Correction du DM18

Partie I :

1. En développant : $P = X^2 - (z_1+z_2)X + z_1z_2$ donc $\boxed{a = -z_1+z_2 \text{ et } b = z_1z_2}$

2. a) Si $\Delta > 0$ alors z_1 et z_2 sont réels ; si P est stable alors $z_1+z_2 = -a < 0$ et $z_1z_2 = b > 0$ donc $\boxed{a > 0 \text{ et } b > 0}$

b) Si $b > 0$ alors z_1 et z_2 sont du même signe (strict) et si $a > 0$ alors $z_1+z_2 < 0$ donc $z_1 < 0$ et $z_2 < 0$ et $\boxed{P \text{ est stable}}$

3. Si $\Delta = 0$ alors $P = \left(X + \dfrac{a}{2}\right)^2$ donc la seule racine de P est $-\dfrac{a}{2}$. Si P est stable alors $a > 0$ et $b = \dfrac{a^2}{2} > 0$.

Réciproquement, si $a > 0$ (alors $b = \dfrac{a^2}{2} > 0$ aussi) donc $z_1 = z_2 = -\dfrac{a}{2} < 0$ et P est stable.

4. a) P est un polynôme à coefficients réels.

b) Les racines de P sont $z = \dfrac{1}{2}\left(-a \pm i\sqrt{4b-a^2}\right)$ donc P est stable si et seulement si $a > 0$; comme $b > \dfrac{a^2}{4}$, on aura de toute façon $b > 0$. Ainsi $\boxed{P \text{ est stable si et seulement si } a > 0 \text{ et } b > 0}$

5. a) $\boxed{\mathcal{X}_A = X^2 - X\operatorname{Tr}(A) + \det(A)}$

b) On a vu dans les questions précédentes qu'un polynôme de degré 2 de la forme $P = X^2 + aX + b$ est stable si et seulement si $a > 0$ et $b > 0$ donc $\mathcal{X}_A$ (puis A) est stable si et seulement si $\boxed{\operatorname{Tr}(A) < 0 \text{ et } (-1)^2\det(A) > 0}$

6. a) $\boxed{Q = (X+1)(X+i)(X-i)}$

b) $\operatorname{Tr}(B) = -1 < 0$ et $(-1)^3\det(B) = +1 > 0$.

c) $\operatorname{Re}(i) = 0$ donc $\boxed{Q \text{ n'est pas stable}}$ et comme $\mathcal{X}_B = Q$, $\boxed{B \text{ n'est pas stable}}$

Partie II :

1. a) $x \mapsto Ax$ est linéaire donc continue sur $\mathbb{K}^n$ (de dimension finie) puis, par composition avec la norme (continue car lipschitzienne) $\boxed{x \mapsto \|Ax\| \text{ est continue}}$

b) $\mathcal{B}$ est une partie fermée bornée et non vide de $\mathbb{K}^n$, espace de dimension finie et $a \mapsto \|Ax\|$ est continue sur $\mathcal{B}$ donc $\max\limits_{\mathcal{B}} \|Ax\|$ existe, ie $\boxed{\exists x_0 \in \mathcal{B}, \forall x \in \mathcal{B}, \|Ax\| \leqslant \|Ax_0\|}$

c) Si $x \in \mathcal{B}$ alors $\|I_nx\| = \|x\| = 1$ donc $x \mapsto \|I_nx\|$ est constante sur $\mathcal{B}$ et $\boxed{|||I_n||| = 1}$

d) On vérifie :
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel.
- $|||A|||$ existe d'après la question précédente.
- $|||A||| \in \mathbb{R}^+$ car $\|Ax\| \in \mathbb{R}^+$ pour tout $x \in \mathcal{B}$.
- Si $|||A||| = 0$ alors $\forall x \in \mathcal{B}, \|Ax\| \leqslant 0$ donc $Ax = 0$ pour tout $x \in \mathcal{B}$. On en déduit $\operatorname{Vect}(\mathcal{B}) \in \ker(A)$ donc $\ker(A) = \mathbb{K}^n$ et $A = 0$.
- Si $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in \mathcal{B}$ alors $\|\lambda Ax\| = |\lambda| \times \|Ax\| \leqslant |\lambda| \times |||A|||$ puis $NNN\lambda A \leqslant |\lambda| \times |||A|||$.
  Pour $\lambda \neq 0$, on a $|||A||| = |||\dfrac{1}{\lambda}(\lambda A)||| \leqslant \dfrac{1}{|\lambda|}|||\lambda A|||$ donc $|||\lambda A||| = |\lambda| \times |||A|||$ pour $\lambda \neq 0$; ce qui reste valable pour $\lambda = 0$ puisque $|||0A||| \leqslant 0$ donc $|||0A||| = 0$.
- Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $x \in \mathcal{B}$ alors $\|(A+B)x\| \leqslant \|Ax\| + \|Bx\| \leqslant |||A||| + |||B|||$ donc $|||A+B||| \leqslant |||A||| + |||B|||$

On en déduit que $\boxed{|||\ ||| \text{ est une norme sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$

e) Si $x \neq 0$ alors $\dfrac{x}{\|x\|} \in \mathcal{B}$ donc $\left\|A\dfrac{x}{\|x\|}\right\| \leqslant |||A|||$, puis $\boxed{\|Ax\| \leqslant |||A||| \times \|x\|}$ ce qui est aussi valable pour $x = 0$ puisque $A0 = 0$.

f) On a $|||A||| = |||(A-B)+B||| \leqslant |||A-B||| + |||B|||$ donc $\boxed{|||A||| - |||B||| \leqslant |||A-B|||}$

Si $x \in \mathcal{B}$ alors $\|ABx\| \leqslant |||A||| \times \|Bx\| \leqslant |||A||| \times |||B|||$ donc $\boxed{|||AB||| \leqslant |||A||| \times |||B|||}$

2. On pose $\lambda = x + iy$ et on a, pour $u \in \mathbb{R}^{+*}$, $\dfrac{|1+u\lambda|-1}{u} = \dfrac{\sqrt{(1+ux)^2+(uy)^2}-1}{u} \underset{u\to0^+}{=} \dfrac{1+\frac{1}{2}(2ux)+o(u)-1}{u}$

donc $\boxed{\lim\limits_{u\to0^+} \dfrac{|1+u\lambda|-1}{u} = \operatorname{Re}(\lambda)}$

3. a) Il suffit de remarquer que si $u > 0$, on a $\mu(A,u) = \dfrac{u|||u^{-1}I_n + A||| - 1}{u} = |||u^{-1}I_n + A||| - u^{-1}$.

b) On a, d'après **II.1.f**, $|||u^{-1}I_n + A||| - |||v^{-1}I_n + A||| \leqslant |||(u^{-1}I_n + A) - (v^{-1}I_n + A)||| = |||(u^{-1} - v^{-1})I_n|||$ donc $|||u^{-1}I_n + A||| - |||v^{-1}I_n + A||| \leqslant |u^{-1} - v^{-1}| \times |||I_n||| = u^{-1} - v^{-1}$ puis $\boxed{\mu(A,u) - \mu(A,v) \leqslant 0 \text{ si } 0 < u \leqslant v}$

c) On a $|||I_n + uA||| \leqslant |||I_n||| + u|||A||| = 1 + u|||A|||$ donc $\mu(A, u) \leqslant |||A|||$ si $u > 0$.
De même, $|||I_n + uA||| \geqslant |||I_n||| - u|||A||| = 1 - u|||A|||$ donc $\mu(A, u) \geqslant -|||A|||$ si $u > 0$.

d) D'après **II.2.b**, la fonction $u \mapsto \mu(A, u)$ est croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, minorée par $-|||A|||$ d'après la question précédente, donc $\boxed{\lim_{u\to 0^+} \mu(A, u) \text{ existe}}$

4. a) Il existe $y \neq 0$ tel que $Ay = \lambda y$; il suffit alors de normer le vecteur y : si $x = \dfrac{y}{\|y\|}$, on a $\boxed{x \in \mathcal{B} \text{ et } Ax = \lambda x}$
On a alors $\|(I_n + uA)x\| = \|(1 + u\lambda)x\| = |1 + u\lambda|$.

b) On a $\dfrac{|1 + u\lambda| - 1}{u} = \dfrac{\|(I_n + uA)x\| - 1}{u} \leqslant \mu(A, u)$ si $u > 0$ car, comme $x \in \mathcal{B}$, on a $\|(I_n + uA)x\| \leqslant |||I_n + uA|||$.
En faisant tendre u vers 0^+, avec **II.2**, on obtient $\boxed{\mathrm{Re}(\lambda) \leqslant \mu(A)}$

c) Si $\mu(A) < 0$ alors pour $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, on a $\mathrm{Re}(\lambda) \leqslant \mu(A) < 0$. Ainsi, $\boxed{\text{si } \mu(A) < 0 \text{ alors } A \text{ est stable}}$

Partie III :

1. $I_n + uA$ est réelle donc $\|(I_n + uA)x\|_2^2 = {}^t\overline{X}(I_n + u\,{}^tA)(I_n + uA)X = {}^t\overline{X}(I_n + u({}^tA + A) + u^2\,{}^tAA)X$ puis $\boxed{\|(I_n + uA)x\|_2^2 = \|x\|_2^2 + u\,{}^t\overline{X}({}^tA + A)X + u^2\,{}^t\overline{X}\,{}^tAAX}$

2. $A + {}^tA$ est symétrique réelle, il suffit ensuite de la diagonaliser en ordonnant ses valeurs propres dans l'ordre croissant

3. a) M est réelle donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2 = {}^t\overline{Y}Y = {}^t\overline{X}M\,{}^tMX = \|x\|_2^2$ car $M\,{}^tM = I_n$ donc $\boxed{\|y\|_2 = 1}$

b) Comme $X = MY$, on vérifie ${}^t\overline{X}({}^tA + A)X = {}^t\overline{Y}\,{}^tM({}^tA + A)MY = {}^t\overline{Y}\mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)Y = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i|y_i|^2$; il suffit alors de reporter dans l'égalité de **III.1**.

c) L'application $(X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})^2 \mapsto {}^tX\,{}^tAAY$ est bilinéaire donc continue (dimension finie) ; de plus $X \mapsto \overline{X}$ est continue car $\|\overline{X} - \overline{Y}\|_2 = \|X - Y\|_2$. On en déduit que φ est continue sur $\mathbb{C}^n$. De plus $\mathcal{B}_2$ est une partie fermée bornée non vide de $\mathbb{C}^n$ donc φ est bornée sur $\mathcal{B}_2$, ce qui donne l'existence de γ et δ.

d) Comme $u^2 \geqslant 0$, on déduit de **III.3.b**, $\|(I_n + uA)x\|_2^2 \leqslant 1 + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i|y_i|^2 + \delta u^2 \leqslant 1 + u\alpha_1\|y\|_2^2 + \delta u^2 = 1 + \alpha_1 u + \delta u^2$; ceci étant vrai pour tout $x \in \mathcal{B}_2$, on en déduit $|||I_n + uA|||^2 \leqslant 1 + \alpha u + \delta u^2$.
De l'autre côté, on prouve aussi $|||I_n + uA||| \geqslant \|(I_n + uA)x\|_2 \geqslant 1 + \alpha_1|y_1|^2 + \gamma u^2$ pour tout $x \in \mathcal{B}_2$ et en choisissant x tel que $y_1 = 1$ (par exemple $x = Me_1$), on en déduit l'autre inégalité. On a donc bien $\boxed{\sqrt{1 + \alpha_1 u + \gamma u^2} \leqslant |||I_n + uA||| \leqslant \sqrt{1 + \alpha_1 u + \delta u^2}}$

e) $\dfrac{\sqrt{1 + \alpha_1 u + \varepsilon u^2} - 1}{u} \underset{u\to 0}{=} \dfrac{1 + \frac{\alpha_1}{2}u + o(u) - 1}{1} \underset{u\to 0}{\longrightarrow} \dfrac{\alpha_1}{2}$ donc par encadrement, on trouve $\boxed{\mu_2(A) = \dfrac{\alpha_1}{2}}$

4. a) On vérifie :
— $\mathbb{C}^2$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
— $\|x\|_H$ existe car $Hx \in \mathbb{C}^n$ et $\|\ \|_2$ est définie sur $\mathbb{C}^n$.
— $\|\ \|_2$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ donc $\|\ \|_H$ aussi.
— Si $\|x\|_H = 0$ alors $Hx = 0$ donc $x = 0$ car H est inversible.
— $\|\lambda x\|_H = \|\lambda HX\|_2 = |\lambda| \times \|Hx\|_2 = |\lambda| \times \|x\|_H$.
— $\|x + y\|_H = \|H(x + y)\|_2 \leqslant \|Hx\|_2 + \|Hy\|_2 = \|x\|_H + \|y\|_H$.
donc $\boxed{\|\ \|_H \text{ est une norme sur } \mathbb{C}^n}$

b) Si $\|x\|_H = 1$ on a $\|Ax\|_H = \|HAx\|_2 = \|HAH^{-1}(HX)\|_2 \leqslant |||HAH^{-1}|||_2 \times \|Hx\|_2 = |||HAH^{-1}|||_2 \times \|x\|_H \leqslant |||HAH^{-1}|||_2$ donc $|||A|||_H \leqslant |||HAH^{-1}|||_2$. En refaisant le même calcul, avec $\|x\|_2 = 1$ et $\|HAH^{-1}x\|_2 = \|A(H^{-1}x)\|_H$, on trouve l'autre inégalité. On en déduit $\boxed{|||A|||_H = |||HAH^{-1}|||_2}$

c) On en déduit $\mu_H(A, u) = \mu_2(A, u)$ et en faisant tendre u vers 0, $\boxed{\mu_H(A) = \mu_2(HAH^{-1})}$

Partie IV :

1. Il suffit de développer le polynôme $(X - z_1)(X - z_2)(X - z_3)$ et d'identifier les coefficients comme à la question **I.1**.

2. P est continu sur $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{-\infty} P = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} P = +\infty$ donc d'après le TVI, $\boxed{P \text{ possède une racine réelle}}$
On peut aussi dire que si λ est non réelle alors $\overline{\lambda}$ est aussi une racine de P ayant la même multiplicité que λ et comme P est de degré 3, il y a donc au moins une racine réelle.

3. a) Si $\beta_3 \neq 0$ alors $z_3 \notin \mathbb{R}$ donc $\overline{z_3}$ est aussi une racine de P ; comme z_1 et z_2 sont réels, c'est absurde donc $\boxed{z_3 \in \mathbb{R}}$

b) Si P est stable alors les trois racines de P sont des réels < 0. On a donc avec les relations de **IV.1**, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ et $ab - c > 0$ donc $\boxed{P \text{ vérifie } \mathcal{H}}$

4. a) z_2 est complexe non réel et z_1 est réel donc $\boxed{z_3 = \overline{z_2}}$

b) Il suffit de remplacer dans les relations de **IV.1**.

c) Si P est stable, les α_i sont < 0 donc on vérifie facilement $\mathcal{H}$.

5. Si P vérifie $\mathcal{H}$ alors $c > 0$ donc les racines de P sont non nulles et $\alpha_1 = z_1 < 0$. Si $\alpha_2 = 0$ alors z_2 n'est pas réel et $z_3 = \overline{z_2}$ donc $\alpha_3 = 0$ et $\beta_3 = -\beta_2 \neq 0$. On peut réutiliser les relations de **IV.4.b**, ce qui donnerait $ab - c = 0$, ce qui est absurde.

6. a) Facile

b) On trouve $B' = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{c'} & 0 \\ -\sqrt{c'} & 0 & \sqrt{b'} \\ 0 & -\sqrt{b'} & -a' \end{pmatrix}$ ce qui donne bien le résultat annoncé.

c) D'après **III.4.c**, on a $\mu_H(A') = \mu_2(HA'H^{-1}) = \mu_2(B')$ puis, d'après **III.3.e**, $\mu_2(B') = \max \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}\left(\dfrac{B' + {}^tB'}{2}\right) = 0$ donc $\boxed{\mu_H(A') = 0}$

d) D'après la partie **II** cette fois, appliquée avec la norme $\| \, \|_H$, on a, pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(A')$, $\mathrm{Re}(\lambda) \leqslant \mu_H(A') = 0$. Comme $P = \mathcal{X}_{A'}$, si λ est une racine de P, on a $\mathrm{Re}(\lambda) \leqslant 0$ et comme on a déjà vérifié à la question **IV.5** que $\mathrm{Re}(\lambda) \neq 0$, on en déduit $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$. Ainsi $\boxed{\text{si } P \text{ vérifie } \mathcal{H} \text{ alors } P \text{ est stable}}$

On vient donc en fait de vérifier que P est stable si et seulement si P vérifie $\mathcal{H}$, dans le cas où P est un polynôme de degré 3.