Correction du DM19

(Centrale PC ? ? ?)

Partie I :

1. $f(x_0+te_i)=A(x_0+te_i)+b=f(x_0)+iAe_i$ donc $\dfrac{1}{t}(f(x_0+te_i)-f(x_0))=Ae_i \xrightarrow[t\to 0]{} Ae_i$ donc $D_if(x_0)=Ae_i$ et $\boxed{J_f(x)=A \text{ pour tout } x}$

2. a) Les applications $u_i : t\mapsto ta_i$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc, par composition, φ est $\mathcal{C}^1$ et $\varphi'(t)=\displaystyle\sum_{i=1}^n u_i'(t)D_ig(ta)$ donc

$$\boxed{\varphi'(t)=\sum_{i=1}^n a_iD_if(ta)}$$

b) On applique la formule de Taylor-Young à l'ordre 1 à la fonction φ (qui est bien $\mathcal{C}^1$ au voisinage de 0) : on a $\varphi'(t)\underset{t\to 0}{=}\varphi(0)+t\varphi'(0)+o(t)$, ce qui donne bien, avec l'expression de $\varphi'(0)$, $\boxed{g(ta)\underset{t\to 0}{=}g(0)+\displaystyle\sum_{i=1}^n ta_iD_ig(0)+o(t)}$

3. a) L'application $t\mapsto(\varphi_1(t),\dots,\varphi_n(t))$ est continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, sur lequel l'application det est continue, donc, par composition, $\boxed{\Phi \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$

On a $t_i=te_i$ donc $f(t_i)\underset{t\to 0}{=}f(0)+tD_if(0)+o(t)=tD_if(0)+o(t)$. Par n-linéarité du déterminant, on en déduit $det(f(t_i))=t^n\det(D_if(0)+o(1))$ puis, par continuité du déterminant (ou avec la première partie de la question en posant $\varphi_i(t)=D_if(0)+o(t)$), on a $\displaystyle\lim_{t\to 0}\det(D_if(0)+o(t))=\det(D_if(0))=\mathrm{jac}_f(0)$, ce qui peut aussi s'écrire $\det(f_i(t))\underset{t\to 0}{=}t^n\Big[\mathrm{jac}_j(0)+o(1)\Big]$

b) Il suffit de remarquer que $\det(t_1,\dots,t_n)=\det(tI_n)=t^n$

c) Pour $n=2$ (resp. $n=3$), $|\det(u,v)|$ (resp. $|\det(u,v,w)|$) est l'aire (resp. le volume) du parallélogramme construit sur les vecteurs u et v (resp. du parallélépipède construit sur u, v et w) donc $|\mathrm{jac}_j(0)|$ est la limite quand t tend vers 0, du quotient de l'aire (resp. du volume) du parallélogramme (resp. du parallélépipède) $f(te_1),f(te_2)$ (resp. $f(te_1),f(te_2),f(te_3)$) par celle de te_1,te_2, qui est le carré (resp. cube) de côté t. Le jacobien de f en 0 « mesure » donc la déformation de l'aire (resp. volume) du carré (resp. cube) de côté t sous l'application de f, lorsque t est petit.

Partie II

1. On a vu en **I.A** que $J_f(x)=A$ donc $\boxed{\mathrm{div}_f(x)=A}$

2. a) Si on pose $u_a(t)=(x(t),y(t)$ alors x et y sont solutions de $\begin{cases}x'(t)=\lambda_1x(t)\\ y'(t)=\lambda_2y(t)\end{cases}$, on a donc $\begin{cases}x(t)=\alpha e^{\lambda_1t}\\ y(t)=\beta e^{\lambda_2t}\end{cases}$ puis

$$\boxed{u_a(t)=\begin{pmatrix}e^{\lambda_1t}&0\\0&e^{\lambda_2t}\end{pmatrix}a}$$

b) Si on note $B(t)=\begin{pmatrix}e^{\lambda_1t}&0\\0&e^{\lambda_2t}\end{pmatrix}$, alors (*ne pas oublier que a et b désignent deux vecteurs colonnes*) on a, $\det(u_a(t),u_b(t))=\det(B(t)a,B(t)b)=\det(B(t)(a,b))=\det(B(t))\det(a,b)=\det(B(t))\det(u_a(0),u_b(0))$ et on vérifie $\det(B(t))=e^{(\lambda_1+\lambda_2)t}=e^{t\,\mathrm{Tr}(A)}=e^{t\mathrm{div}_f(a)}$

c) Le signe de $\mathrm{div}_f(a)$ caractérise donc l'augmentation ou la diminution de l'aire du parallélogramme construit sur a et b en fonction du temps t, sous l'action de la transformation f.

3. a) On a $x_1(t)=a_1e^{\lambda_1t}$ et $x_2(t)=a_2e^{\lambda_2t}=a_2\left(\dfrac{x_1(t)}{a_1}\right)^{\lambda_2/\lambda_1}$; il suffit donc de poser $\boxed{\theta_0(u)=a_2\left(\dfrac{u}{a_1}\right)^{\lambda_2/\lambda_1}}$

4. a) On a cette fois $\begin{cases}x'(t)=\lambda x(t)+\mu y(t)\\ y'(t)=\lambda y(t)\end{cases}$; on en déduit $y(t)=\beta e^{\lambda t}$ puis $x'(t)=\lambda x(t)+\beta e^{\lambda t}$ donc on a $x(t)=\alpha e^{\lambda t}+\beta te^{\lambda t}$ et $\boxed{u_a(t)=\begin{pmatrix}e^{\lambda t}&\mu t\\0&e^{\lambda t}\end{pmatrix}a}$

Le calcul de **II.B.2** reste valable avec $B(t)=\begin{pmatrix}e^{\lambda t}&\mu t\\0&e^{\lambda t}\end{pmatrix}$ et on vérifie $\det(B(t))=e^{2\lambda t}=e^{t\,\mathrm{Tr}(A)}=e^{t\mathrm{div}_f(a)}$

b) Si $\mathcal{X}_A$ est SARS sur $\mathbb{R}$ alors A est DZ, on écrit $A=PDP^{-1}$ avec D la matrice de **II.B**. On pose alors $X=PY$, donc $X'=PY'$ et on vérifie, par inversibilité de P que $\begin{cases}X'=AX\\ X(0)=a\end{cases}$ si et seulement si $\begin{cases}X'=DY\\ Y(0)=P^{-1}a\end{cases}$.

On en déduit $u_a(t) = PB(t)P^{-1}a$ où $B(t)$ est la matrice apparue dans **II.B**. On a donc $\det(u_a(t), u_b(t)) = \det(B(t))\det(a,b) = e^{t\operatorname{div}_f(a)}(u_a(0), u_b(0))$

Si $\mathcal{X}_A$ est scindé sur $\mathbb{R}$ mais avec une racine double λ, on TZ la matrice A et on utilise le même raisonnement avec la matrice de **II.D.1**

c) Reste à étudier le cas où $\mathcal{X}_A$ ne serait pas scindé dans $\mathbb{R}$, il est alors SARS dans $\mathbb{C}$ et on fait les mêmes calculs qu'en **II.B** en diagonalisant A dans $\mathbb{C}$.

Partie III

1. f, donc f_k, étant de classe $\mathcal{C}^2$ et $\mathbb{R}^n$ ouvert, le théorème de Schwarz s'applique donc $f_{i,j,k}(x) = D_{i,j}f_k(x) \overset{\text{Schwarz}}{=} D_{j,i}f_k(x) = f_{j,i,k}(x)$

2. a) On a $J_f(x)^T = -J_f(x)$ donc $(J_f(x))_{k,j} = -(J_f(x))_{j,k}$, ce qui donne $D_jf_k(x) = -D_kf_j(x)$; en dérivant cette égalité, valable pour tout x, par rapport à x_i, on obtient $D_{i,j}f_k(x) = -D_{i,k}f_j(x)$, ie $\boxed{f_{i,j,k} = -f_{i,k,j}}$

b) En combinant plusieurs fois les deux égalités précédentes, on a $f_{i,j,k}(x) = f_{j,i,k}(x) = -f_{j,k,i}(x) = -f_{k,j,i}(x) = f_{k,i,j}(x) = f_{i,k,j}(x) = -f_{i,j,k}(x)$. On e déduit $\boxed{f_{i,j,k}(x) = 0}$

c) $\mathbb{R}^n$ est un ouvert convexe sur lequel $D_i(D_jf_k)(x) = 0$ pour tout x et tout $i \in [\![1,n]\!]$ donc $D_jf_k(x) = a_{j,k}$ est constante ; la matrice $A = J_f(x)$ est donc indépendante de $x \in \mathbb{R}^n$. Si on reprend les notations de **I.B**, on a $\varphi'(t) = Aa$ puis $f(a) = \varphi(1) = \displaystyle\int_0^1 \varphi'(t)\,\mathrm{d}t + \varphi(0) = Aa + b$ si on pose $b = f(0)$.

Comme on vient de voir que $A = J_f(x)$, on a bien $A^T = -A$ vues les hypothèses de cette question.

d) On vient de voir que si $J_f(x)$ est antisymétrique pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ alors $f(x) = Ax + b$ avec $A^T = -A$. Réciproquement, dans ce cas, d'après **I.A**, on a $J_f(x) = A$ qui est donc antisymétrique. En conclusion, $J_f(x)$ est antisymétrique pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ si et seulement si $\boxed{f(x) = Ax + b \text{ avec } A^T = -A}$

3. On vérifie que $g_j : x_j \mapsto \displaystyle\int_0^1 f_k(tx)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$: on pose $h(x_j, t) = f_k(tx)$ et on a

H1 : $x_j \mapsto h(x_j, t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ car f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ (par composition)

H2 : $t \mapsto h(x_j, t)$ est continue donc intégrable sur le segment $[0,1]$

H3 : $t \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial x_j}(x_j, t) = tD_jf_k(tx)$ est continue sur $[0,1]$

H4 : si $x_j \in [-a,a] \subset \mathbb{R}$ et $t \in [0,1]$ alors $tx \in [-|x_1|, |x_1|] \times \cdots \times [-a,a] \times \cdots \times [-|x_n|, |x_n|]$ qui est une partie fermée, bornée non vide de $\mathbb{R}^n$ sur la quelle D_if_k est continue donc bornée. On a donc $|tD_if_k(tx)| \leqslant C$ qui est intégrable sur le segment $[0,1]$

On en déduit que g_j est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $g_j'(x) = \displaystyle\int_0^1 tD_jf_k(tx)\,\mathrm{d}t$

Pour le calcul de D_jg, il faut faire attention au terme d'indice j dans la somme où le coefficient devant l'intégrale est justement x_j. On en déduit

$$D_jg(x) = \int_0^1 f_j(tx)\,\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^n x_i \int_0^1 tD_jf_i(tx)\,\mathrm{d}t$$

Avec la symétrie de $J_f(x)$, on a $D_jf_i(x) = D_if_j(x)$ donc

$$D_jg(x) = \int_0^1 f_j(tx)\,\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^n \int_0^1 tx_iD_if_j(tx)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f_j(tx)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 t\sum_{i=1}^n x_iD_if_j(tx)\,\mathrm{d}t$$

On reconnaît dans la deuxième intégrale la dérivée de $t \mapsto f_j(tx)$, on peut donc faire une IPP (toutes les fonctions sont $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0,1]$)

$$D_jg(x) = \int_0^1 f_j(tx)\,\mathrm{d}t + \Big[tf_j(tx)\Big]_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 1 \times f_j(tx)\,\mathrm{d}t = f_j(tx)$$

La fonction g donnée vérifie bien $f_i(x) = D_ig(x)$; comme f_i est $\mathcal{C}^1$, la fonction g est bien $\mathcal{C}^2$.

Partie IV

1. a) L'égalité $\alpha_{i,j,k} = \alpha_{i,k,j}$ découle du théorème de Schwarz.

Comme $J_f(x)$ est orthogonale, on a $\displaystyle\sum_{p=1}^n \frac{\partial f_p}{\partial x_i}(x)\frac{\partial f_p}{\partial x_j}(x) = \delta_{i,j}$. en dérivant cette égalité par rapport à x_k, on en déduit $\alpha_{i,k,j} + \alpha_{j,k,i} = 0$ qui donne $\alpha_{i,k,j} = -\alpha_{j,k,i} = -\alpha_{k,j,i}$

b) C'est exactement le même calcul qu'en **III.B.2**

c) Pour k fixé, $\alpha_{i,j,k}$ est le coefficient d'indice (i,j) du produit des matrices carrée $M = \left(\dfrac{\partial f_p}{\partial x_i}(x)\right)_{1\leqslant i,p\leqslant n}$ et $N = \left(\dfrac{\partial^2 f_p}{\partial x_j \partial x_k}(x)\right)_{1\leqslant p,j\leqslant n}$. On a $M = J_f(x)$ qui est orthogonale donc inversible ; le produit $MN = 0$ donne donc $N = 0$. On en déduit que les fonction $\dfrac{\partial f_p}{\partial x_j}$ sont constantes sur $\mathbb{R}^n$ donc $J_f(x)$ est indépendante de x : $J_f(x) = J_j(0) = A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et le même raisonnement qu'en **III.B** donne $f(x) = Ax + b$.

2. Si $(\mathcal{P})$ est réalisée alors $f(x) = Ax + b$ avec A orthogonale. Réciproquement, si $f(x) = Ax + b$ alors $J_f(x) = A$ donc si A est orthogonale, la propriété $(\mathcal{P})$ est vérifiée.

3. Soit $h(x) = g \circ f(x) = g(f_1(x), \ldots, f_n(x))$; on a $\dfrac{\partial h}{\partial x_i}(x) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) \times \frac{\partial g}{\partial x_j}(f(x))$ puis

$$\frac{\partial^2 h}{\partial {x_i}^2}(x) = \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\partial^2 f_j}{\partial {x_i}^2}(x) \times \frac{\partial g}{\partial x_j}(f(x)) + \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) \times \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i}(x) \times \frac{\partial^2 g}{\partial x_k \partial x_j}(f(x))\right)\right]$$

On en déduit, en permutant les sommes (finies)

$$\Delta_{g\circ f}(x) = \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\partial g}{\partial x_j}(f(x)) \sum_{1=1}^{n} \frac{\partial^2 f_j}{\partial {x_i}^2}(x)\right] + \sum_{1\leqslant j,k\leqslant n} \left[\frac{\partial^2 g}{\partial x_k \partial x_j}(f(x)) \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) \times \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(x)\right]$$

Donc si on note $L_i(x)$ les lignes de la matrice $J_f(x)$, on a

$$\Delta_{g\circ f}(x) = \sum_{j=1}^{n} \left[\Delta_{f_j}(x) \frac{\partial g}{\partial x_j}(f(x))\right] + \sum_{1\leqslant j,k\leqslant n} \left[(L_j(x)|L_k(x)) \frac{\partial^2 g}{\partial x_k \partial x_j}(f(x))\right]$$

On peut maintenant examiner l'équivalence :

- Si f vérifie $(\mathcal{P})$ alors $(L_j(x)|L_k(x)) = \delta_{j,k}$ et $f(x) = Ax + b$ donc $\dfrac{\partial^2 f_j}{\partial {x_j}^2} = 0$ (car $J_f = A$ donc les dérivées partielles premières des f_j sont constantes). On a donc bien $\Delta_{g\circ f} = (\Delta_g) \circ f$
- Réciproquement, si $\Delta_{g\circ f} = (\Delta_g) \circ f$ pour tout fonction $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, en choisissant $g_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$ (g_i est bien $\mathcal{C}^2$), on a $\dfrac{\partial g_i}{\partial x_j}(x) = \delta_{i,j}$ et $\dfrac{\partial^2 g_i}{\partial x_j \partial x_k}(x) = 0$ donc $\Delta_{g_i\circ f}(x) = \Delta_{f_i}(x)$ et comme $\Delta_{g_i} = 0$ donc on obtient $\Delta_{f_i} = 0$.
  On en déduit $\Delta_{g\circ f}(x) = \displaystyle\sum_{1\leqslant j,k\leqslant n} \left[(L_j(x)|L_k(x)) \frac{\partial^2 g}{\partial x_k \partial x_j}(f(x))\right]$. Si maintenant on choisit $g_{h,i}(x) = x_h x_i$ (qui est bien $\mathcal{C}^2$), on a $\dfrac{\partial^2 g_{h,i}}{\partial x_k \partial x_j}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \{h,i\} = \{j,k\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $\Delta_{g_{h,i}}(x) = 2\delta_{h,i}$. On distingue alors les deux cas
  - ⋆ si $h = i$, la propriété $(\mathcal{Q})$ donne $2 = (L_i(x)|L_i(x)) + (L_i(x)|L_i(x))$ donc $\|L_i(x)\| = 1$
  - ⋆ si $h \neq i$, on a $0 = (L_i(x)|L_h(x)) + (L_h(x)|L_i(x))$ donc $L_i(x) \perp L_h(x))$

  La matrice $J_f(x)$ est donc bien orthogonale pour tout x.