

Exercice 1 (Mines-Ponts PSI 2022)

Soit $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, pour $n \geq 1$.

1. Montrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ telle que $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$
2. Déterminer la limite de $(H_{2n} - H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$
3. On pose $a_n = \sum_{k=1}^n k^2$. Justifier la convergence et calculer la somme de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{a_n}$

Exercice 2 (Mines-Ponts PSI 2023)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite vérifiant :

$$u_1 \in \mathbb{R} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \exp\left(-\frac{u_n}{n}\right)$$

1. Étudier la suite (u_n)
2. Étudier les séries $\sum (u_n - 1)$ puis $\sum (-1)^n (u_n - 1)$

Exercice 3 (CCINP PSI 2019)

1. Montrer qu'il existe une unique solution u_n sur $\mathbb{R}^+$ de l'équation $x^n + x\sqrt{n} - 1 = 0$.
2. Déterminer la limite de (u_n) .
3. Déterminer la nature de $\sum u_n$ puis de $\sum (-1)^n u_n$.
indication : équivalent puis DL de u_n .

Exercice 4 (Mines-Ponts PSI 2019)

Soit $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$. On note ω_k les racines $n+1^{\text{ème}}$ de l'unité et $M = \max_{|z|=1} |P(z)|$

1. Soit $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$; calculer $S_p = \sum_{k=0}^n \omega_k^{-p} P(\omega_k)$
2. Montrer que $|a_k| \leq M$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$

Exercice 5 (Mines-Ponts PSI 2019)

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+)$ telle que $\forall x \geq 0, x^2 f(x) = 2 \int_0^x t f(x-t) dt$.

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et en déduire $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{+*})$
2. Montrer que f vérifie, sur $\mathbb{R}^{+*}$, une équation différentielle d'ordre 2
3. Trouver f