Correction du DM17

(d'après CCP PSI 2004 maths 1)

Remarque : on peut commencer par noter que comme par hypothèse, les fonctions f considérées sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$, on a $(f')^2$ continue sur $\mathbb{R}^+$ donc les fonctions de E_2 sont aussi les fonctions de E_0 pour lesquelles $(f')^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (donc les études en 0 sont inutiles).

Partie I :

1. La fontion arctan est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ (ce qui règle les questions de continuité par morceaux nécessaires aux questions d'intégrabilité des deux premières questions), $\arctan(0) = 0$ donc $\arctan \in E_0$.

De plus $\displaystyle\lim_{t\to 0}\left(\frac{\arctan t}{t}\right)^2 = 1$ donc $t \mapsto \left(\frac{\arctan t}{t}\right)^2$ est intégrable sur $]0,1]$; enfin, $\left|\frac{\arctan t}{t}\right|^2 \leqslant \frac{\pi^2}{4t^2}$ donc la fonction $t \mapsto \left(\frac{\arctan t}{t}\right)^2$ est intégrable sur $[1,+\infty[$. On a donc bien $\boxed{\arctan \in E_1}$

2. On a $(\arctan' t)^2 = \dfrac{1}{(1+t^2)^2}$ donc $(\arctan' t)^2 \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^4}$ donc $(\arctan')^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et $\boxed{\arctan \in E_2}$

3. On a $N_2(f)^2 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}$. La fonction tan est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ (donc bijective sur $\mathbb{R}^+$) donc, par changement de variable $t = \tan\theta$, on a $\mathrm{d}t = (1+\tan^2\theta)\,\mathrm{d}\theta$ et $N_2(f)^2 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{(1+\tan^2\theta)}{(1+\tan^2\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta$ donc on obtient $N_2(f)^2 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{4} + \left[\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$ donc $\boxed{N_2(f) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}}$

4. La fonction G_x est continue sur $]0,+\infty[$, on a $\displaystyle\lim_{t\to 0} G_x(t) = 1$ donc G_x est intégrable sur $]0,1]$ et $G_x(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc G_x est intégrable sur $[1,+\infty[$. On a donc bien $\boxed{G_x \text{ intégrable sur } \mathbb{R}^{+*}}$

5. a) On a $N_1(f)^2 = \displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{\arctan t}{t}\right)^2\mathrm{d}t$. Les deux fonctions $t \mapsto (\arctan t)^2$ et $t \mapsto \dfrac{-1}{t}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, de plus $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{-(\arctan t)^2}{t} = 0$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\frac{-(\arctan t)^2}{t} = 0$ donc, par intégration par parties, on obtient $N_1(f)^2 = \left[-\dfrac{(\arctan t)^2}{t}\right]_0^{+\infty} + \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{t}\times\frac{2\arctan t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$. On en déduit $\boxed{N_1(f)^2 = 2\theta(1)}$

b) $\boxed{\dfrac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)} = \dfrac{1}{1-x^2}\left(\dfrac{1}{1+t^2} - \dfrac{x^2}{1+x^2t^2}\right)}$

c) On en déduit la valeur de $\theta'(x)$, pour $x \neq 1$: $\theta'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}\Big[\arctan t - x\arctan(xt)\Big]_{t=0}^{t=+\infty} = \dfrac{\pi(1-x)}{2(1-x^2)}$ donc $\theta'(x) = \dfrac{\pi}{2(1+x)}$. Par continuité de θ' en 1 (admise par le texte), cette expression reste valable pour $x = 1$. On retrouve alors la valeur de θ : pour $x \geqslant 0$, on a $\theta(x) = \dfrac{\pi}{2}\ln(1+x) + \theta(0)$ et comme $\theta(0) = 0$, on a $\boxed{\theta(x) = \dfrac{\pi}{2}\ln(1+x) \text{ si } x \geqslant 0}$

d) On en déduit alors $\boxed{N_1(f) = \sqrt{\pi\ln(2)} \text{ et } \dfrac{N_1(f)}{N_2(f)} = 2\sqrt{\ln(2)}}$

Partie II

1. Si $t \geqslant 0$, on a $1+t^2 > 0$ et $t + \sqrt{1+t^2} > 0$ donc f est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$; on a aussi $f(0) = 0$ donc $f \in E_0$.

De plus $f'(t) = \dfrac{1+\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}{t+\sqrt{1+t^2}} = \boxed{\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} = f'(t)}$

On en déduit $f'(t)^2 \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$ donc $(f')^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et $\boxed{f \in E_2}$

Enfin, $N_2(f)^2 = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \Big[\arctan t\Big]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$ donc $\boxed{N_2(f) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}}$

2. On a $f(t) \underset{t\to 0}{=} \ln\left(t + 1 + \dfrac{t^2}{2} + o(t^2)\right) = \ln(1+t+o(t)) = t + o(t)$ donc $\boxed{f(t) \underset{t\to 0}{\sim} t}$

En $+\infty$, on a $f(t) = \ln(t) + \ln\left(1+\sqrt{1+\dfrac{1}{t^2}}\right)$ donc $\boxed{f(t) \underset{t\to 0}{\sim} \ln(t)}$ (le second terme tend vers $\ln(2)$ en $+\infty$ donc est négligeable devant $\ln(t)$ en $+\infty$).

3. On déduit de la question précédente $\lim_{t\to 0}\left(\frac{f(t)}{t}\right)^2=1$ et $\left(\frac{f(t)}{t}\right)^2 \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{(\ln t)^2}{t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$ donc $t\mapsto\left(\frac{f(t)}{t}\right)^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\boxed{f\in E_1}$

4. a) La fonction $g: t\mapsto \frac{-\ln t}{1-t^2}$ est continue sur $]0,1[$ et $\frac{-\ln t}{1-t^2}\underset{t\to 0}{\sim}(-\ln t)$ donc g est intégrable sur $\left]0,\frac{1}{2}\right]$.
De l'autre côté, on a $g(1-u)=\frac{-\ln(1-u)}{u(2-u)}\xrightarrow[u\to 0]{}\frac{1}{2}$ donc $\lim_1 g=\frac{1}{2}$ et g est intégrable sur $\left[\frac{1}{2},1\right[$ donc $\boxed{g \text{ est intégrable sur }]0,1[}$

b) Si $k\geqslant 1$, les fonctions $g_k: t\mapsto -t^{2k}\ln t$ sont prolongeables par continuité au segment $[0,1]$ donc intégrables sur $]0,1[$ et $g_0=-\ln$ est aussi intégrable sur $]0,1[$ donc $\boxed{g_k \text{ est intégrable sur }]0,1[\text{ pour } k\geqslant 0}$
Pour calculer J_k, on fait une intégration par parties : les fonctions ln et $t\mapsto\frac{t^{2k+1}}{2k+1}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$ et $\lim_{t\to 0}\ln(t)\frac{t^{2k+1}}{2k+1}=0$ car $2k+1\geqslant 1$ donc $J_k=\left[-\ln(t)\frac{t^{2k+1}}{2k+1}\right]_0^1+\int_0^1\frac{1}{t}\times\frac{t^{2k+1}}{2k+1}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2k+1}\int_0^1 t^{2k}\,\mathrm{d}t$ donc
$\boxed{J_k=\frac{1}{(2k+1)^2}}$

c) Si $t\neq 1$, on a $\sum_{k=0}^{n}t^{2k}=\frac{1-t^{2n+2}}{1-t^2}$ ce qui donne $\boxed{g(t)=\sum_{k=0}^{n}g_k(t)-\frac{t^{2n+2}\ln(t)}{1-t^2} \text{ si } t\in]0,1[}$

d) φ est continue sur $]0,1[$, $\lim_0\varphi=0$ et $\lim_1\varphi=\frac{1}{2}$ (déjà vu dans l'étude de g) donc, en posant $\varphi(0)=0$ et $\varphi(1)=\frac{1}{2}$, $\boxed{\text{la fonction } \varphi \text{ devient continue sur } [0,1]}$
On en déduit que φ est bornée sur le segment $[0,1]$: $|\varphi|\leqslant C$. On a alors $\left|\int_0^1\varphi(t)t^{2n+1}\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_0^1|\varphi(t)|t^{2n+1}\,\mathrm{d}t$ donc $\left|\int_0^1\varphi(t)t^{2n+1}\,\mathrm{d}t\right|\leqslant C\int_0^1 t^{2n+1}\,\mathrm{d}t=\boxed{\frac{C}{2n+2}}$

e) En intégrant l'égalité de la question **II.4.c**, on obtient (comme φ est continue sur $[0,1]$, toutes les questions d'intégrabilité ont été justifiées) : $J=\sum_{k=0}^{n}J_k+\int_0^1\varphi(t)t^{2n+1}\,\mathrm{d}t$ et d'après la majoration précédente, on a $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\varphi(t)t^{2n+1}\,\mathrm{d}t=0$, ce qui donne $J=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}J_k$, ce qui est la définition de $\boxed{J=\sum_{k=0}^{+\infty}J_k}$
Reste à calculer cette somme : on sépare les termes d'indices pairs et impairs dans une somme partielle de la série donnée $\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k^2}=\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{(2p)^2}+\sum_{p=0}^{n-1}\frac{1}{(2p+1)^2}=\frac{1}{4}\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p^2}+\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{(2p+1)^2}$. On a donc, compte tenu de $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$ (suite extraite), $J=\lim_{n\to+\infty}\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{(2p+1)^2}=\frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{4}\times\frac{\pi^2}{6}$ donc $\boxed{J=\frac{\pi^2}{8}}$

5. a) On réalise une intégration par parties : les fonctions f^2 et $t\mapsto\frac{-1}{t}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, $\frac{f(t)^2}{t}\underset{t\to 0}{\sim}t$ donc $\lim_{t\to 0}\frac{f(t)^2}{t}=0$ et $\frac{f(t)^2}{t}\underset{t\to+\infty}{\sim}\frac{(\ln t)^2}{t}\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$ donc $N_1(f)^2=\left[-\frac{f(t)^2}{t}\right]_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{2f(t)f'(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ ce qui donne, avec la valeur de f' trouvée, $\boxed{I=2\int_0^{+\infty}\frac{f(t)}{t\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t}$

b) On a $f(\operatorname{sh}x)=\ln\left(\operatorname{sh}x+\sqrt{1+\operatorname{sh}^2x}\right)=\ln\left(\operatorname{sh}x+|\operatorname{ch}x|\right)=\ln(\operatorname{sh}x+\operatorname{ch}x)=\ln\left(e^x\right)$ donc $\boxed{f(\operatorname{sh}x)=x}$
La fonction sh est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, si $t=\operatorname{sh}u$ alors $\mathrm{d}t=\operatorname{ch}u\,\mathrm{d}u$ donc, par changement de variable, $I=2\int_0^{+\infty}\frac{f(\operatorname{sh}u)}{\operatorname{sh}u\sqrt{1+\operatorname{sh}^2u}}\operatorname{ch}u\,\mathrm{d}u$; comme $\sqrt{1+\operatorname{sh}^2u}=\sqrt{\operatorname{ch}^2u}=|\operatorname{ch}u|=\operatorname{ch}u$, on trouve $\boxed{I=2\int_0^{+\infty}\frac{u}{\operatorname{sh}u}\,\mathrm{d}u}$
On recommence : la fonction $v\mapsto-\ln(v)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement décroissante sur $]0,1[$ donc si $u=-\ln v$ alors $\mathrm{d}u=-\frac{\mathrm{d}v}{v}$ et $I=2\int_1^0\frac{-\ln v}{\frac{v^{-1}-v}{2}}\times\frac{-1}{v}\,\mathrm{d}v=4\int_0^1\frac{-\ln v}{1-v^2}\,\mathrm{d}v=4J$. On en déduit $\boxed{I=\frac{\pi^2}{2}}$

c) On obtient donc $\boxed{N_1(f) = \dfrac{\pi}{\sqrt{2}} \text{ et } \dfrac{N_1(f)}{N_2(f)} = \sqrt{\pi}}$

Partie III

1. a) f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ donc admet un $\mathrm{DL}_1(0)$ (d'après la formule de Taylor-Young) : $f(t) \underset{0}{=} f(0) + \alpha t + o(t)$ donc $f(t) \underset{t\to 0}{=} \alpha t + o(t)$. On en déduit $\boxed{\lim\limits_0 g = 0 \text{ et } \lim\limits_0 h = \alpha}$

b) Par quotient, g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$; pour $t > 0$, $f(t) = \sqrt{t}g(t)$ donc $f'(t) = \sqrt{t}g'(t) + \dfrac{g(t)}{2\sqrt{t}}$ donc $\boxed{f'(t) - \sqrt{t}g'(t) = \dfrac{1}{2}h(t) \text{ pour } t > 0}$

c) On a $\lim\limits_0 h = \alpha$ donc $\lim\limits_{t\to 0} \sqrt{t}g'(t) = \lim\limits_0 \left(f' - \dfrac{1}{2}h\right)$, ie $\boxed{\lim\limits_{t\to 0} \sqrt{t}g'(t) = \dfrac{\alpha}{2}}$

$g'(t)g(t) = \sqrt{t}g'(t) \times h(t)$ donc $\boxed{\lim\limits_0 gg' = \dfrac{\alpha^2}{2}}$

d) Les fonctions f', $t \mapsto \sqrt{t}g'(t)$ et h sont continues sur $]0, x]$ et prolongeables par continuité en 0 donc sont toutes de carré intégrable sur $]0, x]$.
Si $t > 0$, on a $f'(t) = \sqrt{t}g'(t) + \dfrac{1}{2}h(t)$ donc $f'(t)^2 = \left(\sqrt{t}g'(t)\right)^2 + \sqrt{t}g'(t)h(t) + \dfrac{1}{4}h(t)^2$ et d'autre part, $\sqrt{t}g'(t)h(t) = g'(t)g(t) = \dfrac{1}{2}\left(g^2\right)'(t)$ donc on obtient $\displaystyle\int_0^x \sqrt{t}g'(t)h(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\Big[g(t)^2\Big]_0^x = \frac{1}{2}g(x)^2$ puis en intégrant entre 0 et x, $\boxed{\displaystyle\int_0^x f'(t)^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}g(x)^2 + \int_0^x \left(\sqrt{t}g'(t)\right)^2\mathrm{d}t + \frac{1}{4}\int_0^x h(t)^2\,\mathrm{d}t}$ car $\lim\limits_0 g = 0$.

2. a) Soit $f \in E_2$, on déduit de (R), $\displaystyle\int_0^x (h(t))^2\,\mathrm{d}t \leqslant 4\int_0^x (f'(t))^2\,\mathrm{d}t \leqslant 4\int_0^{+\infty} (f'(t))^2\,\mathrm{d}t$ car $(f')^2 \geqslant 0$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$. On en déduit que la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x (h(t))^2\,\mathrm{d}t$ est majorée sur $\mathbb{R}^{+*}$. Comme $h^2 \geqslant 0$, on en déduit que h^2 est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc $f \in E_1$, ce qui prouve $\boxed{E_2 \subset E_1}$

b) Si $f = \sin$ $(\in E_0)$, on a $h(t) = \dfrac{\sin t}{t}$ qui est continue sur $]0, +\infty[$; de plus $\lim\limits_0 (h^2) = 1$ donc h^2 est intégrable sur $]0, 1]$ et $h(t)^2 \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donc h^2 est intégrable sur $[1, +\infty[$, ce qui donne $\sin \in E_1$.
Par contre $f' = \cos$, donc on vérifie que $(f')^2$ n'est pas intégrable sur $]0, +\infty[$: $f'(t)^2 = \cos^2(t) = \dfrac{1 + \cos 2t}{2}$ donc $\displaystyle\int_\pi^x f'(t)^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]_\pi^x = \frac{x - \pi}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x$ n'a pas de limite en $+\infty$ donc $\sin \notin E_1$ ce qui confirme bien que $\boxed{E_1 \not\subset E_2}$

3. a) On a $E_2 \subset E_0$ par définition de E_2, $0 \in E_2$ et si $(f, g) \in E_2^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on a $(\alpha f' + \beta g')^2 = \alpha^2 (f')^2 + 2\alpha\beta f'g' + \beta^2 (g')^2$; $(f')^2$ et $(g')^2$ sont intégrables sur $\mathbb{R}^{+*}$ car f et g sont dans E_2 et $f'g'$ est intégrable d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz (produit de deux fontions de carrés intégrables). Ainsi $(\alpha f' + \beta g')^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\boxed{E_2 \text{ est un sous-espace vectoriel de } E_0}$

b) On a, d'après (R), $\displaystyle\int_0^x h(t)^2\,\mathrm{d}t \leqslant 2\int_0^x f'(t)^2\,\mathrm{d}t$ donc en faisant tendre x vers $+\infty$, on obtient $\boxed{N_1(f) \leqslant 2N_2(f)}$

c) f_n est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et vérifie $f_n(0) = 0$ donc $f_n \in E_0$. De plus $f_n'(t) = -e^{-t}\sin(nt) + ne^{-t}\cos(nt)$ donc $(f_n')^2$ est continue sur $[0, +\infty[$ et $f_n'(t)^2 \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donc $(f_n')^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc $\boxed{f_n \in E_2}$
On a $f_n'(t)^2 = e^{-2t}\left(\sin^2(nt) - 2n\sin(nt)\cos(nt) + n^2\cos^2(nt)\right) = e^{-2t}\left(\dfrac{1 + n^2}{2} - n\sin(2nt) + \dfrac{(n^2 - 1)\cos(2nt)}{2}\right)$ donc $f_n'(t)^2 = \dfrac{1 + n^2}{2}e^{-2t} - n\,\mathrm{Im}\left(e^{-2(1-in)t}\right) + \dfrac{n^2 - 1}{2}\,\mathrm{Re}\left(e^{-2(1-in)t}\right)$. Comme $\left|e^{-2(1-in)t}\right| = e^{-2t}$, la fonction $t \mapsto e^{-2(1-in)t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et on obtient $N_2(f_n)^2 = \dfrac{1 + n^2}{4} - n\,\mathrm{Im}\left(\dfrac{1}{2(1 - in)}\right) + \dfrac{n^2 - 1}{2}\,\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{2(1 - in)}\right)$ donc $N_2(f_n)^2 = \dfrac{1 + n^2}{4} - \dfrac{n^2}{2(1 + n^2)} + \dfrac{n^2 - 1}{2} \times \dfrac{1}{2(1 + n^2)}$ donc $\boxed{N_2(f_n) = \dfrac{n}{2}}$

d) On a $N_1(f_n)^2 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(nt)}{t}\right)^2 e^{-2t}\,\mathrm{d}t$; on pose $t = \dfrac{u}{n}$, $u \mapsto \dfrac{u}{n}$ est une bijection $\mathcal{C}^1$ strictement croissante de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$, et on obtient $N_1(f_n)^2 = n\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 e^{-u/n}\,\mathrm{d}u \leqslant n\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 \mathrm{d}u$ (intégrabilité déjà prouvée) donc $N_1(f_n) \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\sqrt{n}\right)$

S'il existait une constante $K > 0$ telle que $N_2 \leqslant KN_1$, on aurait $N_2(f_n) \leqslant KN_1(f_1)$, ie $\dfrac{n}{2} \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\sqrt{n}\right)$, ce qui est faux. Donc $\boxed{\text{une telle constante } K \text{ n'existe pas}}$

4. On commence par prouver que $t \mapsto \sqrt{t}g'(t)$, continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, est de carré intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ car, d'après (R), $\displaystyle\int_0^x \left(\sqrt{t}g'(t)\right)^2 \mathrm{d}t \leqslant \int_0^x (f'(t))^2 \,\mathrm{d}t \leqslant N_2(f)^2$. La fonction $t \mapsto (\sqrt{t}g'(t))^2$ étant positive, cette majoration prouve son intégrabilité sur $\mathbb{R}^{+*}$.
Les trois fonctions $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f'(t)^2 \,\mathrm{d}t$, $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \left(\sqrt{t}g'(t)\right)^2 \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^x h(t)^2 \,\mathrm{d}t$ admettent une limite finie en $+\infty$ donc g^2 admet une limite l en $+\infty$. Comme $f \in E_2 \subset E_1$, g^2 est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$, ce qui impose $l = 0$. On en déduit $\boxed{\lim\limits_{+\infty} g = 0}$