PSI2 pour lundi 18 mars 2024

DM18

Notations :

Soient n et p deux entiers naturels non nuls, $\mathbb{K}$ l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Notons $\mathbb{K}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.
I_n la matrice identité d'ordre n.

Pour $P \in \mathbb{K}[X]$, on note $Z_{\mathbb{K}}(P)$ l'ensemble des racines de P qui sont dans $\mathbb{K}$, c'est-à-dire l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{K}$ qui sont tels que : $P(\lambda) = 0$.

On dit que P est unitaire si P est non nul et si son coefficient dominant est égal à 1.

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\mathrm{Tr}(A)$ la trace de A, ${}^tA$ la matrice transposée de A, $\det(A)$ le déterminant de A et $\mathcal{X}_A$ le polynôme caractéristique de A, c'est-à-dire $\mathcal{X}_A(X) \in \mathbb{K}[X]$ tel que :

$$\text{pour tout } \lambda \in \mathbb{K}, \mathcal{X}_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A).$$

L'ensemble $Z_{\mathbb{K}}(\mathcal{X}_A)$ est noté $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$.

Pour $x = (x_1, \ldots, x_n)$ dans $\mathbb{K}^n$, on définit $A\,x$ comme étant l'élément $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que : $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on note $\mathrm{Re}(z)$ la partie réelle de z, $|z|$ le module de z et $\overline{z}$ le complexe conjugué de z.

Définitions

Pour $P \in \mathbb{K}[X]$, on dit que P est stable si :

$$\text{pour tout } \lambda \in Z_{\mathbb{C}}(P),\ \mathrm{Re}(\lambda) < 0.$$

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on dit que A est stable si $\mathcal{X}_A$ est stable.

PARTIE I : STABILITÉ DANS DES CAS PARTICULIERS

Soient a et b deux réels. On note $P(X) = X^2 + aX + b$ et $\Delta = a^2 - 4b$.

On note z_1 et z_2 deux nombres complexes tels que : $P(X) = (X - z_1)(X - z_2)$.

Soit $Q(X) = X^3 + X^2 + X + 1$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $a = -(z_1 + z_2)$ et $b = z_1 z_2$.

2. On suppose dans cette question que $\Delta > 0$.

a) Vérifier que si P est stable, alors $a > 0$ et $b > 0$.

b) Montrer réciproquement que si $a > 0$ et $b > 0$, alors P est stable.

3. On suppose dans cette question que $\Delta = 0$.
Montrer que P est stable si et seulement si $a > 0$ et $b > 0$.

4. On suppose dans cette question que $\Delta < 0$.

a) Justifier que $z_2 = \overline{z_1}$.

b) Montrer que P est stable si et seulement si $a > 0$ et $b > 0$.

5. On suppose dans cette question que $n = 2$ et que $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Exprimer $\mathcal{X}_A$ en fonction de $\mathrm{Tr}(A)$ et $\det(A)$.

b) Établir que A est stable si et seulement si $\mathrm{Tr}(A) < 0$ et $(-1)^n \det(A) > 0$.

6. On suppose dans cette question que $n = 3$.

a) Trouver les racines complexes de Q.

b) Vérifier que $\mathrm{Tr}(B) < 0$ et que $(-1)^n \det(B) > 0$.

c) Montrer que ni Q ni B ne sont stables.

PARTIE II : NORME SUBORDONNÉE ET MESURE DE LOZINSKIĬ

Soit n un entier naturel non nul. Dans toute cette partie, on note $\| \ \|$ une certaine norme sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^n$.

On définit l'ensemble : $\mathcal{B} = \{x \in \mathbb{K}^n \text{ tel que } \|x\| = 1\}$.

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit : $|||A||| = \sup\limits_{x \in \mathcal{B}} (\|Ax\|)$ (l'existence de cette borne supérieure sera établie à la question II.1.c).

1. a) Vérifier que l'application $x \mapsto \|Ax\|$ est continue sur $\mathbb{K}^n$.

b) Montrer l'existence de $x_0 \in \mathcal{B}$ tel que : $\forall x \in \mathcal{B}, \|Ax\| \leqslant \|Ax_0\|$.

Cela justifie donc la définition de $|||A||| = \sup\limits_{x \in \mathcal{B}} (\|Ax\|)$ et on a alors $|||A||| = \|Ax_0\|$.

c) Montrer que $|||I_n||| = 1$.

d) Montrer que l'application $A \mapsto |||A|||$ définit ainsi une norme $|||\ |||$ sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui s'appelle la norme subordonnée à $\|\ \|$: en effet, elle dépend du choix de la norme $\|\ \|$.

e) Établir que pour tout $x \in \mathbb{K}^n$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a : $\|Ax\| \leqslant |||A|||.\|x\|$.

f) Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a :

$$|||A||| - |||B||| \leqslant |||A - B||| \qquad \text{et} \qquad |||AB||| \leqslant |||A||| \cdot |||B|||.$$

2. Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a : $\mathrm{Re}(\lambda) = \lim\limits_{u \to 0^+} \left(\dfrac{|1 + u\lambda| - 1}{u} \right)$.

3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On se propose dans cette question de montrer l'existence du réel :

$$\mu(A) = \lim_{u \to 0^+} \left(\frac{|||I_n + uA||| - 1}{u} \right)$$

Ce réel est appelé mesure de Lozinskiĭ de A (il dépend du choix de la norme initiale).

Pour $u > 0$, on note $\mu(A, u) = \dfrac{|||I_n + uA||| - 1}{u}$.

a) Montrer que pour tout u et v éléments de $\mathbb{R}_+^*$:

$$\mu(A, u) - \mu(A, v) = |||u^{-1} I_n + A||| - |||v^{-1} I_n + A||| - (u^{-1} - v^{-1}).$$

b) En déduire que si $0 < u \leqslant v$, alors $\mu(A, u) - \mu(A, v) \leqslant 0$.

c) Vérifier que pour tout $u > 0$, on a : $-|||A||| \leqslant \mu(A, u) \leqslant |||A|||$.

d) En déduire l'existence du réel $\mu(A) = \lim\limits_{u \to 0^+} (\mu(A, u))$.

4. On suppose dans cette question que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$.

a) Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{C}^n$ tel que $Ax = \lambda x$, $\|x\| = 1$ et puis que, pour tout réel u strictement positif, on a : $\|((I_n + uA)x)\| = |1 + u\lambda|$.

b) En déduire que $\mathrm{Re}(\lambda) \leqslant \mu(A)$.

c) Donner une condition suffisante sur $\mu(A)$ pour que A soit stable.

Le résultat principal de cette partie II est que :

$$\text{pour tout } \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A), \quad \mathrm{Re}(\lambda) \leqslant \mu(A)$$

où

$$\mu(A) = \lim_{u \to 0^+} \left(\frac{|||I_n + uA||| - 1}{u} \right).$$

PARTIE III : NORMES ET MESURES DE LOZINSKIĬ ASSOCIÉES

Dans cette partie, à tout élément $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{C}^n$, on associe la matrice-colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. De plus, si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, on note $\overline{X} = \begin{pmatrix} \overline{x_1} \\ \vdots \\ \overline{x_n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et ${}^tX = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{C})$.

On munit $\mathbb{C}^n$ de la norme définie par :

$$\forall x \in \mathbb{C}^n, \|x\|_2 = \left({}^t\overline{X}X\right)^{1/2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}.$$

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note alors $|||A|||_2$ et $\mu_2(A)$ les deux réels définis par :

$$|||A|||_2 = \sup_{x \in \mathcal{B}_2} (\|Ax\|_2) \quad \text{où} \quad \mathcal{B}_2 = \left\{x \in \mathbb{C}^n \text{ tel que } \|x\|_2 = 1\right\}.$$

$$\text{et } \mu_2(A) = \lim_{u \to 0^+} \left(\frac{|||I_n + uA|||_2 - 1}{u} \right).$$

Dans toute cette partie, on désigne par A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{C}^n$ et pour tout $u > 0$:

$$\|(I_n + uA)x\|_2^2 = \|x\|_2^2 + u\,{}^t\overline{X}({}^tA + A)X + u^2\ {}^t\overline{X}\,{}^tAAX.$$

2. Justifier qu'il existe $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et des réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tels que $\alpha_1 \geqslant \cdots \geqslant \alpha_n$ et

$${}^tA + A = M \begin{pmatrix} \alpha_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \alpha_n \end{pmatrix} {}^tM.$$

3. On suppose dans toute cette question que $x \in \mathbb{C}^n$ et $\|x\|_2 = 1$. On pose $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = {}^tMX.$

a) Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2 = 1.$

b) Vérifier que $\|(I_n + uA)x\|_2^2 = 1 + u \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i |y_i|^2 + u^2\,{}^t\overline{X}\,{}^tAAX.$

c) Montrer l'existence de deux réels γ et δ tels que, pour tout $x \in \mathbb{C}^n$ vérifiant $\|x\|_2 = 1$, on ait :

$$\gamma \leqslant {}^t\overline{X}\,{}^tAAX \leqslant \delta.$$

On pourra commencer par vérifier la continuité de l'application $\varphi : X \mapsto {}^t\overline{X}\,{}^tAAX.$

d) Montrer que pour tout γ et δ choisis comme en III.2.c, on a, pour tout $u > 0$:

$$\sqrt{1 + \alpha_1 u + \gamma u^2} \leqslant |||I_n + uA|||_2 \leqslant \sqrt{1 + \alpha_1 u + \delta u^2}.$$

e) En déduire que $\mu_2(A) = \dfrac{\alpha_1}{2} = \max \left\{ \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \lambda \in \operatorname{Sp}\left(\dfrac{{}^tA + A}{2}\right) \right\}.$

4. Soit H une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible. Pour $x \in \mathbb{C}^n$, on pose $\|x\|_H = \|Hx\|_2$.

a) Vérifier que l'on définit ainsi une norme sur $\mathbb{C}^n$.

b) Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $|||A|||_H = |||HAH^{-1}|||_2$.

c) En déduire que, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a : $\mu_H(A) = \mu_2(HAH^{-1})$.

PARTIE IV : UN CRITÈRE DE STABILITÉ EN DEGRÉ 3

Soient a, b et c trois réels. On considère le polynôme réel P unitaire de degré 3 écrit sous la forme :

$$P(X) = X^3 + aX^2 + bX + c.$$

On dit que P vérifie la propriété $\mathcal{H}$ si

$$a > 0 \quad b > 0, \quad c > 0 \quad \text{et} \quad ab - c > 0.$$

Par le théorème de D'Alembert-Gauss, on note z_1, z_2 et z_3 trois nombres complexes tels que :

$$P(X) = (X - z_1)(X - z_2)(X - z_3).$$

1. Montrer que : $a = -(z_1 + z_2 + z_3)$, $b = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1$, $c = -z_1z_2z_3$ et $ab - c = -z_1^2z_2 - z_1^2z_3 - z_2^2z_1 - z_2^2z_3 - z_3^2z_1 - z_3^2z_2 - 2z_1z_2z_3$.

2. Montrer que l'une des racines de P est un nombre réel.

On suppose dans toute la suite de cette partie que z_1 est un réel qui sera noté α_1 et que z_2 et z_3 s'écrivent sous la forme $z_2 = \alpha_2 + i\beta_2$ et $z_3 = \alpha_3 + i\beta_3$ avec des réels α_2, α_3, β_2 et β_3.

3. On suppose dans cette question que $\beta_2 = 0$.

a) Montrer que $\beta_3 = 0$.

b) Montrer que si P est stable, alors P vérifie la propriété $\mathcal{H}$.

4. On suppose dans cette question que $\beta_2 \neq 0$.

a) Montrer que $\alpha_3 = \alpha_2$ et que $\beta_3 = -\beta_2$.

b) Vérifier que : $a = -(\alpha_1 + 2\alpha_2)$, $b = 2\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2 + \beta_2^2$, $c = -\alpha_1\left(\alpha_2^2 + \beta_2^2\right)$ et $ab - c = -2\alpha_2\left(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \beta_2^2\right) - 4\alpha_1\alpha_2^2$.

c) Montrer que si P est stable, alors P vérifie la propriété $\mathcal{H}$.

5. Montrer que si P vérifie la propriété $\mathcal{H}$, alors $\mathrm{Re}(z_1), \mathrm{Re}(z_2)$ et $\mathrm{Re}(z_3)$ sont non nuls.

6. On suppose dans cette question que P vérifie la propriété $\mathcal{H}$.

On pose alors $A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -c' & 0 & 1 \\ 0 & -b' & -a' \end{pmatrix}$ avec $a' = a$, $b' = \dfrac{ab - c}{a}$ et $c' = \dfrac{c}{a}$ si bien que a', b' et c' sont trois réels strictement positifs.

On note H la matrice diagonale inversible suivante : $H = \begin{pmatrix} \sqrt{a'b'c'} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{a'b'} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{a'} \end{pmatrix}$.

On pose $B' = HA'H^{-1}$.

a) Montrer que $\mathcal{X}_{A'}(X) = P(X)$.

b) Calculer explicitement B' et vérifier que : $\dfrac{{}^tB' + B'}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix}$.

c) En déduire que $\mu_H(A') = 0$.

d) En conclure que P est stable.