapis, c'est cohérent.

**Q11.** *Question pas claire : quel degré de détail est attendu ?*

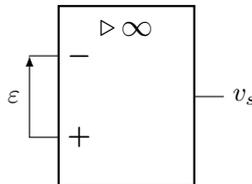
Un redresseur est un convertisseur AC/DC et un hacheur est un convertisseur DC/DC.

Le rôle du convertisseur AC/DC est d'adapter la puissance provenant du secteur (alternative) au moteur qui nécessite une puissance continue.

Le convertisseur DC/DC permet de contrôler la valeur de l'intensité du courant d'alimentation du moteur en jouant sur un paramètre du convertisseur (par exemple le rapport cyclique d'un hacheur).

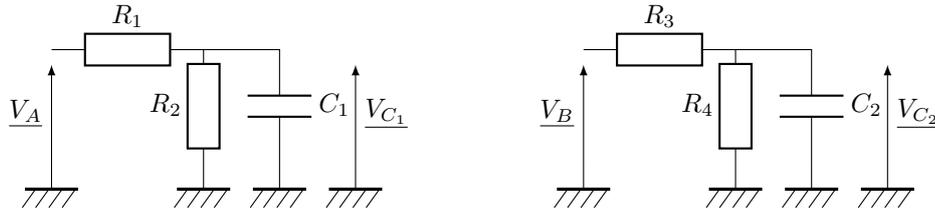
**Q12.** Un ALI idéal en régime linéaire est caractérisé par :

- Des courants de polarisation nuls  $i_{\ominus} = i_{\oplus} = 0$ .
- Un gain infini :  $\underline{H}_{\text{ALI}} = \frac{v_s}{\varepsilon} = 0$
- Aucune limite en vitesse de balayage



Tous les ALI comportent une rétroaction et celles-ci ont lieu sur la borne inverseuse, on peut donc supposer que le régime de fonctionnement des ALI est linéaire.

**Q13.** Les courants de polarisation des ALI étant nuls, on peut identifier deux ponts diviseurs de tension :



Un pont-diviseur de tension donne ainsi :

$$\underline{V_{C_1}} = \frac{\underline{Z}}{\underline{Z} + R_1} V_A = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{\underline{Z}}} V_A$$

où  $\underline{Z}$  est l'impédance équivalente à l'association de  $R_2$  et  $C_1$  en parallèle soit  $\underline{Z} = j\omega C_1 + \frac{1}{R_2} = \frac{1+j\omega R_2 C_1}{R_2}$ , donc :

$$\underline{V_{C_1}} = \frac{1}{1 + R_1 \frac{1+j\omega R_2 C_1}{R_2}} V_A \quad \text{soit} \quad \boxed{\underline{V_{C_1}} = \frac{\frac{R_2}{R_1+R_2}}{1 + j\omega \frac{R_1 R_2 C_1}{R_1+R_2}} V_A}$$

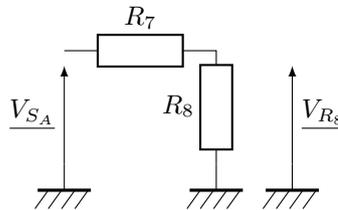
De même :

$$\boxed{\underline{V_{C_2}} = \frac{\frac{R_4}{R_3+R_4}}{1 + j\omega \frac{R_3 R_4 C_2}{R_3+R_4}} V_B}$$

**Q14.** Les deux amplificateurs sont montés en suiveurs, on a donc directement :

$$\boxed{V_{S_A} = V_{C_1}} \quad \text{et} \quad \boxed{V_{S_B} = V_{C_2}}$$

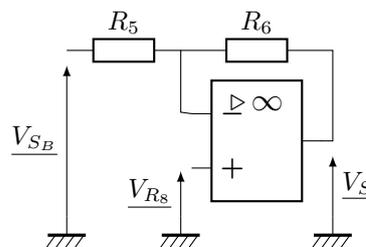
**Q15.** De même que plus haut, on identifie une structure pont-diviseur de tension :



Ainsi, on obtient :

$$\boxed{V_{R_8} = \frac{R_8}{R_7 + R_8} V_{S_A}}$$

**Q16.** La situation est équivalente à :



L'ALI étant idéal et fonctionnant en régime linéaire, le potentiel entre les résistances vaut  $\underline{V_{R_8}}$ , ainsi une loi des nœuds en termes de potentiels donne :

$$\frac{V_{R_8} - V_{S_B}}{R_5} + \frac{V_{R_8} - V_S}{R_6} = 0 \quad \text{soit} \quad \boxed{V_S = V_{R_8} \left( 1 + \frac{R_6}{R_5} \right) - \frac{V_{S_B}}{R_5} \frac{R_6}{R_5}}$$

**Q17. Erreur dans l'énoncé :  $R_2$  au lieu de  $R_3$ .**

La loi des nœuds appliquée en :

$$A \text{ donne } \underline{i} = \underline{i}_{R_1} + \underline{i}_{R_{shunt}}$$

$$B \text{ donne } \underline{i}_{R_{shunt}} = \underline{i} + \underline{i}_{R_3}$$

Ainsi, on déduit de la loi d'Ohm :

$$\underline{i} = \frac{V_{C_1} - V_A}{R_1} + \frac{V_A - V_B}{R_{shunt}}$$

Or, d'après ce qui précède en question Q13. et en utilisant les égalités de l'énoncé :

$$\underline{V}_A = \underline{V}_{C_1} \frac{1 + j\omega \frac{R_1 R_2 C_1}{R_1 + R_2}}{\frac{R_2}{R_1 + R_2}} \quad \text{et} \quad \underline{V}_B = \underline{V}_{C_2} \frac{1 + j\omega \frac{R_1 R_2 C_2}{R_1 + R_2}}{\frac{R_2}{R_1 + R_2}}$$

Soit :

$$\underline{i} = \frac{V_{C_1}}{R_1} \left( 1 - \frac{1 + j\omega \frac{R_1 R_2 C_1}{R_1 + R_2}}{\frac{R_2}{R_1 + R_2}} \right) + \frac{1}{R_{shunt}} \left( \underline{V}_{C_1} \frac{1 + j\omega \frac{R_1 R_2 C_1}{R_1 + R_2}}{\frac{R_2}{R_1 + R_2}} - \underline{V}_{C_2} \frac{1 + j\omega \frac{R_1 R_2 C_2}{R_1 + R_2}}{\frac{R_2}{R_1 + R_2}} \right)$$

Ce qui donne, d'après la question Q14. :

$$\underline{i} = \left\{ \underline{V}_{S_A} \left( \frac{R_{shunt}}{R_1} \left[ \frac{R_2}{R_1 + R_2} - 1 - j\omega \frac{R_1 R_2 C_1}{R_1 + R_2} \right] + \left[ 1 + j\omega \frac{R_1 R_2 C_1}{R_1 + R_2} \right] \right) - \underline{V}_{S_B} \left( 1 + j\omega \frac{R_1 R_2 C_2}{R_1 + R_2} \right) \right\} \frac{R_1 + R_2}{R_2 R_{shunt}}$$

Enfin, d'après les résultats de la question Q15. :  $\underline{V}_{R_8} = \frac{R_8}{R_7 + R_8} \underline{V}_{S_A}$ , ainsi :

$$\underline{i} = \left\{ \underline{V}_{R_8} \frac{R_7 + R_8}{R_8} \left( R_{shunt} \left[ -\frac{1}{R_1 + R_2} - j\omega \frac{R_2 C_1}{R_1 + R_2} \right] + \left[ 1 + j\omega \frac{R_1 R_2 C_1}{R_1 + R_2} \right] \right) - \underline{V}_{S_B} \left( 1 + j\omega \frac{R_1 R_2 C_2}{R_1 + R_2} \right) \right\} \frac{R_1 + R_2}{R_2 R_{shunt}}$$

Soit :

$$\underline{i} = \left\{ \underline{V}_{R_8} \frac{R_7 + R_8}{R_8} \left( \frac{R_1 + R_2 - R_{shunt}}{R_1 + R_2} + j\omega \frac{R_2 C_1}{R_1 + R_2} (R_1 - R_{shunt}) \right) - \underline{V}_{S_B} \left( 1 + j\omega \frac{R_1 R_2 C_2}{R_1 + R_2} \right) \right\} \frac{R_1 + R_2}{R_2 R_{shunt}}$$

Or, on a établi en question Q16. :

$$\underline{V}_S = \left( 1 + \frac{R_6}{R_5} \right) \underline{V}_{R_8} - \frac{R_6}{R_5} \underline{V}_{S_B}$$

On a donc :

$$\text{d'une part } \underline{i} = \alpha \underline{V}_{R_8} - \beta \underline{V}_{S_B} \quad \text{et, d'autre part } \underline{V}_S = \gamma \underline{V}_{R_8} - \delta \underline{V}_{S_B}$$

Et on veut :

$$\underline{V}_S = \frac{g_i}{1 + j\tau_i \omega} \underline{i} \quad \text{soit} \quad \gamma \underline{V}_{R_8} - \delta \underline{V}_{S_B} = \frac{g_i}{1 + j\tau_i \omega} (\alpha \underline{V}_{R_8} - \beta \underline{V}_{S_B})$$

On identifie :

$$\begin{cases} \alpha g_i = \gamma(1 + j\tau_i \omega) \\ \beta g_i = \delta(1 + j\tau_i \omega) \end{cases}$$

Ainsi, on obtient la relation :

$$\alpha \delta = \gamma \beta$$

Soit :

$$\frac{R_6}{R_5} \frac{R_7 + R_8}{R_8} \left( \frac{R_1 + R_2 - R_{shunt}}{R_1 + R_2} + j\omega \frac{R_2 C_1}{R_1 + R_2} (R_1 - R_{shunt}) \right) \frac{R_1 + R_2}{R_2 R_{shunt}} = \left( 1 + \frac{R_6}{R_5} \right) \left( 1 + j\omega \frac{R_1 R_2 C_2}{R_1 + R_2} \right) \frac{R_1 + R_2}{R_2 R_{shunt}}$$

**Attention, approximation forte :** On souhaite avoir un bon capteur, il faut pour cela  $\underline{i}_{shunt} \approx \underline{i}$  ce qui conduit à  $R_{shunt} \ll R_1, R_2$ .

On obtient ainsi :

$$\frac{R_6}{R_5} \frac{R_7 + R_8}{R_8} \left( 1 + j\omega \frac{R_1 R_2 C_1}{R_1 + R_2} \right) = \left( 1 + \frac{R_6}{R_5} \right) \left( 1 + j\omega \frac{R_1 R_2 C_2}{R_1 + R_2} \right)$$

Deux conditions en ressortent (en identifiant les parties réelle et imaginaire) :

$$\begin{cases} \frac{R_6}{R_5} \frac{R_7 + R_8}{R_8} = \left( 1 + \frac{R_6}{R_5} \right) \\ \omega \frac{R_1 R_2 C_1}{R_1 + R_2} = \omega \frac{R_1 R_2 C_2}{R_1 + R_2} \end{cases}$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} \frac{R_7}{R_8} = \frac{R_5}{R_6} \\ C_1 = C_2 \end{cases}$$

*Remarque : On aurait également pu utiliser l'approximation dès le début afin de ne pas transporter  $R_{shunt}$  dans tous les calculs.*

**Q18.** On réutilise une des relations de l'identification :

$$g_i \alpha = (1 + j\omega\tau_i)\gamma \quad \text{soit} \quad g_i \frac{R_7 + R_8}{R_8} \left( 1 + j\omega \frac{R_1 R_2 C_1}{R_1 + R_2} \right) \frac{R_1 + R_2}{R_2 R_{shunt}} = (1 + j\omega\tau_i) \frac{R_5 + R_6}{R_5}$$

Ainsi, en identifiant les parties réelle et imaginaire :

$$\begin{cases} g_i \frac{R_7 + R_8}{R_8} \frac{R_1 + R_2}{R_2 R_{shunt}} = \frac{R_5 + R_6}{R_5} \\ g_i \frac{R_7 + R_8}{R_8} \frac{R_1 + R_2}{R_2 R_{shunt}} \frac{R_1 R_2 C_1 \omega}{R_1 + R_2} = \frac{R_5 + R_6}{R_5} \tau_i \omega \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} g_i = \frac{R_2 R_{shunt}}{R_1 + R_2} \frac{R_6}{R_5} \\ \tau_i = \frac{R_1 R_2 C_1 \omega}{R_1 + R_2} \end{cases}$$

Ainsi, en travaillant à hautes-fréquences, on ne garde qu'une image de la valeur moyenne de  $\underline{i}$  car on obtient alors  $\underline{V_S} \approx g_i \underline{i}$ .

### I.3 - Extraction

**Q19.** Par conservation de l'élément U :  $\beta = 1$ .

Par conservation de O :  $\delta = 2$ .

Par conservation de H (ou de F) :  $\alpha = 4$ .

**Q20.** La loi de Hess permet d'écrire :

$$\Delta_r H^\circ = 2\Delta_f H^\circ(\text{H}_2\text{O}) + \Delta_f H^\circ(\text{UF}_4) - 4\Delta_f H^\circ(\text{HF}) - \Delta_f H^\circ(\text{UO}_2)$$

Ainsi, numériquement :

$$\Delta_r H^\circ = -246 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

Cette enthalpie de réaction est négative, ainsi la réaction est exothermique.

L'enthalpie libre standard de réaction est donnée par, dans l'approximation d'Ellingham :

$$\Delta_r G^\circ = \Delta_r H^\circ - T \Delta_r S^\circ$$

Et, elle est liée à la constante d'équilibre par :

$$\Delta_r G^\circ = -RT \ln K^\circ \quad \text{donc} \quad \Delta_r S^\circ = \frac{\Delta_r H^\circ}{T} + R \ln K^\circ$$

On en déduit, avec les données numériques de l'énoncé :

$$\underline{\Delta_r S^\circ = -189 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}}$$

L'entropie standard de réaction est négative, cela est cohérent avec la diminution de la quantité de matière d'espèces gazeuses au cours de la réaction.

**Q21.** *L'énoncé devrait dire « Exprimer » au lieu de « Estimer »*

On a, d'après ce qui précède :

$$K^\circ(T) = \exp\left(\frac{\Delta_r S^\circ}{R} - \frac{\Delta_r H^\circ}{RT}\right)$$

L'application numérique donne :

$$\underline{K^\circ(T = 6,5 \cdot 10^2 \text{ K}) = 7,5 \cdot 10^9}$$

**Q22.** *Qu'entend-t-on par « rigoureusement » ? Ici, on opte pour beaucoup de détail mais l'un des membres du CAP a utilisé des principes de modération. Que faire ?*

Influence de la température :

La loi de Van't Hoff donne :

$$\frac{d \ln K^\circ}{dT} = -\frac{\Delta_r H^\circ}{T^2}$$

Ainsi, comme  $\Delta_r H^\circ < 0$ , alors  $\frac{d \ln K^\circ}{dT} > 0$ , on en déduit donc qu'une augmentation de température conduit à une augmentation de  $K^\circ$ .

Il faut donc travailler à haute température pour favoriser la formation de  $\text{UF}_4$ .

Influence de la pression totale :

Le quotient de réaction est donné par :

$$Q_r = \frac{x(\text{H}_2\text{O})^2 p^{\circ 2}}{x(\text{HF})^4 P^2} \quad \text{où } P \text{ est la pression totale dans le réacteur}$$

On en déduit qu'une augmentation de pression conduit à une diminution de  $Q_r$ .

Il faut donc travailler à haute pression pour favoriser la formation de  $\text{UF}_4$ .

Au contraire, une dilution des gaz diminue davantage le dénominateur de  $Q_r$  que son numérateur et conduit donc à une augmentation de  $Q_r$ . Il faut donc éviter de diluer le gaz par un gaz inerte.

**Q23.** Avec les données, on a :

$$Q_r = \frac{x(\text{H}_2\text{O})^2}{x(\text{HF})^4}$$

On vient de voir qu'il était peu intéressant de diluer le gaz par un gaz inerte, on suppose donc que les seuls gaz en présence sont  $\text{H}_2\text{O}$  et  $\text{HF}$  d'où :

$$x(\text{H}_2\text{O}) + x(\text{HF}) = 1$$

Ainsi, d'après la loi d'action de masse :

$$K^\circ = \frac{(1 - x(\text{HF})_{\text{éq}})^2}{x(\text{HF})_{\text{éq}}^4} \quad \text{soit} \quad \pm \sqrt{K^\circ} = \frac{1 - x(\text{HF})_{\text{éq}}}{x(\text{HF})_{\text{éq}}^2}$$

On obtient donc :

$$\pm x(\text{HF})_{\text{éq}}^2 \sqrt{K^\circ} + x(\text{HF})_{\text{éq}} - 1 = 0$$

Les deux discriminants sont :

$$\Delta_{\oplus} = 1 + 4\sqrt{K^\circ} > 0 \quad \text{et} \quad \Delta_{\ominus} = 1 - 4\sqrt{K^\circ} < 0$$

On garde donc seulement  $\Delta_{\oplus}$  et on obtient les racines :

$$x(\text{HF})_{\text{éq}} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4\sqrt{K^\circ}}}{2\sqrt{K^\circ}}$$

Une des deux racines est négative, ainsi, numériquement :

$$\boxed{x(\text{HF})_{\text{éq}} = 0,3\%}$$

On en déduit donc :  $\boxed{x(\text{H}_2\text{O})_{\text{éq}} = 99,7\%}$ . Ces proportions sont cohérentes avec la valeur de la constante d'équilibre.

**Q24.** On retrouve une équation différentielle linéaire d'ordre 1 sans second membre :

$$\frac{dC_r}{dt}(t) + \lambda C_r(t) = 0$$

Les solutions sont de la forme :  $C_r(t) = Ae^{-\lambda t}$  avec  $A \in \mathbb{R}$ . Or, à l'instant initial,  $C_r(0) = A$  donc :

$$C_r(t) = C_r(0)e^{-\lambda t}$$

**Q25.** D'après l'énoncé :

$$C_r(T_{1/2}) = \frac{C_r(0)}{2} \quad \text{soit} \quad C_r(0)e^{-\lambda T_{1/2}} = \frac{C_r(0)}{2} \quad \text{ainsi} \quad T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

**Q26.** *Plusieurs raisonnements peuvent être valables ici.*

Sur une durée  $T_{1/2, \text{moy}}$ , l'énergie fournie par un tel réacteur vaut :

$$\mathcal{E}_r = \mathcal{P}T_{1/2, \text{moy}}$$

Le nombre d'atome fissionnés sur cette durée, est ainsi donné par :

$$N_f = \frac{\mathcal{E}_r}{\mathcal{E}} = \frac{\mathcal{P}T_{1/2, \text{moy}}}{\mathcal{E}}$$

Or, on peut considérer que la moitié de la quantité total d'atomes d'uranium contenus dans le mini-réacteur ont fissionné, ce qui permet d'obtenir la quantité totale d'Uranium dans le réacteur :

$$N_r = 2 \frac{\mathcal{P}T_{1/2, \text{moy}}}{\mathcal{E}} \quad \text{soit, une quantité de matière } n_r = 2 \frac{\mathcal{P}T_{1/2, \text{moy}}}{\mathcal{E} \mathcal{N}_A}$$

On en déduit enfin la masse d'Uranium contenue dans le réacteur :

$$m = 2 \frac{M_U \mathcal{P}T_{1/2, \text{moy}}}{\mathcal{E} \mathcal{N}_A}$$

L'application numérique donne, en prenant soin à convertir les eV en J :

$$m = 2 \frac{235,0 \times 2.10^3 \times 1.10^1}{200.10^6 \times 1,6.10^{-19} \times 6,02.10^{23}} = \underline{9,8.10^{-7} \text{ g}}$$

## Partie II - Centrale nucléaire

### II.1 - Fonctionnement global

**Q27.** La centrale échange  $Q_c$  avec la source chaude,  $Q_f$  avec la froide et un travail  $W$  avec les turbines. Le premier principe appliqué sur un cycle décrit par la machine donne :

$$Q_c + Q_f + W = 0 \quad (1)$$

Le rendement de Carnot étant obtenu pour une machine totalement réversible, on en déduit que l'inégalité de Clausius devient :

$$\frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} = 0 \quad (2)$$

La centrale est assimilée à un moteur, donc son rendement est donné par :

$$\eta = -\frac{W}{Q_c} \quad (3)$$

En divisant (1) par  $Q_c$ , on obtient :

$$1 + \frac{Q_f}{Q_c} = \eta$$

L'équation (2) donne :  $\frac{Q_f}{Q_c} = -\frac{T_f}{T_c}$  ainsi, on en déduit le rendement de Carnot :

$$\eta_C = \frac{T_c - T_f}{T_c}$$

Le rendement de la centrale vaut donc :  $\underline{\eta = 0,6 \times \frac{T_c - T_f}{T_c} = 30\%}$ .

**Q28.** Par définition du rendement :

$$\eta = -\frac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}_{\text{th,C}}} \quad \text{soit} \quad \boxed{\mathcal{P}_{\text{th,C}} = -\frac{\mathcal{P}}{\eta}}$$

**Q29.** Le premier principe industriel appliqué sur l'eau de la Moselle en contact avec le circuit tertiaire donne la variation d'enthalpie entre l'amont et l'aval de la centrale :

$$D_m(h_s - h_e) = \mathcal{P}_{\text{th,F}}$$

où  $D_m = D_V \rho_e$  est le débit massique du fleuve et  $\mathcal{P}_{\text{th,F}}$  est la puissance thermique échangée avec le fleuve.

En considérant l'eau comme une phase condensée :  $h_s - h_e = c_e \Delta T$  et d'après le premier principe :

$$\mathcal{P}_{\text{th,F}} = -\mathcal{P}_{\text{th,C}} - \mathcal{P} = \mathcal{P} \left( \frac{1}{\eta} - 1 \right)$$

On en déduit donc :

$$D_V \rho_e c_e \Delta T = \mathcal{P} \left( \frac{1}{\eta} - 1 \right) \quad \text{soit} \quad \boxed{\Delta T = \frac{\mathcal{P}}{D_V \rho_e c_e} \left( \frac{1}{\eta} - 1 \right)}$$

Ainsi, numériquement :  $\Delta T = 8,8 \text{ K}^1$ .

La valeur obtenue est élevée mais surévaluée dans la mesure où une partie des échanges thermiques avec la source froide sont effectués au niveau de la tour de refroidissement.

## II.2 - Puissance de la pompe du circuit secondaire

**Q30.** Le premier principe industriel appliqué entre l'entrée et la sortie de la pompe donne :

$$D_m(h_{s,\text{pompe}} - h_{e,\text{pompe}}) = \mathcal{P}_{\text{méca}}$$

De même que précédemment :  $h_{s,\text{pompe}} = c_e T_s$  et  $h_{e,\text{pompe}} = c_e T_e$ . Ainsi :

$$\boxed{D_m c_e (T_s - T_e) = \mathcal{P}_{\text{méca}}}$$

Numériquement, on obtient :  $\mathcal{P}_{\text{méca}} = 0,12 \text{ GW}$ .

**Q31.** Le rendement de la pompe est défini par :

$$\eta_{\text{pompe}} = \frac{\mathcal{P}_{\text{méca}}}{\mathcal{P}_{\text{élec}}} \quad \text{soit} \quad \boxed{\mathcal{P}_{\text{élec}} = \frac{\mathcal{P}_{\text{méca}}}{\eta_{\text{pompe}}}}$$

Numériquement, on obtient :  $\mathcal{P}_{\text{élec}} = 0,19 \text{ GW}$ .

**Q32.** *Est-ce au programme ?*

Les pertes de charges au cours de l'écoulement ont été négligées.

## Partie III - Stockage des déchets radioactifs

**Q33.** La loi de Fourier donne la relation suivante :

$$\vec{j}_{\text{cond}} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$$

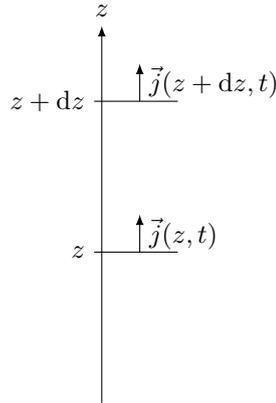
où :

- $\vec{j}_{\text{cond}}$  est la densité volumique de flux thermique exprimée en  $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$  .
- $\lambda$  est la conductivité thermique du matériau exprimée en  $\text{W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$  .
- $T$  est la température en  $\text{K}$  .

Physiquement, cette loi traduit le fait que le flux thermique est orienté dans le sens opposé au gradient de température, la conduction thermique se fait donc des zones chaudes vers les zones froides.

1. Ici,  $\mathcal{P} = 4 \times 1300 \text{ MW}$  d'après le document 1.

**Q34.** On considère une tranche d'argile d'épaisseur  $dz$  :



Le premier principe appliqué à cette tranche entre  $t$  et  $t + dt$  donne (la tranche n'est soumise à aucun travail et est immobile macroscopiquement) :

$$dU = \delta Q$$

où :

—  $dU = U(t + dt) - U(t) = S\rho_a dz(u(z, t + dt) - u(z, t))$  où  $u(z, t)$  est l'énergie interne massique de l'argile. On le considère comme une phase condensée incompressible donc :  $u(z, t) = c_a T(z, t)$  ainsi, à l'ordre 1 en  $dt$ , on obtient :

$$dU = S c_a \rho_a dz dt \frac{\partial T}{\partial t}(z, t)$$

—  $\delta Q = \vec{j}(z, t) \cdot \vec{u}_z S dt - \vec{j}(z + dz, t) \cdot \vec{u}_z S dt$  soit, à l'ordre 1 en  $dz$  :

$$\delta Q = -\frac{\partial j_z}{\partial z}(z, t) S dz dt$$

Or, d'après la loi de Fourier,  $j_z(z, t) = -\lambda_a \frac{\partial T}{\partial z}(z, t)$  donc :

$$\delta Q = S \lambda_a dz dt \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}(z, t)$$

Le premier principe devient donc :

$$S c_a \rho_a dz dt \frac{\partial T}{\partial t} = S \lambda_a dz dt \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda_a}{c_a \rho_a} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}}$$

On pose ainsi :  $\boxed{D_a = \frac{\lambda_a}{c_a \rho_a}}$  diffusivité thermique exprimée en  $\underline{\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}}$ .

Dans le cas stationnaire, l'équation devient :

$$\boxed{\frac{d^2 T}{dz^2} = 0}$$

**Q35.** En  $z = -L$ , le flux thermique est continu et provient directement des déchets. Chaque colis libère une puissance  $\mathcal{P}_0$  et les  $N$  colis diffusent une puissance à travers la surface  $S$  vers le haut et vers le bas, par définition du flux thermique :

$$j_z(-L^-, t) S = N \frac{\mathcal{P}_0}{2}$$

De plus, d'après la loi de Fourier :  $j_z(-L^+, t) = -\lambda_a \frac{\partial T}{\partial z}(-L^+, t)$ . La continuité du flux assure :

$$\frac{\partial T}{\partial z}(-L, t) = -\frac{N \mathcal{P}_0}{2 \lambda_a S}$$

En  $z = 0$ , on admet que le contact thermique est parfait, ainsi :  $T(0^-, t) = T(0^+, t) = T_{\text{ext}}$ .

**Q36.** En reprenant l'équation obtenue en régime stationnaire, on peut intégrer une première fois entre  $-L$  et  $z$  :

$$\frac{dT}{dz}(z) = \frac{dT}{dz}(-L) = -\frac{NP_0}{2\lambda_a S}$$

On intègre alors entre 0 et  $z$  :

$$T(z) - T(0) = -\frac{NP_0}{2\lambda_a S}z \quad \text{soit} \quad \boxed{T(z) = T_{\text{ext}} - \frac{NP_0}{2\lambda_a S}z}$$

Ainsi :  $T(-L) = T_{\text{ext}} + \frac{NP_0}{2\lambda_a S}L$

**Q37.** On cherche  $S$  tel que  $T(-L) = T_{\text{max}}$  :

$$S = \frac{NP_0}{2\lambda_a(T_{\text{max}} - T_{\text{ext}})}L$$

Ainsi, numériquement :  $S = 138 \text{ km}^2$ .

**Q38.** En attendant 30 ans, on diminue la quantité d'atomes radioactifs dans les échantillons. En ODG, on attend une demi-vie, on divise donc par deux le nombre d'atomes radioactifs environ, ce qui permet de diviser par deux la puissance émise et ainsi la surface nécessaire à l'enfouissement.

**Q39.** Il y a  $N_t + 1$  points donc :

$$\boxed{h = \frac{\Delta t}{N_t}}$$

**Q40.** En raisonnant en ordres de grandeur sur l'équation de diffusion, on obtient :

$$\frac{\Delta T}{\tau} = D_a \frac{\Delta T}{L^2} \quad \text{ainsi} \quad \boxed{\tau = \frac{L^2 \rho_a c_a}{\lambda_a}}$$

Ainsi, l'application numérique donne :  $\tau = 2,0 \cdot 10^1 \text{ s} = 6,3 \cdot 10^3 \text{ an}$

**Q41.** Par définition de la dérivée :

$$\frac{\partial T}{\partial z}(z, t) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{T(z + \frac{k}{2}, t) - T(z - \frac{k}{2}, t)}{k}$$

Soit, à l'ordre 1 en  $k$  :

$$\frac{\partial T}{\partial z}(z, t) \approx \frac{T(z + \frac{k}{2}, t) - T(z - \frac{k}{2}, t)}{k}$$

De même, pour la dérivée seconde :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}(z, t) \approx \frac{\frac{\partial T}{\partial z}(z + \frac{k}{2}, t) - \frac{\partial T}{\partial z}(z - \frac{k}{2}, t)}{k} \approx \frac{\frac{T(z + k, t) - T(z, t)}{k} - \frac{T(z, t) - T(z - k, t)}{k}}{k}$$

Soit :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}(z, t) \approx \frac{T(z + k, t) - 2T(z, t) + T(z - k, t)}{k^2}$$

Enfin, d'après l'approximation numérique donnée dans l'énoncé :  $\tilde{T}_n^i = T(z_n, t_i)$ , on en déduit donc :

$$\boxed{\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}(z_n, t_i) = \frac{\tilde{T}_{n+1}^i - 2\tilde{T}_n^i + \tilde{T}_{n-1}^i}{k^2}}$$

**Q42.** *Fonction assert hors-programme*

La ligne 12 permet d'assurer la stabilité du schéma numérique. Si la grandeur  $r$  venait à ne pas vérifier la condition imposée, le code renverrait un *bug*.

La ligne 15 permet d'imposer la valeur  $T_{\text{ext}} + \frac{NP_0}{2\lambda_a S}L$  en  $z = -L$  à l'instant initial. La ligne 20 permet de faire de même aux instants ultérieurs. Ces lignes correspondent à la gestion de la condition aux limites en flux thermique.

**Q43.** Le code de la ligne 19 complété est le suivant :

$$\text{_____} \text{_____} T[t+1][x] = T[t][x] + D\_a * h / k ** 2 * (T[t][x+1] - 2 * T[t][x] + T[t][x-1])$$

**Q44.** *Deuxième partie de question à revoir... ? Ce qui est dit ici n'est pas très fou fou...*

Entre des trois premiers instants, le gradient de température évolue davantage qu'entre  $\tau$  et  $3\tau$ . La convergence vers le régime permanent est ainsi d'autant plus lente que le système en est proche.

Une critique possible est que la personne qui a rédigé le code n'a pas précisé les unités des grandeurs utilisées en commentaires.