

Fonctions vectorielles et équations différentielles

On considère I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points distincts et n un entier naturel non nul. On s'intéresse dans ce chapitre à des fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Interprétation : soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$

- ◇ le couple (I, f) est une courbe paramétrée tracée dans $\mathbb{R}^n$.
- ◇ l'ensemble $\Gamma = f(I) = \{u \in \mathbb{R}^n \mid \exists t \in I, u = f(t)\}$ est le support de la courbe paramétrée par (I, f)

I Dérivation des fonctions vectorielles d'une variable réelle

1. Dérivée ponctuelle

Définition : Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ et t_0 un point de I . Si la fonction $h \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{1}{h}(f(t_0 + h) - f(t_0))$ admet une limite en 0, on dit que f est **dérivable en t_0** . Dans ce cas, on note

$$f'(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}(f(t_0 + h) - f(t_0))$$

le **vecteur dérivé** de f en t_0 .

Remarque(s) :

(I.1) f est dérivable en t_0 si et seulement si la fonction $\tau_{t_0} : \begin{cases} I \setminus \{t_0\} & \rightarrow \mathbb{R}^n \\ t & \mapsto \frac{1}{t - t_0}(f(t) - f(t_0)) \end{cases}$ est prolongeable par continuité en t_0 .

Propriété [I.1] : Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $t_0 \in I$. Alors f est dérivable en t_0 si et seulement si f admet un DL₁(t_0), ie si et seulement si il existe $a \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$f(t_0 + h) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(t_0) + ha + o(h)$$

Conséquence [I.2] : Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $t_0 \in I$. Si f est dérivable en t_0 alors f est continue en t_0 .

Propriété [I.3] : Soient $t_0 \in I$, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$ et $f_1, \dots, f_n$ les fonctions de I dans $\mathbb{R}$ telles que $\forall t \in I, f(t) = \sum_{i=1}^n f_i(t)e_i$. Alors f est dérivable en t_0 si et seulement si $f_1, \dots, f_n$ sont dérivables en t_0 .

Dans ce cas, on a $f'(t_0) = \sum_{i=1}^n f'_i(t_0)e_i$.

2. Fonctions dérivables sur I

Définition : Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$. On dit que f est **dérivable sur** I si f est dérivable en tout point t_0 de I . Dans ce cas, on note f' la **fonction dérivée de** f définie par

$$\begin{aligned} f' : I &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t_0 &\longmapsto f'(t_0) \end{aligned}$$

On note $\mathcal{D}(I, \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions dérivables sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Remarque(s) :

- (I.2) La fonction f' est, comme f , une fonction à valeurs vectorielles : $f'(I) \subset \mathbb{R}^n$.
- (I.3) On a $\mathcal{D}(I, \mathbb{R}^n) \subset \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^n)$. L'inclusion est stricte ; c/ex : $t \mapsto |t|x$ si $x \in \mathbb{R}^n$ est non nul.

Propriété [I.4] : $\mathcal{D}(I, \mathbb{R}^n)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^n)$ et on a :

$$\forall (f, g) \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R}^n)^2, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, (\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$$

Propriété [I.5] : Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$, $f_1, \dots, f_n$ les fonctions coordonnées de f dans $\mathcal{B}$, ie telles que $\forall t \in I, f(t) = \sum_{i=1}^n f_i(t)e_i$. Alors $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R}^n)$ si et seulement si $(f_1, \dots, f_n) \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})^n$ et dans ce cas,

$$\forall t \in I, f'(t) = \sum_{i=1}^n f'_i(t)e_i.$$

Propriété [I.6] : (Composition par une application linéaire)

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ linéaire. Si $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R}^n)$ alors $u \circ f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R}^p)$ et

$$\forall t \in I, (u \circ f)'(t) = u \circ (f')(t) = u(f'(t))$$

Propriété [I.7] : (Composition par une application multilinéaire)

1. Soient $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R}^n)$, $g \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R}^p)$ et $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ bilinéaire. La fonction $B(f, g)$, définie par $B(f, g) : t \in I \mapsto B(f(t), g(t))$ est dérivable sur I et

$$\forall t \in I, B(f, g)'(t) = B(f'(t), g(t)) + B(f(t), g'(t))$$

2. Soient $f_i \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R}^{n_i})$, pour $1 \leq i \leq p$, et $M : \mathbb{R}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{n_p} \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application p-linéaire. Alors l'application définie par $M(f_1, \dots, f_p) : t \in I \mapsto M(f_1(t), \dots, f_p(t))$ est dérivable sur I et

$$\forall t \in I, M(f_1, \dots, f_p)'(t) = \sum_{i=1}^p M(f_1(t), \dots, f_{i-1}(t), f'_i(t), f_{i+1}(t), \dots, f_p(t))$$

Conséquence [I.8] :

1. Si $(f, g) \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R}^n)^2$ et si $(| \cdot |)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. alors $(f|g) \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ et

$$\forall t \in I, (f|g)'(t) = (f'(t)|g(t)) + (f(t)|g'(t))$$

2. Si $(f_1, \dots, f_n) \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R}^n)^n$ et si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ alors $\det_{\mathcal{B}}(f_1, \dots, f_n) \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ et

$$\forall t \in I, \det_{\mathcal{B}}(f_1, \dots, f_n)'(t) = \sum_{i=1}^n \det_{\mathcal{B}}(f_1(t), \dots, f_{i-1}(t), f_i'(t), f_{i+1}(t), \dots, f_n(t))$$

Remarque(s) :

(I.4) Si $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R}^n)$ est telle que $\forall x \in I, f(x) \neq 0$ alors $\|f\| \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ et $\|f\|' = \frac{(f|f')}{\|f\|}$.

Un mouvement non stationnaire (ie tel que f' ne s'annule pas) $\mathcal{C}^2$ dans $\mathbb{R}^n$ est uniforme si et seulement si $\forall t \in I, f'(t) \perp f''(t)$.

Conséquence [I.9] : Soient $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R}^n)$ et $\lambda \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ alors $\lambda f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R}^n)$ et

$$\forall t \in I, (\lambda f)'(t) = \lambda'(t)f(t) + \lambda(t)f'(t)$$

Propriété [I.10] : Soient $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R}^n)$, $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur J , un intervalle de $\mathbb{R}$. Si $\varphi(J) \subset I$ alors $f \circ \varphi$ est dérivable sur J et

$$\forall t \in I, (f \circ \varphi)'(t) = \varphi'(t) \times f' \circ \varphi(t)$$

Propriété [I.11] : (Caractérisation des fonctions constantes)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue sur I et dérivable sur $\overset{\circ}{I}$, l'intérieur de I . Alors

$$f \text{ est constante sur } I \text{ si et seulement si } f' = 0 \text{ sur } \overset{\circ}{I}$$

3. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Définition : Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$

1. On note $f^{(0)} = f$ et pour $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k+1)} = (f^{(k)})'$ si $f^{(k)}$ est dérivable sur I . $f^{(k)}$ est alors la **dérivée $k^{\text{ème}}$ de f sur I** .
2. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on dit que f est de **classe $\mathcal{C}^k$ sur I** si f' est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ sur I . On note $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.
3. On dit que f est de **classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I** si f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I pour tout entier $k \in \mathbb{N}$.
On note $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}^n) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Propriété [I.12] : Pour tout $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^n)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^n)$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall (f, g) \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^n)^2, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, (\alpha f + \beta g)^{(k)} = \alpha f^{(k)} + \beta g^{(k)}$$

Propriété [I.13] : Soient $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $f \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^n)$ et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ linéaire. Alors $u \circ f \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^p)$ et, pour $j \leq k$, on a

$$(u \circ f)^{(j)} = u \circ (f^{(j)})$$

Propriété [I.14] : (Formule de Leibniz)

Soient $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $f \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^n)$, $g \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^p)$ et $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ bilinéaire. Alors $B(f, g)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et pour $j \leq k$, on a

$$B(f, g)^{(j)} = \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} B(f^{(i)}, g^{(j-i)})$$

Propriété [I.15] : Soient $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $f : I \rightarrow F$ de classe $\mathcal{C}^k$ sur I , J un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$ sur J . Si $\varphi(J) \subset I$ alors $f \circ \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur J .

II Équations différentielles linéaires

1. Rappels sur les équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1

Définition : Soient α, β, γ trois applications définies sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

1. L'équation $(\mathcal{E}) : \alpha y' + \beta y = \gamma$ est une **équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 1**.
2. Une **solution** de $(\mathcal{E})$ est une fonction $y : I \rightarrow \mathbb{K}$ dérivable sur I telle que

$$\forall t \in I, \alpha(t)y'(t) + \beta(t)y(t) = \gamma(t)$$

3. L'équation $(\mathcal{E}_H) : \alpha y' + \beta y = 0$ est l'**équation homogène associée**.

Propriété [II.1] :

1. L'ensemble E_H des solutions de $(\mathcal{E}_H)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$.
2. Si y_p est une solution de l'équation $(\mathcal{E})$ alors l'ensemble E des solutions de $(\mathcal{E})$ est $E = y_p + E_H$, un sous-espace affine de $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$.

y est solution de $(\mathcal{E})$ si et seulement si $y = y_0 + y_p$ avec y_0 une solution de $(\mathcal{E}_H)$

Remarque(s) :

- (II.1) Si la fonction α ne s'annule pas sur I , y est solution de $\alpha y' + \beta y = \gamma$ si et seulement si y est solution de $y' - ay = b$ avec $a = -\frac{\beta}{\alpha}$ et $b = \frac{\gamma}{\alpha}$; a et b sont alors continues sur I .

Théorème [II.2] : Soit a une fonction continue sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Les solutions de l'équation homogène $(\mathcal{E}_H) : y' - ay = 0$ sont les fonctions définies sur I par

$$\forall t \in I, y(t) = \lambda e^{A(t)}$$

où $\lambda \in \mathbb{K}$ et $t \mapsto A(t)$ est une **primitive** de a sur I .

Cela signifie que l'ensemble E_H des solutions de $(\mathcal{E}_H)$ est la droite vectorielle engendrée par $t \mapsto e^{A(t)}$

$$E_H = \text{Vect}\{t \mapsto e^{A(t)}\}$$

Propriété [II.3] : (Méthode de la variation de la constante)

Soient a et b deux fonctions continues sur I et y_0 une solution non nulle de l'équation homogène $(\mathcal{E}_H) : y' - ay = 0$.

Il existe une solution de l'équation $y' - ay = b$ de la forme

$$y_p = \lambda \times y_0, \text{ où } \lambda \text{ est une fonction dérivable sur } I.$$

Remarque(s) :

- (II.2) La méthode de variation de la constante n'est pas la seule façon de trouver une solution particulière : on peut chercher une solution « évidente », une solution polynômiale, ou DSE ...

Conséquence [II.4] : (Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire)

Soient a et b deux fonctions continues sur un intervalle I et $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$. Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' - ay = b \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

admet une unique solution définie sur I .

Attention : Pour appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz, il faut commencer par mettre l'équation sous forme résolue, ie avec un coefficient égal à 1 devant y' .

Exemple(s) :

(II.3) Résoudre $xy' + y = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$.

(II.4) Résoudre $2tx' + x = e^t$.

(II.5) Application aux systèmes différentiels : résoudre $\begin{cases} x' = 2x + y + z \\ y' = x - y - z \\ z' = -x + 2y + 2z \end{cases}$

2. Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2

Définition : Soient α, β, γ et δ quatre applications définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

L'équation $(\mathcal{E}) : \alpha y'' + \beta y' + \gamma y = \delta$ est une **équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2**. Une solution de $(\mathcal{E})$ est une fonction $y : I \rightarrow \mathbb{K}$ deux fois dérivable sur I telle que

$$\forall t \in I, \alpha(t)y''(t) + \beta(t)y'(t) + \gamma(t)y(t) = \delta(t)$$

L'équation $(\mathcal{E}_H) : \alpha y'' + \beta y' + \gamma y = 0$ est l'**équation homogène associée**.

Remarque(s) :

- (II.6) Si la fonction α ne s'annule pas sur I , y est solution de $\alpha y'' + \beta y' + \gamma y = \delta$ si et seulement si y est solution de $y'' - ay' - by = c$ avec $a = -\frac{\beta}{\alpha}$, $b = -\frac{\gamma}{\alpha}$ et $c = \frac{\delta}{\alpha}$; a, b et c sont alors continues sur I .

Théorème [II.5] : (Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire)

Soient a, b et c trois applications continues sur un intervalle I et $(t_0, y_0, y'_0) \in I \times \mathbb{K}^2$. Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'' - ay' - by = c \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y'_0 \end{cases}$$

admet une unique solution définie sur I .

Attention : Là encore, pour appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz il faut commencer par mettre l'équation sous forme résolue, ie avec un coefficient égal à 1 devant y'' .

Conséquence [II.6] : Soient a et b deux applications continues sur un intervalle I . Si E_H est l'ensemble des solutions de l'équation homogène $(\mathcal{E}_H) : y'' - ay' - by = 0$,

1. L'application $\varphi_\alpha : \begin{matrix} E_H & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ y & \longmapsto & (y(\alpha), y'(\alpha)) \end{matrix}$ est un isomorphisme.
2. E_H est un espace-vectoriel de dimension 2.

3. L'ensemble E des solutions de l'équation complète est un sous-espace affine de dimension 2 : $E = y_p + E_H$, où y_p est une solution de l'équation avec second membre $(\mathcal{E})$.

y est solution de $(\mathcal{E})$ si et seulement si $y = y_0 + y_p$ avec y_0 une solution de $(\mathcal{E}_H)$

Remarque(s) :

- (II.7) L'ensemble des solutions de $(\mathcal{E}_H)$ est toujours un espace vectoriel mais c'est le théorème de Cauchy-Lipschitz qui assure qu'il est de dimension 2.

Exemple(s) :

- (II.8) Résoudre $t^2 x'' + x = 0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ en cherchant les solutions de la forme $t \mapsto t^\alpha$.
- (II.9) Soient q et f deux fonctions paires continues sur $\mathbb{R}$ et y une solution de $y'' + qy = f$. Montrer que y est paire si et seulement si $y'(0) = 0$.

Propriété [II.7] : Cas des équations à coefficients constants (rappels) :

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$ et $\Delta = b^2 - 4ac$.

1. Les solutions (complexes) de $(\mathcal{E}_H)$: $ay'' + by' + cy = 0$ sont définies, sur $\mathbb{R}$, par

$$y(x) = \begin{cases} \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x} & \text{si } \Delta \neq 0 \text{ et } aX^2 + bX + c = a(X - r_1)(X - r_2) \\ e^{rx}(\alpha x + \beta) & \text{si } \Delta = 0 \text{ et } aX^2 + bX + c = a(X - r)^2 \end{cases} \text{ avec } (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$$

2. Cas d'un second membre exponentiel-polynôme : soient $P \in \mathbb{C}[X]$ et $m \in \mathbb{C}$. Il existe une solution particulière de l'équation $ay'' + by' + cy = P(t)e^{mt}$ de la forme $y : t \mapsto t^\alpha Q(t)e^{mt}$ avec

$$\begin{cases} Q \in \mathbb{C}[X] \\ \deg(Q) = \deg(P) \end{cases} \quad \text{et} \quad \alpha = \begin{cases} 0 & \text{si } am^2 + bm + c \neq 0 \\ 1 & \text{si } \Delta \neq 0 \text{ et } am^2 + bm + c = 0 \\ 2 & \text{si } \Delta = 0 \text{ et } am^2 + bm + c = 0 \end{cases}$$

Exemple(s) :

- (II.10) Résoudre $y'' + y = \cos^3 x$.
- (II.11) Résoudre $4tx'' + 2x' - x = 0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ en utilisant le changement de variable $t = u^2$; puis sur $\mathbb{R}$.

Propriété [II.8] : Compléments (hors-programme) sur les équations différentielles linéaires d'ordre 2

Soient a, b, c continues sur I , $(\mathcal{E})$ l'équation $y'' + ay' + by = c$ et $(\mathcal{E}_H)$ l'équation homogène associée.

1. Si y_1 et y_2 sont deux solutions de $(\mathcal{E}_H)$ alors $w = y_1 y_2' - y_1' y_2$ est dérivable sur I et vérifie $w' = -aw$. Les fonctions y_1 et y_2 sont libres si et seulement si il existe $t_0 \in I$ tel que $w(t_0) \neq 0$ et dans ce cas on a $w(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$.
2. Si y_0 est une solution de $(\mathcal{E}_H)$ qui ne s'annule pas sur I alors $y = \alpha y_0$ est solution de $(\mathcal{E})$ sur I si et seulement si α' (la dérivée de α) est solution de l'équation différentielle d'ordre 1 (d'inconnue y) : $y' + \left(a + 2\frac{y_0'}{y_0}\right)y = \frac{c}{y_0}$.

Remarque(s) :

- (II.12) Pour résoudre complètement une équation linéaire du second ordre, il suffit de trouver une solution non nulle de $(\mathcal{E}_H)$.
- (II.13) La fonction w (appelée wronskien) est souvent utile quand on cherche à étudier une base de l'ensemble des solutions de l'équation homogène (cf dernier exemple ci-dessous).

Exemple(s) :

- (II.14) Résoudre $-t^2 x'' + t(2+t)x' - (2+t)x = -2t^3(t+1)e^t$ en commençant par chercher les solutions polynômiales de l'équation homogène.
- (II.15) Résoudre $xy'' + 2y' - xy = 0$ en cherchant les solutions DSE.
- (II.16) Soient q continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et $(\mathcal{E}) : y'' + qy = 0$.
- Montrer que si y est une solution bornée de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}^+$ alors $\lim_{+\infty} y' = 0$.
 - Montrer qu'il existe une solution de $(\mathcal{E})$ non bornée.