

MODÉLISATION ET INGÉNIERIE NUMÉRIQUE – CCINP – PSI

Modélisation d'une pompe d'assistance cardiaque

Proposition de correction.

Merci de signaler erreurs et améliorations à paul-henri.bricout2@laposte.net

Partie I - Modélisation du cœur

Les explications comportent une erreur pour l'étape CD : c'est la contraction du ventricule et non de l'oreillette qui expulse le sang vers l'artère aorte. Les explications ont été simplifiées en passant l'étape de remplissage de l'oreillette, puis du transfert de l'oreillette vers le ventricule.

I.1 - Modélisation d'un cœur sain

Q1 Le cœur est une pompe. Lors de l'étape CD, les explications indiquent que, à pression la plus élevée, le sang est évacué vers l'aorte (le volume diminue). Cela correspond bien au sens direct sur le diagramme $p(V)$.

$W_p = -\oint_{\Gamma_{th}} p dV$ représente le travail algébrique reçu par le sang lors d'un cycle. Il est positif pour une pompe.

NB : p est une surpression. La pression est $P = P_0 + p$, et $\oint_{\Gamma_{th}} P_0 dV = P_0 \oint_{\Gamma_{th}} dV = 0$.

Q2 On suppose l'évolution de la pression connue pendant un cycle, ce qui physiquement est loin d'être évident !

Schéma numérique dans chacun des trois cas :

$$W_{n-1} - W_n = p_{n-1} (V_n - V_{n-1}) \quad \text{pour la méthode des rectangles à gauche}$$

$$W_{n-1} - W_n = p_n (V_n - V_{n-1}) \quad \text{pour la méthode des rectangles à droite}$$

$$W_{n-1} - W_n = \frac{p_{n-1} + p_n}{2} (V_n - V_{n-1}) \quad \text{pour la méthode des trapèzes}$$

Il me semble que les noms des schémas Euler explicite et implicite sont liés à l'évaluation de solutions d'équations différentielles et non d'intégrales. Il n'y a ici rien d'implicite.

Q3 Si on approxime l'aire par celle d'un rectangle de hauteur $P_1 - P_0 = 0,7 \cdot 10^4 \text{ Pa}$ et de largeur $V_1 - V_0 = 70 \text{ mL} = 7 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3$, on obtient $W_p = 49 \cdot 10^{-2} \text{ J} \approx 0,5 \text{ J}$.

Conformément à la réponse de la Q1, c'est une aire et un travail positifs.

Q4 La partie droite du cœur fournit le même travail, soit au total 1 J par battement.

A raison de 60 battements par minute, soit 1 par seconde, cela correspond à une puissance transférée au sang de $P_{\text{Coeur}} = 1 \text{ W}$.

Q5 Avec un rendement $\eta = 20\% = 0,20$, la puissance consommée par le muscle est

$$P_{\text{Consommée}} = P_{\text{Coeur}} / \eta = 5 \text{ W}.$$

L'énergie pour un battement est donc 5 J , soit une énergie consommée par jour

$$5 \times 3600 \times 24 \text{ J} = 5 \times 24 = 120 \text{ Wh}.$$

Cela fait une fraction $x = \frac{120}{2400} = 0,05 = 5\%$ de l'apport journalier.

I.2 - Modélisation d'un cœur déficient

Q6 $V_{1h} - V_0 = 100\text{mL} - 70\text{mL} = 30\text{mL}$ contre $V_1 - V_0 = 70\text{mL}$ pour un cœur en bonne santé.

Pour compenser et garder le même débit, il faudrait augmenter la fréquence cardiaque à $f_{batt h} = 60.70/30 = 140 \text{ batt / mn}$.

Q7 La puissance fournie au sang par le ventricule gauche est cette fois

$$P_h = f(V_{1h} - V_0)(P_h - P_0) = 1 \times 30 \cdot 10^{-6} \times 0,7 \cdot 10^4 = 0,2\text{W} \text{ contre } 0,5\text{W} \text{ pour un ventricule sain.}$$

La pompe d'assistance doit donc fournir une puissance supplémentaire de $0,3\text{W}$ au sang.

(C'est conforme à ce qui est mentionné p9)

Partie II - Dimensionnement de l'actionneur

II.1 - Détermination du débit nécessaire d'appoint fourni par la pompe

Q8 D'après la question 6, la pompe doit fournir un volume de 40mL pour retrouver un volume total de 70mL par cycle.

Pour $f_{batt} = 60. \text{ batt / mn} = 1\text{Hz}$, cela correspond à $Q_v = 40\text{mL/s}$ au repos.

Q9 Pendant la systole, avec une fréquence de pompe de 70Hz , le volume pompé par seconde est 70 fois la cylindrée, donc $Q_1 = f_{p1} C_y$. Pendant la diastole, $Q_2 = f_{p2} C_y$.

$$\text{AN } Q_1 = 70 \times 6/7 = 60\text{mL/s} \text{ et } Q_2 = 40 \times 6/7 = 240/7 \approx 34\text{mL/s}$$

$$\text{Débit moyen : } Q = (t_1 Q_1 + (T - t_1) Q_2) / T = (0,3 \times 70 + 0,7 \times 40) \times 6/7 = 18 + 24 = 42\text{mL/s}$$

Le débit moyen souhaité est bien assuré.

Q10 Pour assurer le même débit moyen $Q = C_y f = 40\text{mL/s}$ avec la même cylindrée, il faudrait une fréquence $f = Q / C_y = 40 / (6/7) = 140/3 = 47\text{Hz}$ qui est bien proche de 50Hz .

II.2 - Modélisation de la force exercée par le fluide sur la membrane

Q11 On cherche une relation de la forme $F_{memb} = -h\dot{x}$ qui corresponde aux courbes $F_{memb}(t)$ et $\dot{x}(t)$ grossièrement en opposition de phase. En exploitant le maximum de $\dot{x}(t)$ à $t = 13\text{ms}$,

$$h = \frac{-F_{memb}(t = 13\text{ms})}{\dot{x}(t = 13\text{ms})} \approx \frac{20}{0,28} \approx 70\text{N.s.m}^{-1}, \text{ cohérent avec la valeur } h = 65\text{USI} \text{ en Q12.}$$

Q12 La force exercée par la membrane sur le fluide est $-\vec{F}_{memb}$ (actions réciproques).

$$\text{De } x(t) = X_0 \cos(2\pi f_{pm} t + \varphi) \text{ on déduit } \dot{x}(t) = -2\pi f_{pm} X_0 \sin(2\pi f_{pm} t + \varphi).$$

La puissance de la force exercée par la membrane est donc

$$P_{méca}(t) = -\vec{F}_{memb} \cdot \dot{x}(t) \vec{e}_x = +h\dot{x}^2(t) = +h(2\pi f_{pm} X_0)^2 \sin^2(2\pi f_{pm} t + \varphi).$$

La puissance moyenne est alors $P_{moy} = \langle P_{méca}(t) \rangle = 2h\pi^2 f_{pm}^2 X_0^2$.

$$\text{A.N. } P_{moy} = 2 \times 65 \times 10 \times 2500 \times 10^{-6} = 65 \times 5 \times 10^{-2} = 3,25 \approx 3\text{W} \text{ (1 chiffre significatif)}$$

Q13 La viscosité du sang peut expliquer que l'on mesure seulement une puissance

$$P_{hydro} = 0,3\text{W} \text{ en sortie de la pompe, ce qui correspond à un rendement}$$

$$r_{hydro} = P_{hydro} / P_{moy} \text{ de } 10\%.$$

II.3 - Détermination de l'effort d'induction nécessaire

Q14 NB La raideur k n'est définie qu'à la question suivante

La force de rappel du ressort s'exprime comme $\vec{F}_r = -k(\ell - \ell_0)\vec{e}_x$.

A l'équilibre du système constitué par la masse dans le référentiel de la pompe supposé galiléen, $\vec{F}_r + m\vec{g} = -k(\ell - \ell_0)\vec{e}_x - mg\vec{e}_x = \vec{0}$, d'où $\ell_{eq} = \ell_0 - mg/k$.

Q15 La pente lue en assimilant la courbe de la figure 14 à une droite dans l'intervalle

$[-1mm; +1mm]$ donne $k = \frac{25}{1} = 25N.mm^{-1}$.

Q16 En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la masse dans le référentiel de la pompe supposé galiléen :

$m\ddot{x}\vec{e}_x = \vec{F}_{memb} + \vec{F}_r + m\vec{g} + \vec{F}_{mag}$ soit après projection sur \vec{e}_x et simplification :

$$m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = F_{mag}$$

En notation complexe, $(-m\omega^2 + j\omega h + k)x = F_{mag}$ avec $x(t) = X_0 e^{j(\omega t + \phi)}$ et $F_{mag}(t) = F_0 e^{j\omega t}$.

On en déduit la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \frac{x}{F_{mag}} = \frac{1}{k + j\omega h - m\omega^2} = \frac{1/k}{1 + j\omega h/k - (m/k)\omega^2}$

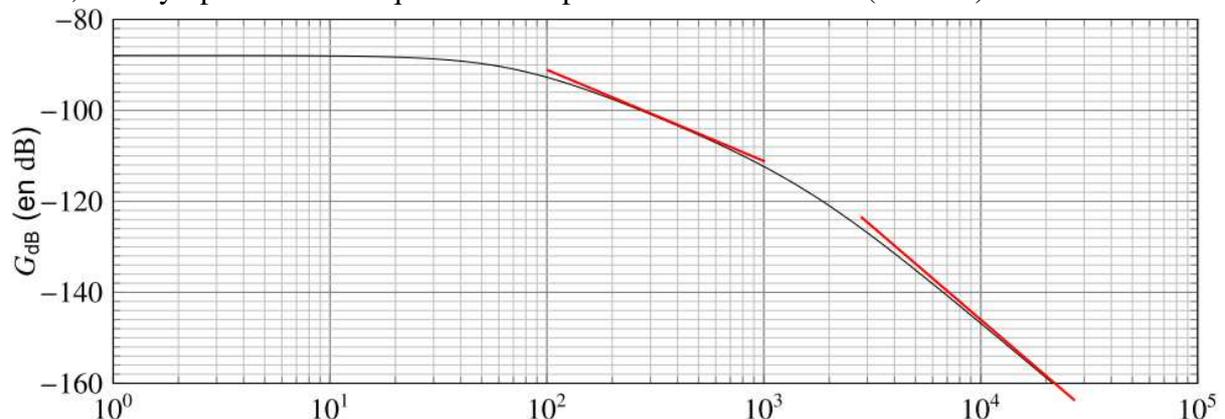
On passe à la forme canonique $H(j\omega) = \frac{H_0}{1 + 2\xi \frac{j\omega}{\omega_0} + \frac{(j\omega)^2}{\omega_0^2}}$

en posant $H_0 = 1/k$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $\xi = \frac{h\omega_0}{2k} = \frac{h}{2\sqrt{km}}$.

Q17 $G_{dB}(\omega) = 20 \log(H_0) - 10 \log \left[\left(1 - \omega^2 / \omega_0^2\right)^2 + 4\xi^2 \omega^2 / \omega_0^2 \right]$

$\Phi(\omega) = \arg(H_0) - \arg \left[1 + 2\xi \frac{j\omega}{\omega_0} + \frac{(j\omega)^2}{\omega_0^2} \right] = -\arccos \frac{1 - \omega^2 / \omega_0^2}{\sqrt{\left(1 - \omega^2 / \omega_0^2\right)^2 + 4\xi^2 \omega^2 / \omega_0^2}} \in [-\pi; 0]$.

Q18 La courbe $G_{dB}(\omega)$ est assimilable à une droite de pente -20dB/décade entre 100Hz et 1kHz, et l'asymptote haute fréquence a une pente de -40dB/décade ($f > 3kHz$).



Q19 On lit $G_{dB}(f = 70\text{Hz}) = G_{dB\max} - 3\text{dB}$: bande passante à -3dB du système est donc $[0; 70\text{Hz}]$. La plage de fréquence des oscillations de la membrane (40Hz à 70Hz) est donc dans la bande passante du système modélisé.

Q20 L'amplitude de la force magnétique est $F_0 = \frac{X_0}{|H(j\omega)|}$.

L'amplitude nécessaire de la force est donc $F_0 = \frac{X_0}{H_0} = \frac{10^{-3}}{4 \cdot 10^{-4}} = 25\text{N}$ à très basse fréquence.

Mais le gain est le plus faible à 70Hz et vaut $H_0 / \sqrt{2}$. L'amplitude nécessaire de la force est

alors $F_0 = \frac{X_0}{H_0 / \sqrt{2}} = \frac{10^{-3} \sqrt{2}}{4 \cdot 10^{-4}} \approx 35\text{N}$ à 70Hz.

C'est cohérent avec la marge de sécurité qui prévoit une force pouvant atteindre 50N.

II.4 - Dimensionnement du courant nécessaire en pic de puissance

Curieux de noter l'aimantation J . Mais distinguer plusieurs graphies de la lettre M est aussi difficile...

Q21 L'aimantation a partout même orientation et même sens.

$\mathcal{M} = J \times 2\pi R_c \varepsilon^2$ en approximant le volume de la couronne par $2\pi R_c \varepsilon^2$. $\mathcal{M} = 5,0\text{A.m}^2$

Q22 Maladresse de l'énoncé : sur les figures 16 et 17, θ est le premier angle des coordonnées sphériques. Mais dans la formule $d\ell = R_c d\theta$ donnée juste avant Q22, c'est l'angle des coordonnées cylindriques ... qui correspond au φ des coordonnées sphériques.

\mathcal{M}_ℓ est le moment magnétique par unité de longueur de la couronne, donc

$$\mathcal{M}_\ell = \frac{\mathcal{M}}{2\pi R_c} (= J \varepsilon^2).$$

Q23 On reprend l'expression du champ magnétique créé par $d\vec{\mathcal{M}} = \mathcal{M}_\ell d\vec{\ell} \vec{u}_x$

$$\vec{dB}(M) = \frac{\mu_0 \mu_r}{4\pi r^3} \left(3 \frac{\mathcal{M}_\ell d\vec{\ell} \vec{u}_x \cdot \vec{r}}{r^2} \vec{r} - \mathcal{M}_\ell d\vec{\ell} \vec{u}_x \right) \text{ avec } r^2 = R_c^2 + x^2$$

$$\vec{dB}(M) \cdot \vec{u}_x = \frac{\mu_0 \mu_r}{4\pi (R_c^2 + x^2)^{3/2}} \left(3 \frac{\mathcal{M}_\ell d\ell x}{R_c^2 + x^2} x - \mathcal{M}_\ell d\ell \right) = \frac{\mu_0 \mu_r \mathcal{M}_\ell d\ell}{4\pi (R_c^2 + x^2)^{3/2}} \left(3 \frac{x^2}{R_c^2 + x^2} - 1 \right)$$

$$\text{En posant } \eta = \frac{x^2}{R_c^2}, \text{ il vient } \vec{dB}(M) \cdot \vec{u}_x = \frac{\mu_0 \mu_r \mathcal{M}_\ell d\ell}{4\pi R_c^3 (1+\eta)^{3/2}} \left(3 \frac{\eta}{1+\eta} - 1 \right) = \frac{\mu_0 \mu_r \mathcal{M}_\ell d\ell}{4\pi R_c^3 (1+\eta)^{3/2}} \left(\frac{2\eta-1}{1+\eta} \right)$$

$$dB_x = \frac{\mu_0 \mu_r \mathcal{M}_\ell d\ell}{4\pi R_c^3} \frac{2\eta-1}{(1+\eta)^{5/2}} \text{ de la forme } dB_x = dB_0 \frac{2\eta-1}{(1+\eta)^{5/2}} \text{ avec}$$

$$dB_0 = \frac{\mu_0 \mu_r \mathcal{M}_\ell d\ell}{4\pi R_c^3} = \frac{\mu_0 \mu_r d\mathcal{M}}{4\pi R_c^3}$$

Q24 Coquille de l'énoncé : on parle d'un champ $B_x(\eta)$ mais la formule donne $\vec{B}_0(\eta)$, au lieu de $\vec{B}_x(\eta)$. En additionnant les contributions sur le tour de la couronne.

$$\vec{B}_x(\eta) = \oint_{\text{couronne}} dB_0 \frac{2\eta-1}{(1+\eta)^{5/2}} \vec{u}_x = \frac{\mu_0 \mu_r \mathcal{M} 2\pi R_c}{4\pi R_c^3} \frac{2\eta-1}{(1+\eta)^{5/2}} \vec{u}_x = \frac{\mu_0 \mu_r \mathcal{M}}{4\pi R_c^3} \frac{2\eta-1}{(1+\eta)^{5/2}} \vec{u}_x = B_0 \frac{2\eta-1}{(1+\eta)^{5/2}} \vec{u}_x$$

avec $B_0 = \frac{\mu_0 \mu_r \mathcal{M}}{4\pi R_c^3}$. N.B.: Au centre de la couronne, le champ magnétique est selon $-\vec{u}_x$.

Q25 Par définition, $\mathcal{M}_s = N_s \pi R_s^2 i(t)$. Plus précisément $\vec{\mathcal{M}}_s = N_s \pi R_s^2 i(t) \vec{u}_x$.

Le changement de coordonnées proposé est problématique. En effet on doit exprimer la force magnétique en calculant le gradient par rapport aux coordonnées de la bobine évoluant dans un champ magnétique permanent. Le changement de coordonnées considère que les bobines sont fixes et que la couronne, et son champ magnétique, se déplacent...

On commence par répondre aux questions 26 à 28 sans l'utiliser : on garde $x_H = 0$ et on utilise $x = x_M$ pour repérer les bobines.

Q26 On obtient le champ créé par la couronne au centre des spires en remplaçant la valeur

$$\eta = \frac{x^2}{R_c^2} \text{ par } \eta = \frac{(x_M + x_b/2)^2}{R_c^2} = \frac{(x + x_b/2)^2}{R_c^2} \text{ dans } \vec{B}(\eta) = B_0 \frac{2\eta-1}{(1+\eta)^{5/2}} \vec{u}_x \text{ (Q24).}$$

Q27 Le sens du courant est inversé dans la deuxième bobine, et on remplace η par

$$\frac{(x_M - x_b/2)^2}{R_c^2} = \frac{(x - x_b/2)^2}{R_c^2} = \gamma^2.$$

On utilise la fonction qui calcule le champ B(eta) :

$$E = -M_s * (B((x+x_b/2)**2/Rc**2) - B((x-x_b/2)**2/Rc**2))$$

NB Cette ligne exploite la structure des tableaux et la vectorisation de la fonction B(eta).

Q28 Quand on écrit que la force est $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}(\mathcal{E}) = -\frac{d\mathcal{E}}{dx_M} \vec{u}_x$, il s'agit de la force exercée

par la couronne sur les spires. Si on veut, comme à la figure 20, la force sur la couronne, il

faut, d'après la loi des actions réciproques, calculer $\vec{F}_{\text{mag}} = +\overrightarrow{\text{grad}}(\mathcal{E}) = +\frac{d\mathcal{E}}{dx_M} \vec{u}_x$.

On approxime $F(x_i) \approx \frac{\mathcal{E}(x_{i+1}) - \mathcal{E}(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$:

for i in range(len(x)-1):

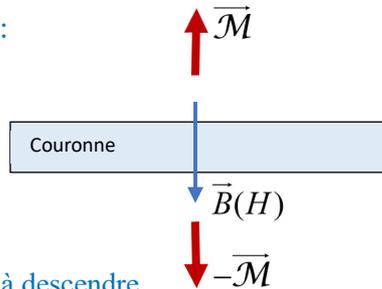
$$F_{\text{mag}}(i) = (E(i+1) - E(i)) / (x(i+1) - x(i))$$

Fmag(len(x)-1)=F(len(x)-2)

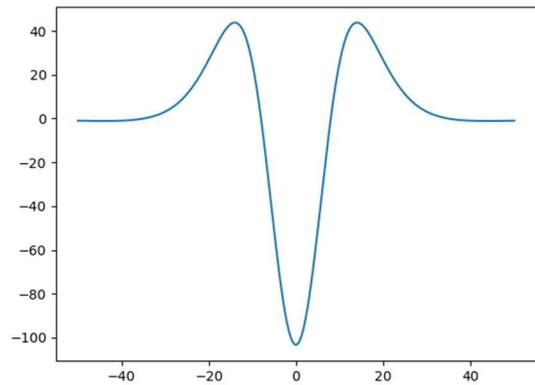
NB Pour éviter un dépassement mais avoir un tableau de même longueur, on recopie en dernière place l'avant dernière valeur.

On trouve le graphe ci-contre. Par rapport à celui de la figure 20 de l'énoncé, le signe est inversé, et les valeurs sont deux fois plus fortes.

Le signe négatif de la force en $x=0$ est toutefois cohérent avec la configuration :



La couronne tend à descendre.



Avec le changement de coordonnées problématique, on reprend les questions 26 à 28 avec cette fois : $x = x_H - x_M = \overline{MH}$ pour repérer la couronne et $x_H = 0$.

Q26 On obtient le champ créé par la couronne au centre des spires en remplaçant dans

$$\overline{B}(\eta) = B_0 \frac{2\eta - 1}{(1 + \eta)^{5/2}} \vec{u}_x \quad (\text{expression de la question 24}) \quad \eta = \frac{x^2}{R_c^2} \quad \text{par} \quad \eta = \frac{(x_M + x_b / 2)^2}{R_c^2}, \text{ c'est-à-dire}$$

dire $\eta = \frac{(-x + x_b / 2)^2}{R_c^2} = \gamma^2$. C'est vraisemblablement ce qui était attendu.

Q27 Le sens du courant est inversé dans la deuxième bobine, et on remplace η par

$$\frac{(x_M - x_b / 2)^2}{R_c^2} = \frac{(-x - x_b / 2)^2}{R_c^2} = \frac{(x + x_b / 2)^2}{R_c^2}.$$

On utilise la fonction qui calcule le champ $B(\eta)$:

$$E = -Ms * (B((x_M + x_b / 2)^2 / R_c^2) - B((x_M - x_b / 2)^2 / R_c^2))$$

Mais on fera le tracé en fonction de $x = \overline{MH} = -x_M$, donc

$$E = -Ms * (B((x - x_b / 2)^2 / R_c^2) - B((x + x_b / 2)^2 / R_c^2))$$

NB Cette ligne exploite la structure des tableaux et la vectorisation de la fonction $B(\eta)$.

Q28 Quand on écrit que la force est $\vec{F} = -\overline{\text{grad}}(\mathcal{E}) = -\frac{d\mathcal{E}}{dx_M} \vec{u}_x$, il s'agit de la force exercée

par la couronne sur les spires. Si on veut, comme à la figure 20, la force sur la couronne, il

faut, d'après la loi des actions réciproques, calculer $\overline{F}_{mag} = +\overline{\text{grad}}(\mathcal{E}) = +\frac{d\mathcal{E}}{dx_M} \vec{u}_x$.

Mais comme les énergies sont stockées par x croissant, c'est-à-dire par x_M décroissants, il

faut encore un changement de signe et on approxime $F(x_i) \approx \frac{\mathcal{E}(x_{i+1}) - \mathcal{E}(x_i)}{x_i - x_{i+1}}$:

```
for i in range(len(x)-1):
    Fmag(i) = (E(i+1)-E(i))/(x(i)-x(i+1))
Fmag(len(x)-1)=F(len(x)-2)
```

NB1 : Pour éviter un dépassement mais avoir un tableau de même longueur, on recopie en dernière place l'avant dernière valeur.

NB2 : On retrouve le même résultat final que dans la première proposition de corrigé, suite à deux changements de signe.

Q29 Au concours on ne pouvait exploiter que la courbe de l'énoncé :

On doit avoir $F_{mag} > 50N$ d'après le bas de la p13. C'est bien le cas dans l'intervalle

$x \in [-2,6mm; +2,6mm]$, aussi compatible avec une amplitude $X_0 = 1mm$.

L'intervalle pour avoir $F_{mag} > 35N$ calculée Q20 est encore plus large.

Ce graphe a été tracé avec l'intensité maximale de l'exigence 17, qui est suffisante. (En diminuant l'intensité, on diminue l'énergie d'interaction et la force).

Q30 $\varepsilon_1(x, i) = -\mathcal{M}_s \cdot B_0 \frac{2\gamma^2 - 1}{(1 + \gamma^2)^{5/2}}$ est proportionnelle à l'intensité $i(t)$ car $\mathcal{M}_s = N_s \pi R_s^2 i(t)$.

De même pour l'énergie totale (même intensité dans les deux bobines). Donc la force obtenue en dérivant par rapport à x est aussi proportionnelle à $i(t)$, de la forme $F_{mag}(x, i) = K_f(x)i(t)$

Pb : L'énoncé semble considérer $K_f(x)$ comme une constante, ce qui est une bonne approximation sur la plage d'oscillations $x \in [-1mm; +1mm]$.

En exploitant le maximum de la courbe Figure 20 : $K_f(x=0) = 60/3 = 20N \cdot A^{-1}$

Annexe : code Python utilisé pour tracer la courbe

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

Rc = 20e-3 # rayon de la couronne magnétique (en m)
epsilon = 2e-3 # épaisseur de l'aimant (en m)
Rs = 10e-3 # rayon de la spire (en m)
Ns = 200 # nombre de spires
xb = 10e-3 # distance entre les deux ensembles de spires (en m)
Aim = 1.0e7 # aimantation ( en A/m)
Vol = 2*np.pi*Rc*epsilon**2 # volume de l'aimant (en m**3)
# expression à déterminer :
M = Aim*Vol # moment magnétique (en A.m**2)
mu0 = 4*np.pi*1e-7 # perméabilité magnétique du vide en H/m
mur = 50 # perméabilité magnétique relative du milieu
# expression à déterminer :
Ml = M/2/np.pi/Rc # moment magnétique linéique (en A.m)
i = 3.0 # intensité du courant (en A)
# expression à déterminer :
Ms = Ns*i*np.pi*Rs**2 # moment magnétique de la spire (en A.m**2)
# expression à déterminer :
B0 = mu0*mur*M/4/np.pi/Rc**3
x = np.linspace(-5e-2, 5e-2, 1000) # positions sur l'axe de la spire
```

```

def B(eta) :
    return B0*(2*eta-1)/(1+eta)**(5/2)

# expression à déterminer :
# énergie d'interaction de l'ensemble des deux bobines
# avec la couronne magnétique
E = -Ms*( B((x+xb/2)**2/Rc**2)-B((x-xb/2)**2/Rc**2))
plt.figure('Energie')
plt.plot(x*1e3,E)
plt.show()

Fmag=np.zeros(len(x))
for k in range(len(x)-1) :
    Fmag[k]=(E[k+1]-E[k])/(x[k+1]-x[k])
Fmag[len(x)-1]=Fmag[len(x)-2]
plt.figure('Fmag')
plt.plot(x*1e3,Fmag)
plt.show()

# variante avec le changement de variable de l'énoncé:
# énergie d'interaction de l'ensemble des deux bobines
# avec la couronne magnétique
E = -Ms*( B((x-xb/2)**2/Rc**2)-B((x+xb/2)**2/Rc**2))
plt.figure('Energie')
plt.plot(x*1e3,E)
plt.show()

Fmag=np.zeros(len(x))
for k in range(len(x)-1) :
    Fmag[k]=(E[k+1]-E[k])/(x[k]-x[k+1])
Fmag[len(x)-1]=Fmag[len(x)-2]
plt.figure('Fmag')
plt.plot(x*1e3,Fmag)
plt.show()

```

Partie III - Fonction pulsatile : régime transitoire entre deux points de fonctionnement

III.1 - Modèle électrique

Q31 Par la loi des mailles : $e(t) + u(t) = 2\frac{R}{2}i(t) + 2\frac{L}{2}\frac{di}{dt}(t) = Ri(t) + L\frac{di}{dt}(t)$

III.2 - Modèle mécanique

Q32 En notation de Laplace :

$$\begin{cases} E(p) + U(p) = R.I(p) + Lp.I(p) \\ (mp^2 + hp + k)X(p) = K_f I(p) = F_{mag}(p) \\ E(p) = -K_c pX(p) \end{cases}$$

III.3 - Bouclage électromécanique du système

Q33 $A(p) = \frac{F_{mag}(p)}{E(p) + U(p)} = \frac{K_f}{R + Lp}$; $H(p) = \frac{X(p)}{F_{mag}(p)} = \frac{1}{mp^2 + hp + k}$; $B(p) = \frac{-E(p)}{X(p)} = K_c p$

Q34 En boucle fermée : $F(p) = \frac{A(p)H(p)}{1 - A(p)H(p)B(p)} = \frac{K_f}{(R + Lp)(mp^2 + hp + k) - K_f K_c p}$

Q35 Le dispositif fonctionne autour du point $x = 0$; $i = 0$.

On lit donc $L = 15mH$; $K_f = \frac{\Delta F_{mag}}{\Delta i} \approx \frac{120}{6} = 20N.A^{-1}$, cohérent avec Q30 ;

$K_c = 20V.sm^{-1}$ (ou N/A comme indiqué figure 23)

III.5 - Étude de la fonction de transfert du bouclage électromécanique

Q36 Par lecture, $p_1 \approx -140 s^{-1}$; $p_2 \approx -920 s^{-1}$; $p_3 \approx -10050 s^{-1}$.

Un système est stable si ses pôles (racine du dénominateur de sa fonction de transfert) sont négatifs ou complexes à partie réelle négative.

Ici les pôles sont tous réels négatifs donc le système est stable.

Q37 Sur la fig. 25, l'équation de la tangente à la courbe est $P_{tan}(p) = P'(u_0).(p - u_0) + P(u_0)$.

De même à l'étape $n+1$, l'équation de la tangente est $P_{tan}(p) = P'(u_n).(p - u_n) + P(u_n)$.

Cette tangente coupe l'axe des abscisses en $p = u_n - \frac{P(u_n)}{P'(u_n)}$, ce qui définit $u_{n+1} = u_n - \frac{P(u_n)}{P'(u_n)}$

Q38

```
9 | return(beta+2*gamma*p+3*delta*p**2 # dérivée
19 | while(abs(u[n]-u[n-1])/u[n-1]>er
20 |     u.append( u[n]-Pol(u[n])/dPol(u[n]) ) #voir Q37
25 | print(frequenceCassureNewton([-140,-920,-1050],P,derP,0.001)
    # on prend les valeurs lues des pôles comme pôles approximatifs
```

Q39 On factorise en utilisant les pôles :

$$F(p) = \frac{\alpha}{\left(1 + \frac{p}{2\pi f_1}\right)\left(1 + \frac{p}{2\pi f_2}\right)\left(1 + \frac{p}{2\pi f_3}\right)}$$

Q40 On lit une fréquence de coupure à -3dB d'environ $f_1 = 22\text{Hz} < f_a = 70\text{Hz}$.

Cela correspond a priori à une augmentation de constante de temps : le système bouclé est moins rapide : la performance 22 (Durée de changement du régime de fonctionnement) est affectée négativement.

Q41 Dans la plage de fonctionnement (40Hz à 70Hz), la courbe de gain est assimilable (supposée confondue) à une droite de pente -20dB/décade passant par le point ($f = f_1 ; G_{dB} = 20\log(\alpha)$) et donc d'équation : $G_{dB}(f) = 20\log(\alpha) - 20\log(f / f_1)$.

Cela correspond à $G_{dB}(f) = 20\log\left(\alpha \frac{f_1}{f}\right)$, c'est-à-dire $K(f) = \frac{\alpha f_1}{f}$.

Q42 En partant de $X_0 = K(f)U_0$ on veut garder X_0 fixe indépendamment de la fréquence.

Or $K(f) = \frac{\alpha f_1}{f}$.

Il faut donc une amplitude de tension proportionnelle à la fréquence : $U_0(f) = K_u \cdot f$ avec

$$K_u = \frac{X_0}{\alpha f_1}.$$

Q43 Le théorème de la valeur finale donne $\lim_{p \rightarrow 0} F(p) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x(t)}{U_0} = \alpha$.

Q44 On lit sur la figure 27 la valeur finale $x_\infty = 2,2\text{mm}$ et on en déduit

$$\alpha = \frac{x_\infty}{U_0} = \frac{2,2}{14} = 0,15\text{mm.V}^{-1}$$

$$\mathbf{Q45} \quad U_{1\text{max}} = \frac{X_0 f_{p1}}{\alpha f_1} = \frac{1 \times 70}{0,15 \times 22} = \frac{70}{3,3} \approx 20\text{V} \quad \text{et} \quad U_{2\text{max}} = \frac{X_0 f_{p2}}{\alpha f_1} = \frac{1 \times 40}{0,15 \times 22} = \frac{40}{3,3} = 12\text{V}.$$

L'exigence électrique 17, qui $U_{\text{max}} = 30\text{V}$ est ainsi vérifiée.

Q46 par lecture de la figure 28, l'amplitude des oscillations reste toujours supérieure à 0,9mm, ce qui est conforme au cahier des charges (exigence 7 amplitude minimal 0,9mm).

Q47 Figure 27 : on lit le temps de réponse à 5% (pour atteindre 2,1V) de $T_{5\%} = 25\text{ms}$, ce qui est la période $T(40\text{Hz}) = 25\text{ms}$ mais supérieur à la période d'oscillation à 70Hz

$T(70\text{Hz}) = 14\text{ms}$: ce critère n'est pas respecté.

Q48 Le critère 22 durée de changement inférieur à 1/fréquence finale n'est donc pas respecté.

Q49 Par lecture de la figure 28, l'amplitude des oscillations reste toujours de 1mm, avec un unique dépassement de moins de 0,1mm, ce qui est presque conforme au cahier des charges (exigence 7 amplitude entre 0,9 et 1mm).

Q50 Le temps de réponse de 12ms est cette fois inférieur à $T(70Hz) = 14ms$.

Sur la figure 29, l'amplitude reste entre 0,9mm et 1mm pour les régimes établis. Une unique fois l'amplitude est de 0,8mm (valeur minimale moins l'erreur de suivi tolérable de 0,1mm). Les critères d'amplitudes minimale et maximale sont respectés.

L'asservissement a permis de revenir dans les domaines des critères à respecter.

Q51 On estime graphiquement les déphasages pour avoir le facteur de puissance

	U _{max}	I _{max}	cosφ	P _{elec} =(1/2)U _{max} I _{max} .cosφ
40Hz diastole	5V	1A	$\cos(2\pi \cdot 0,5/5) = 0,8$	2W
70Hz systole	10V	2A	$\cos(2\pi \cdot 0,3/3) = 0,8$	8W

La puissance électrique moyenne est donc $P_{elec} = 0,7 \times 2 + 0,3 \times 8 = 3,8W$.

Q52 Avec un rendement hydraulique de 5%, on en déduit la puissance hydraulique d'environ 0,2W. C'est inférieur mais de l'ordre de grandeur de la puissance à fournir évoquée aux questions 7 et 13 qui était de 0,3W.