Exercices d'oraux 2023

Mines-Ponts

Exercice 1 **(Mines-Ponts PSI 2023)** *[Indication] [Solution]*

1. Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $R = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

a) Montrer que R est une matrice de rotation

b) Calculer $A_1 = RDR^T$

c) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A_1. Montrer que f peut s'écrire comme la composée commutative d'un projecteur orthogonal p et d'une symétrie orthogonale s.

d) ?

e) ?

2. a) Montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1+\cos^2(nt)} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1+\cos^2(t)}$ puis calculer cette intégrale.

b) ?

Exercice 2 **(Mines-Ponts PSI 2023)** *[Indication] [Solution]*

1. Soient $a_1, \dots, a_{n-1}$ des réels non nuls, $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & b_2 & a_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & a_2 & b_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & a_{n-1} & b_n \end{pmatrix}$

a) Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre de A. Montrer que $x_n \neq 0$.

b) Montrer que les sous-espaces propres de A sont des droites.

c) Déterminer $\mathrm{Card}(\mathrm{Sp}(A))$

2. Soit $I = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$

a) Montrer que I existe

b) Montrer que $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-xt}}{t}\sin(t)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$

c) Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et en déduire la valeur de I.

Exercice 3 **(Mines-Ponts PSI 2023)** *[Indication] [Solution]*

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

a) Montrer que $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = B^T B$

b) Montrer que $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si il existe $B \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = B^T B$

c) Si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, montrer que $X \mapsto \sqrt{X^T A X}$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$

2. a) Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(2)$

b) Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$

Exercice 4 **(Mines-Ponts PSI 2023)** *[Indication] [Solution]*

1. a) Calculer $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \ln(x)\,\mathrm{d}x$

b) Trouver $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\displaystyle\int_0^1 x^2(\ln(x) - ax - b)^2\,\mathrm{d}x = \inf_{(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 x^2(\ln(x) - \alpha x - \beta)^2\,\mathrm{d}x$

2. Soit $(X_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires discrètes indépendantes suivant $\mathscr{B}\left(\dfrac{2}{3}\right)$. On définit les événements $A_k = (X_{2k-1}X_{2k} = 0)$, $B_p = \bigcap\limits_{k=1}^{p} A_k$ et la variable aléatoire discrète $T = \min\{k \geqslant 2, X_{k-1} = X_k = 1\}$

a) Montrer que $P\left(\overline{\bigcap\limits_{k=1}^{+\infty} A_k}\right) = 1$ et en déduire $P(T \in \mathbb{N}) = 1$

b) Trouver une relation de récurrence vérifiée par la suite $(P(T = n))_{n\in\mathbb{N}}$

c) Déterminer l'espérance de T

Exercice 5 **(Mines-Ponts PSI 2023)** *[Indication] [Solution]*

1. Soient $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ et $G(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que F est définie, continue et bornée sur $\mathbb{R}^+$. Calculer $F(0)$

b) Montrer que G est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$

c) Montrer que $F(x) = x\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t$ si $x > 0$

d) En déduire que F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que $F'(x) = \dfrac{F(x) - 2G(x)}{x}$ pour $x > 0$

e) Montrer que G est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que $G'(x) = -\dfrac{x}{2}F(x)$

f) Trouver une équation différentielle du second ordre vérifiée par F et en déduire la valeur de F

2. Soient $z \in \mathbb{C}$ et $k \in [\![0, n-2]\!]$. Déterminer la valeur de $\begin{vmatrix} (z+1)^k & 2^k & 3^k & \dots & n^k \\ (z+2)^k & 3^k & 4^k & \dots & (n+1)^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ (z+n)^k & (n+1)^k & (n+2)^k & & (2n-1)^k \end{vmatrix}$

Exercice 6 **(Mines-Ponts PSI 2023)** *[Indication] [Solution]*

1. Soit $a_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{ch}(t^n)}$

a) Déterminer un équivalent de a_n

b) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n x^n$. Y a-t-il convergence en $\pm R$?

c) Exprimer a_n à l'aide de la somme d'une série

2. Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On pose $K = \bigcup\limits_{k\geqslant 0} \ker(f^k)$ et $I = \bigcap\limits_{k\geqslant 0} \mathrm{Im}(f^k)$. Montrer que $E = K \oplus I$.

Exercice 7 **(Mines-Ponts PSI 2023)** *[Indication] [Solution]*

1. a) Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et A un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$. On suppose $\bigcap\limits_{\ell\in A} \ker(\ell) = \{0\}$. Montrer que $A = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$

b) Soit $(f_1, \dots, f_n)$ une famille de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que $(f_1, \dots, f_n)$ est libre si et seulement si il existe $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ tel que $(f_i(x_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est inversible

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et T-périodique. Montrer qu'il existe un unique réel λ pour lequel l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t) - \lambda}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente

a) dans le cas où $f = \sin$

b) dans le cas général

Exercice 8 **(Mines-Ponts PSI 2023)** *[Indication] [Solution]*

1. Soit $(E) : 2xy'(x) + y(x) = 3x\varphi(x)$ avec $\varphi(x) = \begin{cases} \cos(x^{3/2}) & \text{si } x \geqslant 0 \\ \mathrm{ch}((-x)^{3/2}) & \text{si } x < 0 \end{cases}$

a) Déterminer les solutions développables en série entière de (E)

b) Résoudre (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$ puis sur $\mathbb{R}$

2. Soient $a_0, \ldots, a_{n-1}$ des réels et $A = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & & -a_1 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$

a) Déterminer le polynôme caractéristique de A

b) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non diagonale. Pour quelles valeurs de n peut-on avoir $M^3 + M + I_n = 0$?

Exercice 9 (Mines-Ponts PSI 2023) *[Indication] [Solution]*

1. Soit $f_0 \in \mathcal{C}^1([a,b])$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [a,b]$, $f_{n+1}(x) = \displaystyle\int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

a) On suppose que $\sum f_n$ converge simplement sur $[a,b]$ et que les hypothèses du théorème de dérivation des séries de fonctions sont satisfaites. Calculer $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ en fonction de f_0.

b) Montrer que les hypothèses précédentes sont vérifiées si $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a,b]$

c) Calculer S lorsque $f_0(x) = \sin(2x)$ et $[a,b] = [0,1]$

2. Soient $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & a_n \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Déterminer le polynôme caractéristique de A et la dimension des espaces propres de A. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.

b) ?

Exercice 10 (Mines-Ponts PSI 2023) *[Indication] [Solution]*

1. Pour $n \geqslant 1$ et $x \in [0,1]$, on pose $f_n(x) = \dfrac{e^{-x}}{1+n^2x^2}$

a) Étudier la convergence simple de (f_n) sur $[0,1]$

b) Soit $a \in]0,1[$, a-t-on convergence uniforme sur $[a,1]$?

c) Étudier la convergence uniforme de (f_n) sur $[0,1]$

d) On pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$. Déterminer la limite de (u_n).

e) Étudier la convergence de $\sum f_n$.

2. Soient $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $L_i = \displaystyle\prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{3} \frac{X-k}{i-k}$, pour $i \in [\![0,3]\!]$

a) Calculer, pour $0 \leqslant i,j \leqslant 3$, $L_i(j)$ et en déduire que $(L_i)_{i\in[\![0,3]\!]}$ est une base de E.

b) Montrer que $(P|Q) = \displaystyle\sum_{k=0}^{3}(P(k)+P(1))(Q(k)+Q(1))$ définit un produit scalaire sur E

c) Déterminer une base orthonormale de E.

Exercice 11 (Mines-Ponts PSI 2023) *[Indication] [Solution]*

1. Soit $f(x,y) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{1+y^{2n}}$

a) Déterminer le domaine de définition D de f et le représenter.

b) Étudier l'existence des dérivées partielles de f

2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$. Déterminer les endomorphismes de E tels que $\alpha u^3 = \mathrm{Tr}(u^2)u$ où $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

Exercice 12 (Mines-Ponts PSI 2023) *[Indication] [Solution]*

1. a) Calculer, pour $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 x^p(1-x)^q\,\mathrm{d}x$.

b) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On dispose de p urnes numérotées de 1 à p. Chaque urne contient p boules et pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, l'urne numéro i contient i boules noires et $p - i$ boules blanches. On effectue l'expérience suivante : choisir au hasard une urne puis effectuer des tirages avec remise dans l'urne choisie. On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, A_n l'événement : « on a effectué $2n$ tirages et obtenu le même nombre de boules blanches que de noires ».

i. Exprimer $P(A_n)$ sous forme d'une somme.

ii. Calculer $\lim\limits_{p \to +\infty} P(A_n)$.

iii. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} P(A_n)$.

2. a) Résoudre sur $]-1, 1[$, $(1 - t^2)y''(t) - 2ty'(t) = 0$

b) Trouver les fonctions f non constantes et $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telles que, si $g(x, y) = f\left(\dfrac{\cos 2x}{\operatorname{ch} 2y}\right)$ alors $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$.

Centrale

Exercice 13 **(Centrale PSI 2023)** *[Indication] [Solution]*
Pour $x \in [0, 1]$, on définit g sur $[0, 1]$ par $\forall y \in [0, 1], g(y) = y - \dfrac{x}{2}y^2$

1. Montrer que g est 1-lipschitzienne et que $[0, 1]$ est stable par g

2. On définit la suite de fonctions $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $h_0 = 1$ et $\forall x \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}, h_{n+1}(x) = h_n\left(\dfrac{x}{2}\right) - \dfrac{x}{2}h_n\left(\dfrac{x}{2}\right)^2$

a) Montrer que $\forall x \in [0, 1], h_n(x) \in [0, 1]$

b) Montrer que $|h_{n+1}(x) - h_n(x)| \leqslant \left|h_n\left(\dfrac{x}{2}\right) - h_{n-1}\left(\dfrac{x}{2}\right)\right|$

c) En déduire que $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0, 1]$

3. Justifier qu'il existe une fonction f continue sur $[0, 1]$, telle que $f(0) = 1$ et $\forall x \in [0, 1], f(x) = f\left(\dfrac{x}{2}\right) - \dfrac{x}{2}f\left(\dfrac{x}{2}\right)^2$

Exercice 14 **(Centrale PSI 2023)** *[Indication] [Solution]*

1. Justifier l'existence, pour $x \in \mathbb{R}$, et déterminer la valeur de $\varphi(x) = e^x \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t}\cos(t)\,\mathrm{d}t$ et $\psi(x) = e^x \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t}\sin(t)\,\mathrm{d}t$

2. Déterminer les solutions bornées sur $\mathbb{R}$ de $y' - y + \cos(x) = 0$

3. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $f_0 = a\cos + b\sin$ et, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, $f_{n+1}(x) = e^x \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t}f_n(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément.

Exercice 15 **(Centrale PSI 2023)** *[Indication] [Solution]*
Soient $\alpha > 0$ et $h_\alpha(t) = \ln\left(\dfrac{1 - t^2}{\alpha^2 + t^2}\right)$

1. Montrer que h_α est continue, décroissante et intégrable sur $[0, 1[$

2. Calculer $I_\alpha = \displaystyle\int_0^1 h_\alpha(t)\,\mathrm{d}t$

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, n-1]\!]$, on pose $x_{n,k} = \dfrac{2k+1}{2n}$ et $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} h_\alpha(x_{n,k})$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = I_\alpha$

4. ?

Exercice 16 **(Centrale PSI 2023)** *[Indication] [Solution]*
Soient $I = \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et $f(x) = \dfrac{1 + \sin x}{\cos x}$

1. Montrer qu'il existe un polynôme P_n, unitaire à coefficients dans $\mathbb{N}$, tel que $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(\sin x)}{\cos^{n+1} x}$

2. Montrer que la série de Taylor de f converge absolument sur I

3. Montrer que f est développable en série entière sur I.

Exercice 17 **(Centrale PSI 2023)** *[Indication] [Solution]*

Soient E un espace vectoriel normé et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall x \in E, \|u(x)\| \leqslant \|x\|$. On pose $v_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u^k$.

1. Simplifier $(u - id) \circ v_n$

2. Montrer que $\ker(u-id)\cap \mathrm{Im}(u-id)=\{0\}$

3. Si E est de dimension finie, montrer que $\ker(u-id)\oplus \mathrm{Im}(u-id)=E$.

4. Est-ce encore valable en dimension infinie ?

Exercice 18 (Centrale PSI 2023) *[Indication] [Solution]*
Soit E un espace vectoriel de dimension finie. On dit que $f\in\mathcal{L}(E)$ est un commutateur s'il existe $u,v\in\mathcal{L}(E)$ tels que $f=u\circ v-v\circ u$

1. Soit f un commutateur de E. Montrer que $\mathrm{Tr}(f)=0$

2. Soit f un endomorphisme de E tel que, pour tout $x\in E$, $(x,f(x))$ est liée. Montrer que f est une homothétie.

3. Soit f de trace nulle. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle, si $A=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, on a $a_{1,1}=0$.

4. En déduire que si $\mathrm{Tr}(f)=0$ alors f est un commutateur.

Exercice 19 (Centrale PSI 2023) *[Indication] [Solution]*
On note ℓ^2 l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour lesquelles $\sum u_n^2$ converge

1. Montrer que si (u_n) et (v_n) sont dans ℓ^2 alors $\sum u_nv_n$ converge

2. Montrer que $\varphi(u,v)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}u_nv_n$ définit un produit scalaire sur ℓ^2

3. ?

Exercice 20 (Centrale PSI 2023) *[Indication] [Solution]*
Soit $S=\begin{pmatrix}4&-3\\-3&-4\end{pmatrix}$

1. Montrer que S est semblable à une matrice diagonale à préciser et à une matrice de diagonale nulle

2. Soit $\phi: M\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\mapsto \mathrm{diag}(1,2)M-M\mathrm{diag}(1,2)$. Déterminer $\mathrm{Im}\,\phi$ et en déduire $\exists(C,D)\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), S=CD-DC$

3. Soient $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ et $A,B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $AB=\begin{pmatrix}25&11\\11&5\end{pmatrix}$ et $BA=\begin{pmatrix}x&14\\14&y\end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs possibles de x et y.

Exercice 21 (Centrale PSI 2023) *[Indication] [Solution]*
Soient $E=\mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$ et φ une forme linéaire sur E

1. Montrer que φ est continue sur E si et seulement si φ est continue en 0.

2. On pose $N=\sup\{|\varphi(f)|, f\in E, \|f\|_\infty\leqslant 1\}$

a) Que vaut N si $\varphi(f)=\displaystyle\int_{-1}^0 f(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$?

b) ?

Exercice 22 (Centrale PSI 2023) *[Indication] [Solution]*
Soient $D=(\mathbb{R}^+)^2$ et f définie sur D par $f(x,y)=\dfrac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)}$ si $(x,y)\neq(0,0)$ et $f(0,0)=0$

1. Montrer que f est continue sur D.

2. Montrer que f est majorée sur D.

3. Soit $K=[0,10]^2$. Montrer que f admet un maximum sur K puis sur D.

4. Déterminer $\max\limits_D(f)$.

Exercice 23 (Centrale PSI 2023) *[Indication] [Solution]*
Soient E un espace vectoriel de dimension $n\geqslant 2$, u et v deux symétries telles que $u\circ v=-v\circ u$

1. Montrer que n est pair

2. On pose $F^+=\ker(u+id)$ et $F^-=\ker(u-id)$. Montrer que $v(F^+)=F^-$, $v(F^-)=F^+$ et $E=F^+\oplus F^-$

3. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E et $A\in\mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$ telles que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)=\begin{pmatrix}I_p&0\\0&-I_p\end{pmatrix}$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v)=\begin{pmatrix}0&A\\A^{-1}&0\end{pmatrix}$ où $n=2p$.

Exercice 24 (Centrale PSI 2023) *[Indication] [Solution]*

1. Justifier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x$

2. On pose $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin^2 x}{x^2} & \text{si } x\in\mathbb{R}^{+*}\\ 1 & \text{si } x=0\end{cases}$. Justifier, pour $h>0$, l'existence de $S(h)=h\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}f(nh)$

3. Montrer que $\displaystyle\lim_{h\to 0^+}S(h)=\int_0^{+\infty}f(t)\,\mathrm{d}t$.

indication : poser $\phi_h(t)=f\left(\left\lfloor\dfrac{t}{h}\right\rfloor h\right)$.

Exercice 25 **(Centrale PSI 2023)** *[Indication] [Solution]*
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites de réels strictement positifs. On pose $a_n=u_nv_n$ et on définit le déterminant Δ_n par : $\Delta_n=\begin{vmatrix}1 & -v_1 & & & \\ u_1 & 1 & -v_2 & (0) & \\ 0 & u_2 & \ddots & \ddots & \\ & (0) & \ddots & 1 & -v_n\\ & & & u_n & 1\end{vmatrix}$

1. Trouver une relation entre Δ_n, Δ_{n-1} et Δ_{n-2}

2. Montrer que $\Delta_n\leqslant\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1+a_k)$

3. Montrer que la suite (Δ_n) converge si et seulement si $\sum a_n$ converge

Exercice 26 **(Centrale PSI 2023)** *[Indication] [Solution]*
Soient $M=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}$ avec A et C carrées

1. On suppose $A\in\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$

a) Montrer que $\mathrm{rg}(A)=q$ si et seulement si A^TA est inversible

b) Donner une condition sur p et q pour que cela soit possible

c) Montrer que $\mathbb{R}^p=\ker(A^T)\oplus\mathrm{Im}(A)$

d) Que peut-on dire des valeurs propres de A^TA et AA^T ?

2. ?

Exercice 27 **(Centrale PSI 2023)** *[Indication] [Solution]*
Soient $N\in\mathbb{N}^*$ et une urne avec initialement N boules rouges. On tire successivement dans l'urne de la façon suivante : si on tire une boule rouge, on la remplace par une verte ; si on tire une boule verte, on la remet dans l'urne. On note X_p le nombre de boules rouges dans l'urne à l'issue du $p^{\text{ème}}$ tirage. On pose $X_0=N$. On note Y le rang où on enlève la dernière boule rouge ($Y=0$ si ce rang n'existe pas)

1. Montrer, pour $n\geqslant 0$ et $k\geqslant 0$, $P(X_{n+1}=k)=\dfrac{N-k}{N}P(X_n=k)+\dfrac{k+1}{N}P(X_n=k+1)$

2. En déduire une relation entre $E(X_{n+1})$ et $E(X_n)$

3. Donner $E(X_n)$ en fonction de n et N et en déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}P(X_n\geqslant 1)$ et de $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\frac{E(X_n)}{N}$.

4. Montrer que $(Y=0)\subset\displaystyle\bigcap_{k=1}^{n}(X_k\geqslant 1)$, puis en déduire la valeur de $P(Y=0)$.

CCINP

Exercice 28 **(CCINP PSI 2023)** *[Indication] [Solution]*

1. Soient $a_0,\dots,a_n$ des réels et $\varphi(P,Q)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}P(a_k)Q(a_k)$ pour $P,Q\in\mathbb{R}_n[X]$.

a) Donner une CNS pour que φ soit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$; on suppose cette condition réalisée par la suite.

b) Trouver $F^\perp$ où $F=\left\{P\in\mathbb{R}_n[X],\displaystyle\sum_{k=0}^{n}P(a_k)=0\right\}$

c) Calculer la distance de X^n à F.

2. a) Déterminer l'ensemble de définition de $S(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a^n}{x+n}$, en fonction de a ?

b) On suppose $|a| < 1$ jusqu'à la fin de l'exercice, montrer que S est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

c) Déterminer une relation entre $S(x+1)$ et $S(x)$ et en déduire un équivalent de S en 0.

d) Montrer que $xS(x)$ tend vers $\dfrac{1}{1-a}$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 29 **(CCINP PSI 2023)** *[Indication] [Solution]*

1. Soit $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{sh}(t)}{t} e^{-xt}\,\mathrm{d}t$

a) Déterminer le domaine de définition D de g

b) Montrer que g est $\mathcal{C}^1$ sur D et calculer g'

c) Déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$ de $g(n)$

d) En déduire g

2. Soit A symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + 4A^2 + 5A = 0$

a) Justifier que A est diagonalisable

b) Montrer que les valeurs propres de A sont racines de $X^3 + 4X^2 + 5X$

c) Trouver A

Exercice 30 **(CCINP PSI 2023)** *[Indication] [Solution]*

1. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_{n,k} = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-nt}\,\mathrm{d}t$ et $a_n = \dfrac{n!}{n^{n+1}}$

a) Montrer que $I_{n,k}$ existe

b) Calculer $I_{n,k}$

c) Déterminer le rayon de convergence R de $\sum a_n x^n$ et vérifier que si $x \in]-R, R[$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = \int_0^{+\infty} \frac{tx}{e^t - tx}\,\mathrm{d}t$

2. Soient $A, B \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telles que $M = \dfrac{1}{3}(A + 2B)$ soit orthogonale. On pose $C = A^T B$

a) Calculer $A^T B + B^T A$

b) En déduire un polynôme annulateur de C

c) Montrer que $\ker(C - I_n)$ et $\mathrm{Im}(C - I_n)$ sont supplémentaires

d) Montrer $A = B$

Exercice 31 **(CCINP PSI 2023)** *[Indication] [Solution]*

1. Pour $n \geqslant 1$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(x) = \dfrac{\ln(1 + nx^2)}{n^2}$ et $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$

a) Montrer que S est définie sur $\mathbb{R}$

b) Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}$

c) Montrer que $\sum u_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}$.

d) Calculer $S(0)$ et $\lim\limits_{+\infty} S$

e) Montrer que S est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

f) Par une comparaison série-intégrale, déterminer un équivalent en 0 de S'

2. Soient $n \geqslant 2$, $A \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nulle et $B = AA^T$

a) B est-elle diagonalisable ?

b) Déterminer le rang de B

c) Déterminer les éléments propres de B

Exercice 32 **(CCINP PSI 2023)** *[Indication] [Solution]*

1. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ avec $n \geqslant 1$

a) Montrer que si u est diagonalisable alors u^2 est diagonalisable

b) Montrer que la réciproque est fausse

c) Pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$, montrer $\ker(u^2 - \lambda^2 id) = \ker(u - \lambda id) \oplus \ker(u + \lambda id)$

d) Montrer que la réciproque de a) est vraie si u est bijectif ou si $\ker(u) = \ker(u^2)$.

2. a) Justifier la convergence de $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t$

b) Soit $J = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t \cos t)\, \mathrm{d}t$; montrer $J = 2I$

c) Calculer I

Exercice 33 **(CCINP PSI 2023)** *[Indication] [Solution]*

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite à diagonale propre si $\chi_A = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (X - a_{k,k})$. On note E_n l'ensemble des matrices réelles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à diagonale propre.

a) Soit pour $M \in E_n$ antisymétrique.

i. Calculer χ_M. Que vaut M^n ?

ii. Montrer que M^2 est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En déduire que $M^2 = 0$.

iii. Calculer $\mathrm{Tr}(M^2)$ en fonction des coefficients de M. En déduire que $M = 0$.

b) Soit un sous-espace F de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $F \subset E_n$. Montrer que $\dim(F) \leqslant \dfrac{n(n+1)}{2}$.

2. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $a_0 = 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \dfrac{1 + a_n}{n+1}$

a) Prouver que $0 \leqslant a_n \leqslant 1$. Que peut-on en déduire pour le rayon de convergence R de la série entière $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$?

b) Trouver une équation différentielle vérifiée par la somme S de cette série entière sur $]-r, r[$, où $r = \min(1, R)$

c) Donner les solutions de cette équation différentielle en fonction de $\varphi : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{e^{-t}}{1-t}\, \mathrm{d}t$.

Exercice 34 **(CCINP PSI 2023)** *[Indication] [Solution]*

1. Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x+n)}{\sqrt{x}(n+x)}\, \mathrm{d}x$

a) Justifier l'existence de I_n, pour $n \geqslant 1$

b) Déterminer la limite de $(I_n)_{n \geqslant 1}$

c) Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(n+x)}\, \mathrm{d}x$

d) Déterminer un équivalent de I_n.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

a) Montrer que si P annule A alors les valeurs propres de A sont racines de P

b) existe-t-il $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Tr}(A) = 0$ et $A^2 + A^T = I_3$?

Exercice 35 **(CCINP PSI 2023)** *[Indication] [Solution]*

1. Soit f_n définie, pour $n \geqslant 0$ par $f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{nx^2}{1+nx} & \text{si } x \geqslant 0 \\ \dfrac{nx^3}{1+nx^2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

a) Montrer que (f_n) converge uniformément vers une fonction que l'on déterminera.

b) Montrer que (f_n') converge simplement sur $\mathbb{R}$ mais pas uniformément sur $[-1, 1]$.

2. Soient $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $M_\alpha = I_n - \alpha X Y^T$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $E = \{M_\alpha, \alpha \in \mathbb{R}\}$

a) Montrer que E est stable par produit

b) Déterminer une CNS sur α pour que M_α soit inversible.

c) ?

Exercice 36 **(CCINP PSI 2023)** *[Indication] [Solution]*

1. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $M_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$

a) Déterminer $\mathcal{X}_{M_\alpha}$ et les valeurs propres de M_α

b) M_α est-elle diagonalisable ? Si oui, déterminer ses espaces propres, P inversible et D diagonale telles que $M_\alpha = PDP^{-1}$

c) M_α est-elle inversible ?

d) Lorsque M_α n'est pas inversible, déterminer des bases de $\ker(M_\alpha)$ et $\mathrm{Im}(M_\alpha)$.

2. Soient $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x+y=0\}$ et $f : (x,y) \longmapsto \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x+y} & \text{si } (x,y) \notin F \\ 0 & \text{si } (x,y) \in F \end{cases}$

a) Justifier que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2 \setminus F)$

b) Montrer que, si $(x,y) \notin F$, $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3f(x,y)$

c) Existence et valeurs de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$?

d) f est-elle continue en $(0,0)$?

Exercice 37 **(CCINP PSI 2023)** *[Indication] [Solution]*

1. Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x(1+t)}$

a) Déterminer le domaine de définition D de f

b) Montrer que f est continue sur D.

c) Pour $x \in D$, vérifier $1-x \in D$ et prouver que $f(x) = f(1-x)$

d) Déterminer des équivalents de f aux bornes de D

2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^3 = I_n$ et $MM^T = M^TM$

a) Montrer que M^TM est diagonalisable puis déterminer M^TM

b) Déterminer M si $n = 3$.

Exercice 38 **(CCINP PSI 2023)** *[Indication] [Solution]*

1. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que $P(X=i) = \dfrac{i}{2^{i+1}}$ pour $i \geqslant 1$. On considère une urne qui contient X boules numérotées de 1 à X ; on tiee une boule au hasard dans cette urne et on note Y le numéro de la boule tirée.

a) Vérifier qu'un telle variable aléatoire X existe.

b) Calculer $E(X)$.

c) Donner la loi conjointe de X et Y.

d) Déterminer la loi de Y puis son espérance.

2. Soit $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{i,j} = \begin{cases} i & \text{si } i = j \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$ On note P_n le polynôme caractéristique de A_n.

a) Justifier que A_n est diagonalisable

b) Donner le spectre de A_2

c) Montrer que, pour $n \geqslant 3$, $P_n = (X-n+1)P_{n-1} - X(X-1)\dots(X-n+2)$

d) Montrer que $\forall k \in [\![0, n-1]\!], (-1)^{n-k}P_n(k) > 0$ et en déduire que A_n possède une valeur propre dans chacun des intervalles $]0,1[,]1,2[, \dots,]n-2, n-1[$.

e) En déduire à nouveau que A_n est diagonalisable.

Exercice 39 **(CCINP PSI 2023)** *[Indication] [Solution]*

1. Soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 e^{-\frac{1}{t}} t^n \,\mathrm{d}t$

a) Justifier l'existence de I_n et préciser son signe

b) Étudier les variations de (I_n), puis sa convergence et sa limite

c) Par IPP, montrer que $(n+1)I_n + I_{n-1} = e^{-1}$ et en déduire $I_n \sim \dfrac{e^{-1}}{n}$.

d) On pose $g(x) = \displaystyle\sum_{n \geqslant 0} I_n x^n$. Déterminer le domaine de définition de g

e) Écrire $g(x)$ sous forme d'une intégrale pour $|x| < 1$

f) Déterminer un équivalent de $g(x)$ quand x tend vers 1^-

2. Soit $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $M + M^{-1} = I_n$

a) Calculer $M^k + M^{-k}$ pour $k \in \{3,5,7\}$

b) Montrer que M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et donner une matrice diagonale semblable à M

c) Déterminer $M^k + M^{-k}$ pour tout entier k

Exercice 40 **(CCINP PSI 2023)** *[Indication] [Solution]*

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ canoniquement associée à f. On suppose $f = g^2$.

a) Déterminer les éléments propres de A ; est-elle diagonalisable ?

b) soient e_1 et e_3 des vecteurs propres de f associés à 1 et 3 ; montrer que $g(e_1)$ et $g(e_3)$ sont aussi des vecteurs propres de f, associés à 1 et 3.

c) En déduire que e_1 et e_3 sont aussi des vecteurs propres de g ; quelles sont les valeurs propres associées ?

d) g est-il diagonalisable ?

e) Quelles sont les valeurs propres possibles de g ?

2. Soit $F(x) = -\displaystyle\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t$

a) Déterminer le domaine de définition de F.

b) Montrer que pour $x \in [0,1]$, $F(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$

c) Montrer, pour $x \in]0,1[$, que $F(x) + F(1-x) = \dfrac{\pi^2}{6} - \ln(x)\ln(1-x)$, en admettant $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 41 **(CCINP PSI 2023)** *[Indication] [Solution]*

1. Soit $u_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$, pour $n \geqslant 1$

a) Montrer que u_n existe et tend vers 0

b) On pose $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n} u_n$. Montrer que $\sum v_n$ converge

c) On pose $w_n = \dfrac{(-1)^n}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$. Quelle est la nature de $\sum w_n$?

d) On pose $x_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$. Quelle est la nature de $\sum x_n$?

2. Soient $n \geqslant 2$, $\alpha \in \mathbb{C}$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $a_{i,j} = \alpha^{i+j-2}$

a) Montrer que a est diagonalisable si $\alpha \in \mathbb{R}$

b) Calculer le rang de A et en déduire ses valeurs propres.

c) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.

Exercice 42 **(CCINP PSI 2023)** *[Indication] [Solution]*

1. Soient α, β deux réels strictement positifs, X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que
$$P(X = i, Y = j) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\beta}\beta^i\alpha^j(1-\alpha)^{i-j}}{j!(i-j)!} & \text{si } 0 \leqslant j \leqslant i \\ 0 & \text{si } j > i \end{cases}$$

a) Déterminer les lois de X et Y

b) X et Y sont-elles indépendantes ?

c) On pose $Z = X - Y$; déterminer la loi de Z

d) Déterminer $P(Y = j | Z = n)$ et conclure

2. Pour $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k X^k$, on définit le produit scalaire $(P|Q) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_k$. Déterminer le projeté orthogonal de 1 sur $H = \{P \in \mathbb{R}_n[X], P(1) = 0\}$

Mines-Télécom

Exercice 43 **(Mines-Télécom PSI 2023)** *[Indication] [Solution]*

1. a) Trouver un équivalent en $+\infty$ de $\dfrac{1}{t} - \arctan\left(\dfrac{1}{t}\right)$.

b) Calculer $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} - \arctan\left(\frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t$.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$

a) Montrer que $\mathcal{X}_A = (X-1)(X+8)$; A est-elle diagonalisable ?

b) Déterminer P inversible et D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$; calculer P^{-1}

c) Trouver les matrices $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $A = B^3$

Exercice 44 **(Mines-Télécom PSI 2023)** *[Indication] [Solution]*

1. Soient E un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$, ℓ une forme linéaire non nulle sur E, $a \in E$ non nul et f définie par $f(x) = \ell(x)a - \ell(a)x$

a) Montrer que f est un endomorphisme de E qui s'annule en a.

b) Justifier que si $\ell(a) \neq 0$ et $f(x) = 0$ alors $x \in \mathrm{Vect}\{a\}$.

c) Calculer $f(x)$ si $\ell(x) = 0$

d) f est-il diagonalisable ?

e) Déterminer $\mathcal{X}_f$ et $\mathrm{Tr}(f)$.

2. Soient $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que $\sum \rho_n$ diverge et $S_n = \sum_{k=0}^{n} \rho_k$.

a) Montrer que $\sum \frac{\rho_n}{S_n}$ diverge.

b) Montrer que $\sum \frac{\rho_n}{S_n^2}$ converge.

Exercice 45 **(Mines-Télécom PSI 2023)** *[Indication] [Solution]*

1. Pour $(M,N) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2$, on pose $(M|N) = \mathrm{Tr}(M^T N)$. Soit $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

a) Montrer que $(\,|\,)$ est un produit scalaire

b) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et en trouver une base

c) Déterminer une base orthonormée de $F^\perp$

d) Déterminer la projection orthogonale de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $F^\perp$

2. Soit $F(a) = \int_0^\pi \sin(a \sin t)\,\mathrm{d}t$

a) Montrer que F est $\mathcal{C}^1$

b) Déterminer $\lim_{a\to 0} \frac{1}{a} F(a)$.

Exercice 46 **(Mines-Télécom PSI 2023)** *[Indication] [Solution]*

1. Soit E un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ pour lequel on a $\forall A \in E, A \neq 0 \Rightarrow A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$

a) Soit A, B inversibles

i. Montrer que $x \mapsto \det(xA - B)$ est polynômiale et déterminer son degré

ii. montrer qu'il existe un complexe k tel que $kA - B$ ne soit pas inversible

b) En déduire $\dim(E) \leqslant 1$

c) Trouver E

2. Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, on considère la propriété $(*)$: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1}{n}(f(x+n) - f(x))$

a) Soit f vérifiant $(*)$

i. En utilisant différentes valeurs de n, montrer que $f'(x) = f'(x+1)$

ii. Montrer que $x \mapsto \int_x^{x+1} f'(t)\,\mathrm{d}t$ ne dépend pas de x puis que f' est constante

b) Trouver les fonctions qui vérifient $(*)$

Exercice 47 **(Mines-Télécom PSI 2023)** *[Indication] [Solution]*

1. Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$

a) Déterminer le domaine de définition de f

b) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$

c) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^k}\right)$

2. Soient E un espace euclidien, $u, v \in E$ linéairement indépendants et $\varphi : x \in E \mapsto (v|x)u - (u|x)v$

a) Montrer que $F = \mathrm{Vect}\{u, v\}$ et son orthogonal sont supplémentaires

b) Écrire la matrice de φ dans une base adaptée à cette décomposition

c) φ est-il diagonalisable ?

Exercice 48 **(Mines-Télécom PSI 2023)** *[Indication] [Solution]*

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^3 - M^2 + M - I_n = 0$ et $MM^T = M^TM$. On pose $\Omega = M^TM$

a) Calculer M^4 et Ω^4

b) Justifier que M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

c) On suppose $\mathrm{Tr}(M) = 0$. Montrer qu'il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 0 & -I_p \\ I_p & 0 \end{pmatrix}$ avec $n = 2p$.

2. Soit $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+e^t}\,\mathrm{d}t$

a) Déterminer l'ensemble de définition de φ et étudier sa continuité

b) Montrer que, pour $x > 1$, $\varphi(x) = \Gamma(x) \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$ où $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$

c) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

Exercice 49 **(Mines-Télécom PSI 2023)** *[Indication] [Solution]*

1. Soient E un espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Soit f l'endomorphisme de E tel que $f(e_1) = f(e_3) = ae_1 + e_2 - ae_3$ et $f(e_2) = 0$, où $a \in \mathbb{R}$.

a) Déterminer les dimensions de $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$

b) Écrire la matrice A de f dans $\mathcal{B}$ puis calculer A^2 et en déduire les valeurs propres possibles de A

c) A est-elle inversible ?

d) On pose $B(x) = A - xI_3$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.

i. $B(x)$ est-elle inversible ?

ii. Calculer $B(x)B(-x)$ et en déduire $B(x)^{-1}$.

iii. Calculer $B(x)^n$

2. Déterminer le rayon de convergence et la somme de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n n x^{2n+1}$ à l'aide de fonctions usuelles

Exercice 50 **(Mines-Télécom PSI 2023)** *[Indication] [Solution]*

1. Soient E un espace euclidien, a et b deux vecteurs non nuls de E et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall x \in E, u(x) = (a|x)b + (b|x)a$

a) Déterminer $\ker(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$

b) Donner le spectre de u et les espaces propres de u

c) u est-il diagonalisable ?

d) Démontrer le résultat précédent d'une autre façon

2. On dispose de n boules que l'on répartit aléatoirement dans 3 urnes. On note X le nombre d'urnes vides après cette répartition.

a) Donner $X(\Omega)$.

b) Donner la loi de X.

c) Donner $E(X)$ puis $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} E(X)$ et interpréter le résultat.

Exercice 51 **(Mines-Télécom PSI 2023)** *[Indication] [Solution]*

1. Un pion se déplace sur une droite : il se déplace d'un cran vers la droite avec la probabilité $p \in]0,1[$ et vers la gauche avec la probabilité $1-p$. À l'instant initial, il est à l'origine du repère et on note X_n sa position après n déplacements.

a) Que vaut $X_n(\Omega)$?

b) On note D_n le nombre de déplacements vers la droite au cours des n premiers instants. Relier X_n à D_n.

c) Déterminer les lois de D_n et X_n.

d) Calculer l'espérance de X_n.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Trigonaliser A et calculer A^n.

Exercice 52 **(Mines-Télécom PSI 2023)** *[Indication] [Solution]*

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - 3A - 5I_n = 0$. Montrer que $\det(A) > 0$

2. Soit $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-x)^n}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

a) Montrer que u_n existe

b) Montrer que $\sum u_n$ diverge

c) Déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

d) Montrer que $u_{n+1} = \dfrac{2n+2}{2n+3} u_n$

Exercice 53 **(Mines-Télécom PSI 2023)** *[Indication] [Solution]*

1. Soit $u_n = \dfrac{1 + 2^2 + \cdots + n^n}{n^n}$

a) Trouver une relation entre u_n et u_{n+1}

b) En déduire une majoration de u_n

c) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite

2. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 + f + id_E = 0$

a) Montrer que, si $x \neq 0$, $(x, f(x))$ est libre

b) Montrer que f est bijectif

$\boxed{\textit{Autres}}$

Exercice 54 **(Mines-Télécom série 2 PSI 2023)** *[Indication] [Solution]*

1. a) Donner la définition de F et G sont supplémentaires dans E

b) On pose $E = \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $F = \{f \in E, f(0) = f'(0) = 0\}$ et $G = \{x \mapsto ax + b, (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$
Montrer que F et G sont deux sous-espaces de E supplémentaires

c) Soit $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$. Montrer que $f \in F$

d) Déterminer l'écriture de f dans la décomposition précédente.

2. On effectue n lancers de deux dés D_1 et D_2. Une victoire correspond à un lancer où la valeur de D_1 est strictement supérieure à la valeur de D_2. On note X le nombre de victoire au cours des n lancers.

a) Donner la loi de X

b) Espérance et variance de X ?

c) Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev

d) On note $p_n = P\left(0.9 \leqslant \dfrac{X}{E(X)} \leqslant 1.1\right)$. Déterminer une majoration de p_n.

Exercice 55 **(Navale PSI 2023)** *[Indication] [Solution]*

1. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, u et v deux endomorphismes de E.

a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ une valeur propre de $u \circ v$; montrer que λ est valeur propre de $v \circ u$

b) Soient $E = \mathbb{R}[X]$, $u : P \longmapsto \displaystyle\int_1^X P$ et $v : P \longmapsto P'$. Déterminer $\ker(u \circ v)$ et $\ker(v \circ u)$; le résultat de la première question est-il valable pour $\lambda = 0$?

c) On suppose E de dimension finie ; le résultat de la première question est-il valable pour $\lambda = 0$?

2. Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que $P(X = i, Y = j) = \dfrac{(i+j)2^{-(i+j)}}{ei!j!}$

a) Déterminer les lois de X et Y. Sont-elles indépendantes ?

b) ?

Indications

Exercice 1 *[sujet]* **2.** poser $u = \tan(t)$

Exercice 2 *[sujet]* **1.** a) raisonner par l'absurde en introduisant deux vecteurs propres linéairement indépendants et utiliser la première question

2. b) pour $\mathcal{C}^0$, écrire $f(x) = I - \sum_{n \geqslant 0} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{e^{-xt}}{t} \sin(t)\,dt$ et vérifier la CVU de la série de fct

Exercice 3 *[sujet]*

Exercice 4 *[sujet]*

Exercice 5 *[sujet]* **2.** La famille $((X+i)^k)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est-elle libre ?

Exercice 6 *[sujet]* **1.** a) poser $u = t^n$

Exercice 7 *[sujet]* **1.** a) Si $(f_1, \ldots, f_p)$ est une base de A, montrer que $\psi : x \in E \mapsto (f_1(x), \ldots, f_p(x)) \in \mathbb{R}^p$ est injective

b) pour $x \in \mathbb{R}$, introduire $\ell_x : f \mapsto f(x)$ (entre autres) ; l'implication la plus facile est celle dans le sens « indirect »

2. a) commencer par prouver la CV de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$

b) IPP en introduisant F une primitive de f et trouver λ tel que $F(t) - \lambda t = O(1)$

Exercice 8 *[sujet]*

Exercice 9 *[sujet]*

Exercice 10 *[sujet]*

Exercice 11 *[sujet]* **1.** a) Distinguer la position de $|y|$ par rapport à 1

2. Discuter sur les signe de $\frac{\mathrm{Tr}(u^2)}{\alpha}$

Exercice 12 *[sujet]*

Exercice 13 *[sujet]* **2.** c) prouver $|h_{n+1}(x) - h_n(x)| \leqslant \left| h_1\left(\frac{x}{2^n}\right) - h_0\left(\frac{x}{2^n}\right) \right|$; pour la CVU, utiliser $f(x) - h_n(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} h_{k+1}(x) - h_k(x)$

Exercice 14 *[sujet]* **2.** φ est une solution de l'équation

3. prouver $f_n = \alpha_n \cos + \beta_n \sin$ puis déterminer α_n et β_n

Exercice 15 *[sujet]*

Exercice 16 *[sujet]* **2.** Montrer que les sommes partielles de la série sont majorées

3. Trouver une équation différentielle (non linéaire) d'ordre 1 vérifiée par f, en déduire une relation sur les coeff de la série de Taylor g de f puis vérifier $\arctan f = \arctan g$

Exercice 17 *[sujet]* **2.** Utiliser Q1 pour examiner un vecteur de l'intersection

4. c'est faux : on peut utiliser $u : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto \int_0^x P(t)\,dt$ et $\|P\| = \max |p_k|$

Exercice 18 *[sujet]* **4.** raisonner par récurrence sur $\dim(E)$ puis calculer $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & L_1 \\ C_1 & V \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & L_1 \\ C_1 & V \end{pmatrix}$

Exercice 19 *[sujet]*

Exercice 20 *[sujet]* **3.** Calculer $\mathrm{Tr}(AB)$, $\mathrm{Tr}(BA)$, $\det(AB)$ et $\det(BA)$. Vérifier que pour les valeurs de x, y trouvées, AB et BA sont semblables à la même matrice diagonale et construire A et B à partir des matrices de passage et de la matrice diagonale.

Exercice 21 *[sujet]*

Exercice 22 *[sujet]* **1.** Distinguer $x \geqslant y$ et $y \geqslant x$

2. idem

3. Montrer que $\max\limits_{K}(f) = \max\limits_{D}(f)$

Exercice 23 *[sujet]*

Exercice 24 *[sujet]* **3.** Déterminer la valeur de $\phi_h(t)$ sur certains intervalles puis la valeur de l'intégrale de ϕ_h sur ces intervalles.

Exercice 25 *[sujet]*

Exercice 26 *[sujet]* **1.** a) Montrer $\ker(A) = \ker(A^T A)$ et introduire le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^p$

Exercice 27 *[sujet]*

Exercice 28 *[sujet]*

Exercice 29 *[sujet]*

Exercice 30 *[sujet]* **2.** c) Montrer qu'ils sont orthogonaux

Exercice 31 *[sujet]*

Exercice 32 *[sujet]* **2.** b) poser $u = \dfrac{\pi}{2} - t$

Exercice 33 *[sujet]*

Exercice 34 *[sujet]* **2.** b) Montrer que $X^4 - 2X^2 + X$ annule A

Exercice 35 *[sujet]*

Exercice 36 *[sujet]*

Exercice 37 *[sujet]* **1.** d) Commencer par une IPP

Exercice 38 *[sujet]*

Exercice 39 *[sujet]* **1.** f) Considérer $\sum \left(I_n - \dfrac{e^{-1}}{n} \right) x^n$ et sa limite quand x tend vers 1

Exercice 40 *[sujet]*

Exercice 41 *[sujet]*

Exercice 42 *[sujet]*

Exercice 43 *[sujet]*

Exercice 44 *[sujet]* **2.** a) Dans le cas où $\lim \dfrac{\rho_n}{S_n} = 0$, prouver $\dfrac{\rho_n}{S_n} \sim \ln\left(\dfrac{S_n}{S_{n-1}}\right)$

b) Comparer $\dfrac{\rho_n}{S_n^2}$ et $\dfrac{1}{S_{n-1}} - \dfrac{1}{S_n}$

Exercice 45 *[sujet]*

Exercice 46 *[sujet]*

Exercice 47 *[sujet]*

Exercice 48 *[sujet]* **1.** c) Pour trouver P, commencer par montrer que M est à la fois orthogonale et antisymétrique.

2. c) Commencer par justifier que la relation reste valable pour $x = 1$

Exercice 49 *[sujet]*

Exercice 50 *[sujet]*

Exercice 51 *[sujet]*

Exercice 52 *[sujet]*

Exercice 53 *[sujet]*

Exercice 54 *[sujet]*

Exercice 55 *[sujet]*

Solutions

Exercice 1 *[sujet]* **1.** a) $RR^T = I_3$ et $\det(R) > 0$

b) $A_1 = \dfrac{1}{3}A$

c) $D = SP = PS$ avec $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc $A_1 = (RPR^T)(RSR^T)$

d) ?

e) ?

2. a) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1+\cos^2(nt)} \overset{u=nt}{=} \frac{1}{n}\int_0^{n\pi} \frac{\mathrm{d}u}{1+\cos^2(u)} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}u}{1+\cos^2(u)}$ car $\cos^2$ est π-périodique. Puis $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1+\cos^2(t)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{2+u^2} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

b) ?

Exercice 2 *[sujet]* **1.** a) Si $x_n = 0$ alors la dernière ligne du système $AX = \lambda X$ donne $a_{n-1}x_{n-1} = 0$ donc $x_{n-1} = 0$ puis $x_i = 0$ par récurrence descendante

b) Si $\dim(E_\lambda(A)) \geqslant 2$, on prend deux vecteurs propres X, Y linéairement indépendants ; le $x_nY - y_nX$ est alors un vecteur propre dont la dernière coordonnée est nulle, ce qui est absurde avec Q1

c) A est sym réelle donc DZ, $m_\lambda(A) = \dim(E_\lambda(A)) = 1$ donc $\mathcal{X}_A$ est SARS

2. a) fait en cours

b) $g(x,t) = \dfrac{\sin(t)}{t} - \dfrac{\sin(t)}{t}e^{-xt} \underset{t\to+\infty}{=} \dfrac{\sin(t)}{t} + O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ pour $x > 0$ donc f est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ (et $f(0) = 0$)

$f(x) = I - \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ avec $u_n(x) = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{e^{-xt}}{t}\sin(t)\,\mathrm{d}t = (-1)^n \int_0^{\pi} \frac{e^{-(n\pi+u)}}{n\pi+u}\sin(u)\,\mathrm{d}u$ et par CSSA (à vérifier) $|R_n(x)| \leqslant |u_{n+1}(x)| \leqslant \dfrac{\pi}{n\pi} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc CVU sur $\mathbb{R}^+$. Reste à vérifier u_n continue : avec $\left|\dfrac{e^{-(n\pi+u)}}{n\pi+u}\sin(u)\right| \leqslant \dfrac{1}{n\pi}$ qui est intégrable sur $[n\pi, (n+1)\pi]$

c) $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant e^{-at}$ si $x \in [a,b] \subset \mathbb{R}^{+*}$ donc f est $\mathcal{C}^1$ et $f'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{x-i}\right) = \frac{1}{1+x^2}$ donc $f(x) = \arctan(x) + C$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc sur $\mathbb{R}^+$ par continuité et $f(0) = 0 = C$. Enfin, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f = I$ par double limite (avec la série de fct) avec CVU et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} u_n(x) = 0$ par TCDPC (par ex). On retrouve $I = \dfrac{\pi}{2}$

Exercice 3 *[sujet]* **1.** a) fait en cours

b) fait en cours

c) produit scalaire $(X|Y) = X^TAY$

2. a) on pose $S(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+2)}$, $R = 1$ puis pour $|x| < 1$, $S(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+2}\right) = \arctan(x) - \frac{1}{2x}\ln(1+x)$ et le résultat par CVN sur $[-1,1]$ avec $x = 1$

b) idem avec $T(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+2)}$ et, si $|x| < 1$, $T(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{x^{2n+1}}{2n+2}\right) = \sum_{n\geqslant 1}\frac{x}{n} - \sum_{n\geqslant 0}\frac{x^{2n+2}}{2n+2} - \sum_{n\geqslant 0}\frac{x^{2n+1}}{2n+2} = -\ln(1-x) + \frac{1}{2}\ln(1-x^2) + \frac{1}{2x}\ln(1-x^2) = \frac{1-x}{2x}\ln(1-x) + \frac{1+x}{2x}\ln(1+x) \xrightarrow[x\to1]{} \ln(2)$

Exercice 4 *[sujet]* **1.** a) Par IPP, $I_n = \dfrac{1}{(n+1)^2}$

b) (a,b) est l'unique couple tel que $aX + b = \pi_{\mathbb{R}_1[X]}(\ln)$ pour le produit scalaire $(f|g) = \displaystyle\int_0^1 x^2 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ sur $E = \mathrm{Vect}\{\ln, 1, id\}$ (par ex), ...

2. a) par continuité décroissante $P\left(\displaystyle\bigcap_{k\geqslant 1} A_k\right) = \displaystyle\lim_{p\to+\infty} P(B_p)$; par coalitions, les A_k sont indép donc $P(B_p) = \displaystyle\prod_{k=1}^{p} P(A_k)$ et $P(A_k) = P((X_{2k-1} = 0) \cup (X_{2k} = 0)) = P(X_{2k-1} = 0) + P(X_{2k} = 0) - P(X_{2k-1} = X_{2k} = 0) =$

$\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{3}-\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{8}{9}$. Donc $P(B_p)=\left(\dfrac{8}{9}\right)^p\xrightarrow[p\to+\infty]{}0$.
$\overline{\bigcap_{k\geqslant 1} A_k}=\bigcup_{k\geqslant 1}(X_{2k-1}=X_{2k}=1)\subset\bigcap_{j\geqslant 1}(X_j=X_{j+1}=1)=P(T\in\mathbb{N})$

b) $P(T=n+1)=P(T=n+1|X_1=0)P(X_1=0)+P(T=n+1|X_1=1)P(X_1=1)=P(T=n)\dfrac{1}{3}+P(T=n-1)\dfrac{1}{3}\dfrac{2}{3}$ car si $(X_1=0)$ et $(T=n+1)$ (avec $n\geqslant 3$) alors $(X_2=0)$. De plus $P(T=2)=\dfrac{4}{9}$ et $P(T=3)=\dfrac{4}{27}$

c) T est à valeurs dans $\mathbb{N}$ (presque sûrement) donc $E(T)$ existe dans $\mathbb{R}^+\cup\{+\infty\}$ et on a $E(T)=\sum_{n\geqslant 2}nP(T=n)=2P(T=2)+3P(T=3)+\sum_{n\geqslant 3}(n+1)P(T=n+1)=\dfrac{8}{9}+\dfrac{4}{9}+\sum_{n\geqslant 3}(n+1)\left[\dfrac{1}{3}P(T=n)+\dfrac{2}{9}P(T=n-1)\right]=\dfrac{4}{3}+\dfrac{1}{3}(E(T)-2P(T=2)+1-P(T=2))+\dfrac{2}{9}(E(T)+2)\ \ldots$

Exercice 5 *[sujet]* **1.** a) $|f(x,t)|\leqslant\dfrac{1}{1+t^2}$ donne tout avec $|F(x)|\leqslant\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\frac{\pi}{2}=F(0)$

b) idem avec $|g(x,t)|\leqslant\dfrac{1}{(1+t^2)^2}$, intégrable sur $\mathbb{R}^+$

c) poser $u=xt$

d) si $H(x)=\dfrac{F(x)}{x}=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos(t)}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t$ alors $\left|\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right|=\dfrac{2x|\cos t|}{(x^2+t^2)^2}\leqslant\dfrac{2b}{(a^2+t^2)^2}$, si $x\in[a,b]\subset\mathbb{R}^{+*}$, intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Donc $H'(x)=-2x\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos(t)}{(x^2+t^2)^2}\,\mathrm{d}t=-2\frac{G(x)}{x^2}$ en posant $u=xt$

e) $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right|\leqslant\dfrac{t}{(1+t^2)^2}$ intégrable sur $\mathbb{R}^+$ donc $G'(x)=-\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t}{(1+t^2)^2}\times\sin(xt)\,\mathrm{d}t\overset{\text{IPP}}{=}-\frac{x}{2}F(x)$

f) F' est donc $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $xF'(x)=F(x)-2G(x)$ donne $xF''(x)=xF(x)$. On en déduit $F(x)=\alpha e^x+\beta e^{-x}$ sur $\mathbb{R}^+$ (car continue en 0), F bornée donne $\alpha=0$ et $F(0)=\dfrac{\pi}{2}$ donc $F(x)=\dfrac{\pi}{2}e^{-x}$

2. $((X+i)^k)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une famille de n polynômes de $\mathbb{C}_k[X]\subset\mathbb{C}_{n-2}[X]$ donc est liée : il existe λ_i non tous nuls tels que $\lambda_1(X+1)^k+\cdots+\lambda_n(X+n)^k=0$ donc $\lambda_1L_1+\cdots+\lambda_nL_n=0$ et le déterminant est nul.

Exercice 6 *[sujet]* **1.** a) $a_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{u^{1/n}}{u\,\mathrm{ch}\,u}\sim\frac{1}{n}\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u\,\mathrm{ch}\,u}$ par TCD avec $\left|\dfrac{u^{1/n}}{u\,\mathrm{ch}\,u}\right|\leqslant\dfrac{1}{\mathrm{ch}\,u}\underset{u\to+\infty}{=}o\left(\dfrac{1}{u^2}\right)$

b) $a_n\sim\dfrac{I}{n}$ avec $I>0$ donc $R=1$ et $\sum a_n$ DV (SATP) ; par CSSA, $\sum(-1)^na_n$ CV

c) $\dfrac{1}{\mathrm{ch}(t^n)}=\dfrac{2e^{-t^n}}{1-e^{-2t^n}}=2\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}e^{-(2k+1)t^n}$ donc (TITT) $a_n=2\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-(2k+1)t^n}\,\mathrm{d}t$ car $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left|e^{-(2k+1)t^n}\right|\mathrm{d}t\leqslant\int_1^{+\infty}e^{-(2k+1)t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2k+1}e^{-(2k+1)}$

2. Fait en cours : noyaux et images itérés

Exercice 7 *[sujet]* **1.** a) si $x\in\ker\psi$ alors $f_i(x)=0$ et (f_i) est une base de A donc si $\ell\in A$, $\ell=\alpha_1f_1+\cdots+\alpha_pf_p$ donc $\ell(x)=0$ et $x\in\bigcap_{\ell\in A}\ker(\ell)=\{0\}$. ψ est linéaire et injective donc $\dim(E)\leqslant\dim(\mathbb{R}^p)=p$; de plus $\dim(E)=\dim(\mathcal{L}(E,\mathbb{R}))$ donc $\dim(\mathcal{L}(E,\mathbb{R}))\leqslant p=\dim(A)$ et $A=\mathcal{L}(E,\mathbb{R})$

b) i. On suppose $(f_1,\ldots,f_n)$ libre. On pose $E=\mathrm{Vect}\{f_1,\ldots,f_n\}$ et $A=\mathrm{Vect}\{\ell_x,x\in\mathbb{R}\}$. Si $f\in\bigcap_{\ell\in A}\ker(\ell)$ alors $\forall x\in\mathbb{R},\ell_x(f)=0$ donc $f(x)=0$ et $f=0$. On a donc $A=\mathcal{L}(E,\mathbb{R})$, ce qui donne $\dim(A)=\dim(E)=n$. On peut extraire une base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{L}(E,\mathbb{R})$ de la famille génératrice $(\ell_x)_{x\in\mathbb{R}}$: il existe une base $\mathcal{B}=(\ell_{x_1},\ldots,\ell_{x_n})$ de A. Les matrices $L_i=\mathrm{Mat}_{(f_1,\ldots,f_n)}(\ell_{x_i})=(f_j(x_i))_{1\leqslant j\leqslant n}\in\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ sont donc libres ce qui donne l'inversibilité de la matrice $(f_i(x_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

ii. réciproquement, s'il existe (x_j) et si $\displaystyle\sum_{i=1}^n\alpha_if_i=0$ alors $\forall j\in[\![1,n]\!],\displaystyle\sum_{i=1}^n\alpha_if_i(x_j)=0$ donc $AX=0$ avec $A=(f_i(x_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $X=(\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Comme A est inversible, on en déduit $X=0$ donc (f_i) est libre.

2. a) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ CV (cf cours) donc $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin(t)-\lambda}{t}\,dt$ CV si et seulement si $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\lambda}{t}\,\mathrm{d}t$ CV, ce qui n'arrive que pour $\lambda=0$.

b) On pose $F(x)=\displaystyle\int_1^x f(u)\,\mathrm{d}u$; il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $1+nT\leqslant x<1+(n+1)T$ (c'est $n=\left\lfloor\dfrac{x-1}{T}\right\rfloor$) et on a $F(x)=n\displaystyle\int_1^{1+T} f(u)\,\mathrm{d}u+\int_{1+nT}^x f(u)\,\mathrm{d}u$; comme f est continue et T-périodique, elle est bornée (et atteint ses bornes) sur le segment $[1,1+T]$ puis sur $[1,+\infty[$. On a donc $\left|\displaystyle\int_{1+nT}^x f(u)\,\mathrm{d}u\right|\leqslant T\|f\|_\infty$ (bornée) et donc avec $\lambda=\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_1^{1+T} f(u)\,\mathrm{d}u$ (valeur moyenne de f), on a $F(x)=\lambda x+O(1)$. On fait alors une IPP avec $u'(t)=f(t)-\lambda$ et $v(t)=\dfrac{1}{t}$: on a $u(t)v(t)=\dfrac{F(t)-\lambda t}{t}\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$ donc $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{f(t)-\lambda}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{F(t)-\lambda t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ sont de même nature et la seconde converge car $\dfrac{F(t)-\lambda t}{t^2}=O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

Reste l'unicité : si l'intégrale CV aussi pour un $\mu\in\mathbb{R}$, par linéarité, $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mu-\lambda}{t}\,\mathrm{d}t$ est CV donc $\lambda-\mu=0$.

Exercice 8 *[sujet]* **1.** a) $\varphi(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{3n}=\sum_{n=0}^{+\infty}b_nx^n$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. Si $y(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ avec $R>0$, y est solution de (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si $(2n+1)a_n=3b_{n-1}$ donc $R=+\infty$ et $y(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{3n+1}}{(6n+4)(2n)!}$ (une unique solution DSE y_0)

b) sur $\mathbb{R}^{+*}$: $y(x)=\dfrac{\alpha}{\sqrt{x}}+y_0$ et sur $\mathbb{R}$, $y(x)=\begin{cases}\dfrac{\alpha}{\sqrt{x}}+y_0 & \text{si } x>0\\ \dfrac{\beta}{\sqrt{-x}}+y_0 & \text{si } x<0\end{cases}$ une telle solution est prolongeable par continuité en 0 si et seulement si $\alpha=\beta=0$ donc y_0 est la seule solution sur $\mathbb{R}$.

2. a) $\mathcal{X}_A=X^n+a_{n-1}^{n-1}+\cdots+a_0$

b) si $P=X^3+X+1$, on a $P'=3X^2+1>0$ donc P admet une unique racine réelle α ; les vp possibles de M sont donc $\alpha,\lambda,\overline{\lambda}$ avec $m_\lambda(M)=m_{\overline{\lambda}}(M)$. Pour $n=3$, Q1 donne une solution M_3 puis si $n\geqslant 3$, $M_n=\begin{pmatrix}\alpha I_{n-3} & 0\\ 0 & M_3\end{pmatrix}$ convient. Pour $n=2$ une telle matrice existe aussi : on a $X^3+X+1=(X-\alpha)Q$ avec $Q\in\mathbb{R}_2[X]$ unitaire donc une matrice (donnée par Q1) telle que $Q(M_2)=0$ convient.

Exercice 9 *[sujet]* **1.** a) f_n est $\mathcal{C}^1$ par réc et $f_{n+1}'=f_n$ puis $S'=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}f_n'=f_0'+\sum_{n=1}^{+\infty}f_{n-1}=f_0'+S$. On en déduit $S(x)=\alpha e^x+e^x\displaystyle\int_a^x e^{-t}f_0'(t)\,\mathrm{d}t$ et $S(a)=f_0(a)$ donne $\alpha=e^{-a}f_0(a)$

b) $\|f_n'\|_\infty=\|f_{n-1}\|_\infty$

c) $\|f_n\|\_infty\leqslant\dfrac{1}{2^n}$ donc $\sum f_n$ CVU sur $[0,1]$ et $S(x)=e^x\displaystyle\int_0^x e^{-t}\sin(2t)\,\mathrm{d}t=e^x\,\mathrm{Im}\left(\int_0^x e^{-(1+2i)t}\,\mathrm{d}t\right)$

2. a) $\mathcal{X}_A=X^n-\displaystyle\sum_{k=1}^n a_kX^{k-1}$. On vérifie $\mathrm{rg}(A-\lambda I_n)\geqslant n-1$ car $(C_1,\dots,C_{n-1})$ est libre donc les espaces propres de A sont des droites et A est DZ si et seulement si $\mathcal{X}_A$ est SARS

Exercice 10 *[sujet]* **1.** a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}f_n(x)=f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x>0\\ 1 & \text{si } x=0\end{cases}$

b) $|f_n(x)|\leqslant\dfrac{1}{1+n^2a^2}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ donc CVUTS de $]0,1]$

c) f n'est plus continue en 0

d) $\lim u_n=0$ par TCD avec $|f_n(x)|\leqslant 1$

e) $u_n\geqslant e^{-1}\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+n^2x^2}=\frac{e^{-1}}{n}\arctan(n)\sim\frac{e^{-1}}{n}\frac{\pi}{2}$ donc (SATP) $\sum u_n$ DVG

2. a) Cours

b) Si $(P|P)=0$ alors $P(k)+P(1)=0$ pour $k\in[0,3]$ donc $(k=1)$ $P(1)=0$ puis $P(k)=0$ pour $k\in[\![0,3]\!]$ et P possède au moins 4 racines distinctes ; le reste est facile

c) On remarque que (L_0,L_2,L_3) est déjà orthonormée donc il suffit de redresser (puis normer) L_1 ; on trouve $\dfrac{1}{\sqrt{7}}(L_1-L_0-L_2-L_3)$

Exercice 11 *[sujet]* **1.** a) Si $|y| > 1$ alors $f_n(x,y) \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\dfrac{x}{y}\right)^{2n}$ (SATP) donc CV si et seulement si $\left|\dfrac{x}{y}\right| < 1$; $f_n(x,\pm1) = \dfrac{x^{2n}}{2}$ donc CV si et seulement si $|x| < 1 = |y|$; enfin, si $|y| < 1$ alors $f_n(x,y) \underset{n\to+\infty}{\sim} x^{2n}$ (SATP) donc CV si et seulement si $|x| < 1$. Au final $D =]-1,1[^2 \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, |y| \geqslant 1, |x| < |y|\}$

b) Par rapport à la variable x, $x \mapsto f(x,y)$ est une série entière donc $\mathcal{C}^\infty$. Par rapport à y, c'est une série de fonctions donc on applique le th de dérivation avec $\left|\dfrac{\partial f_n}{\partial y}(x,y)\right| = 2n\dfrac{|y|^{2n-1}x^{2n}}{(1+y^{2n})^2}$. On étudier le cas $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ par exemple : si $|x| < 1$ et $0 \leqslant y \leqslant a$ alors $\left|\dfrac{\partial f_n}{\partial y}(x,y)\right| \leqslant 2nx^{2n}$ donc CVNTS de $\mathbb{R}^+$; si $|x| \geqslant 1$ et $y \in [a,+\infty[$ avec $a > x$ (cf D), alors $\left|\dfrac{\partial f_n}{\partial y}(x,y)\right| \leqslant 2n\left(\dfrac{x}{a}\right)^{2n}$ donc CVNTS de $]x,+\infty[$. Au final f admet des dérivées partielles en tout point de D.

2. On introduit la matrice $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de u dans une base de E (pour faire apparaître ses vp complexes si besoin)

— si $\mathrm{Tr}(u^2) = 0$ alors $u^3 = 0$ et tous les endomorphismes nilpotents tels que $u^3 = 0$ (indice 2 ou 3) conviennent car $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(U) = \{0\}$ donc $\mathrm{Tr}(U^2) = 0$

— si $\dfrac{\mathrm{Tr}(u^2)}{\alpha} > 0$, $\alpha X\left(X^2 - \dfrac{\mathrm{Tr}(u^2)}{\alpha}\right)$ est SARS dans $\mathbb{R}$ donc U est semblable à $\mathrm{diag}\left(0I_{n_1}, \sqrt{\dfrac{\mathrm{Tr}(u^2)}{\alpha}}I_{n_2}, -\sqrt{\dfrac{\mathrm{Tr}(u^2)}{\alpha}}I_{n_3}\right)$ et une telle matrice est bien solution si et seulement si $\alpha = n_2 + n_3 \in [\![0,n]\!]$ (calculer $\mathrm{Tr}(D^2)$ et D^3)

— si $\dfrac{\mathrm{Tr}(u^2)}{\alpha} < 0$, $\alpha X\left(X^2 - \dfrac{\mathrm{Tr}(u^2)}{\alpha}\right)$ est SARS dans $\mathbb{C}$ donc U est semblable, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, à la matrice $\mathrm{diag}\left(0I_{n_1}, i\sqrt{-\dfrac{\mathrm{Tr}(u^2)}{\alpha}}I_{n_2}, -i\sqrt{-\dfrac{\mathrm{Tr}(u^2)}{\alpha}}I_{n_2}\right)$ qui est bien solution si et seulement si $\alpha = 2n_2 \in [\![0,n]\!]$. On peut ensuite montrer que U est semblable dans $\mathbb{R}$ à $\begin{pmatrix} 0I_{n_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{-\dfrac{\mathrm{Tr}(u^2)}{\alpha}}I_{n_2} \\ 0 & -\sqrt{-\dfrac{\mathrm{Tr}(u^2)}{\alpha}}I_{n_2} & 0 \end{pmatrix}$: si $Z = X + iY$ est tel que $UZ = \sqrt{-\dfrac{\mathrm{Tr}(u^2)}{\alpha}}Z$ alors (X,Y) est libre, $UX = -\sqrt{-\dfrac{\mathrm{Tr}(u^2)}{\alpha}}Y$ et $UY = \sqrt{-\dfrac{\mathrm{Tr}(u^2)}{\alpha}}X$ donc on construit la base à partir des parties réelles et imaginaires des vecteurs d'une base de l'espace propre (complexe) associé à $i\sqrt{-\dfrac{\mathrm{Tr}(u^2)}{\alpha}}$ (vérifier que les vecteurs obtenus sont $\mathbb{R}$-linéairement indépendants)

Exercice 12 *[sujet]* **1.** a) $I_{p,q} \overset{\text{IPP}}{=} \dfrac{p}{q+1}I_{p-1,q+1} = \dfrac{p!}{q!}(p+q+1)!$

b) i. On calcule la probabilité que A_n soit réalisé sachant que les tirages se font dans l'urne k $P(A_n|U_k) = \dbinom{2n}{n}p^n(1-p)^n$ donc $P(A_n = \dfrac{1}{p}\displaystyle\sum_{k=1}^{p}\dbinom{2n}{n}\left(\dfrac{p}{n}\right)^n\left(1-\dfrac{p}{n}\right)^n$

ii. Somme de Riemann : $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} P(A_n) = \dbinom{2n}{n}I_{n,n} = \dfrac{1}{2n+1}$

iii. La somme est finie et, avec Stirling, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = 0$

2. a) $y(t) = \alpha \ln\dfrac{1-t}{1-t} + \beta$

b) $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) = -4\dfrac{\cos 2x}{\operatorname{ch} 2y}f'\left(\dfrac{\cos 2x}{\operatorname{ch} 2y}\right) + 4\dfrac{\sin^2 2x}{\operatorname{ch}^2 2y}f''\left(\dfrac{\cos 2x}{\operatorname{ch} 2y}\right)$ et $\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = -2\cos 2x\left[\dfrac{2}{\operatorname{ch} 2y} - 4\dfrac{\operatorname{sh}^2 2y}{\operatorname{ch}^3 2y}\right]f'\left(\dfrac{\cos 2x}{\operatorname{ch} 2y}\right) + 4\dfrac{\operatorname{sh}^2 2y\cos^2 2x}{\operatorname{ch}^4 2y}f''\left(\dfrac{\cos 2x}{\operatorname{ch} 2y}\right)$ donc $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = \dfrac{4}{\operatorname{ch}^2 2y}\left[\left(1 - \dfrac{\cos^2 2x}{\operatorname{ch}^2 2y}\right)f''\left(\dfrac{\cos 2x}{\operatorname{ch} 2y}\right) - 2\dfrac{\cos 2x}{\operatorname{ch} 2y}f'\left(\dfrac{\cos 2x}{\operatorname{ch} 2y}\right)\right]$ donc on retombe sur la première question en posant $t = \dfrac{\cos 2x}{\operatorname{ch} 2y} \in]-1,1[$ car $|\cos 2x| \leqslant 1$ et $\operatorname{ch} 2x > 1$ si $y \in \mathbb{R}^{+*}$

Exercice 13 *[sujet]* **1.** on vérifie $g'(y) = 1 - xy \in [0,1]$ donc (IAF) g est 1-lip et $[0,1]$ est stable (variations)

2. a) $h_0 \in [0,1]$ et $h_{n+1}(x) = g\left(h_n\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)$, d'où le résultat par récurrence

b) $|h_{n+1}(x) - h_n(x)| = \left|g\left(h_n\left(\dfrac{x}{2}\right)\right) - g\left(h_{n-1}\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)\right| \overset{1-\text{lip}}{\leqslant} \left|h_n\left(\dfrac{x}{2}\right) - h_{n-1}\left(\dfrac{x}{2}\right)\right|$

c) On en déduit $|h_{n+1}(x) - h_n(x)| \leqslant \left|h_1\left(\frac{x}{2^n}\right) - h_0\left(\frac{x}{2^n}\right)\right| = \frac{x}{2^{n+1}} \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}$ donc $\sum(h_{n+1}(x) - h_n(x))$ est ACV et (h_n) CVS vers f sur $[0,1]$. Puis $|f(x) - h_n(x)| = \left|\sum_{k=n}^{+\infty} h_{k+1}(x) - h_k(x)\right| \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^n}$ donc $\|f - h_n\|_\infty \leqslant \frac{1}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc (h_n) CVU vers f sur $[0,1]$

3. par récurrence, on vérifie que h_n est continue sur $[0,1]$ donc f aussi par CVU ; $h_n(0) = 1$ donc $f(0) = 1$ et par passage à la limite dans la relation qui définit $h_n(x)$, on trouve l'équation fonctionnelle de f

Exercice 14 *[sujet]* **1.** $|e^{-t}e^{it}| = e^{-t}$ est intégrable sur $[x, +\infty[$ puis on trouve $\varphi(x) = \frac{1}{2}(\cos(x) - \sin(x))$ et $\psi(x) = \frac{1}{2}(\cos(x) + \sin(x))$

2. $\varphi(x) = -e^x \int_0^x e^{-t}\cos(t)\,\mathrm{d}t + e^x\varphi(0)$ donc φ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\varphi'(x) = \varphi(x) - \cos(x)$. Les solutions sont $y(x) = \alpha e^x + \varphi(x)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. On a ensuite $|\varphi(x)| \leqslant e^x \int_x^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t = 1$ donc φ est bornée et y est bornée sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\alpha = 0$

3. Si $f_n = \alpha_n \cos + \beta_n \sin$ alors $f_{n+1} = \frac{\alpha_n + \beta_n}{2}\cos + \frac{\beta_n - \alpha_n}{2}\sin$; on a donc $\begin{pmatrix}\alpha_{n+1}\\ \beta_{n+1}\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_n\\ \beta_n\end{pmatrix}$ puis $\begin{pmatrix}\alpha_n\\ \beta_n\end{pmatrix} = \frac{1}{2^n}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$; on vérifie ensuite $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}^n = 0$ (calculer la puissance) donc $(\alpha_n, \beta_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} (0,0)$ et $\|f_n\|_\infty \leqslant |\alpha_n| + |\beta_n|$ et (f_n) CVU vers 0 sur $\mathbb{R}$

Exercice 15 *[sujet]* **1.** $h_\alpha(t) = \ln\left(-1 + \frac{1+\alpha^2}{\alpha^2 + t^2}\right)$ donc décroît et $h_\alpha(t) = \ln(1-t) + \ln(1+t) - \ln(\alpha^2 + t^2) \underset{t\to1}{\sim} \ln(1-t)$

2. pour $x \in [0,1[$, $\int_0^x h_\alpha(t)\,\mathrm{d}t \overset{\text{IPP}}{=} 2\ln(1+x) - \ln(\alpha^2 + t^2) - 2\alpha\arctan\frac{x}{\alpha} \xrightarrow[x\to1]{} 2\ln 2 - \ln(1+\alpha^2) - 2\alpha\arctan\frac{1}{\alpha}$

3. comparaison avec une intégrale : $\frac{1}{n}h_\alpha\left(\frac{2n-1}{2n}\right) + \int_{1/2n}^{2n-1/2n} h_\alpha(t)\,\mathrm{d}t \leqslant S_n \leqslant \frac{1}{2}h_\alpha\left(\frac{1}{2n}\right) + \int_{1/2n}^{2n-1/2n} h_\alpha(t)\,\mathrm{d}t$ puis limite par encadrement

4.

Exercice 16 *[sujet]* **1.** par récurrence : $P_{n+1} = (1 - X^2)P_n' + (n+1)XP_n$

2. si $\alpha_n = f^{(n)}(0)$ alors $\alpha_n \geqslant 0$ puis $\sum_{k=0}^{n} \alpha_n|x|^n = f(|x|) - \int_0^{|x|} \frac{(|x| - t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(|x|)$ car $f^{(n+1)} \geqslant 0$ sur $[0, \pi/2[$.

3. on vérifie $2f'(x) = 1 + f(x)^2$ donc $2\frac{\alpha_{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{\frac{\alpha_k}{k!}} \times \frac{\alpha_{n-k}}{(n-k)!}$, ce qui donne aussi $2g'(x) = 1 + g(x)^2$. On en déduit $(\arctan f)' = (\arctan g)'$ donc $\arctan f = \arctan g$ car $f(0) = g(0)$. Enfin , comme $tan(arctanx) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f = g$ donc f est DSE

Exercice 17 *[sujet]* **1.** $(u - id)\circ v_n = \frac{1}{n+1}(u^{n+1} - id)$

2. si $x \in \ker(u - id) \cap \operatorname{Im}(u - id)$ alors $u(x) = x$ et $x = u(y) - y$ donc $v_n \circ (u - id)(y) = v_n(x) = x$ puis $x = v_n \circ (u - id)(y) = \frac{1}{n+1}(u^{n+1}(y) - y)$ donc $\|x\| \leqslant \frac{1}{n+1}(\|v^{n+1}(y)\| + \|y\|) \leqslant \frac{2}{n+1}\|y\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $x = 0$

3. th du rang appliqué à $u - id$

4. on vérifie $\|u(P)\| \leqslant \|P\|$, $\deg(u(P) - P) = 1 + \deg(P)$ (si $P \neq 0$) donc $\ker(u - id) = \{0\}$ et $1 \notin \operatorname{Im}(u - id)$ donc $\operatorname{Im}(u - id) \neq \mathbb{R}[X]$

Exercice 18 *[sujet]* **1.** facile car $\operatorname{Tr}(u \circ v) = \operatorname{Tr}(v \circ u)$

2. si (e_i) est une base de E alors $(e_i, f(e_i)$ liée donne $f(e_i) = \lambda_i e_i$ et $(e_1 + e_i, f(e_1 + e_i))$ liée donne $f(e_1) + f(e_i) = \mu_i(e_1 + e_i)$ donc (pour $i \geqslant 2$), par liberté de (e_1, e_i), $\mu_i = \lambda_1 = \lambda_i$ puis $f = \lambda_1 id$

3. si $f = \lambda id$ et $\operatorname{Tr}(f) = 0$ alors $f = 0$. Sinon il existe e_1 tel que $(e_1, f(e_1))$ soit libre, on complète en une base dans laquelle la première colonne de la matrice est $\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\\ \vdots\end{pmatrix}$

4. soit A de trace nulle, on vient de trouver P inversible telle que $A = P\begin{pmatrix}0 & L\\ C & A'\end{pmatrix}$, on a $\mathrm{Tr}(A') = \mathrm{Tr}(A) = 0$ donc on peut raisonner par récurrence HR(n) : si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de trace nulle alors il existe U, V telles que $A = UV - VU$. Avec $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ de trace nulle, on peut appliquer l'HR(n) à A' : $A' = UV - VU$. On vérifie alors $\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & U\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & L_1\\ C_1 & V\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & U\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & L_1\\ C_1 & V\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & L_1(\alpha I_n - U)\\ (U-\alpha I_n)C_1 & UV - VU\end{pmatrix}$ donc si on choisit $\alpha \notin \mathrm{Sp}(U)$, $U - \alpha I_n$ est inversible et on peut poser $L_1 = L(U-\alpha I_n)^{-1}$ et $C_1 = (U - \alpha I_n)^{-1}C$, ce qui donne deux matrices U', V' telles que $P^{-1}AP = U'V' - V'U'$. On termine avec $A = (PU'P^{-1})(PV'P^{-1}) - (PV'P^{-1})(PU'P^{-1})$

Exercice 19 *[sujet]* **1.** $|u_n v_n| \leqslant \frac{1}{2}(u_n^2 + v_n^2)$ donc ACV

2. facile

3. ?

Exercice 20 *[sujet]* **1.** S est sym réelle donc DZ et semblable à $\Delta = \mathrm{diag}(-5, 5)$ et à $P\Delta P^{-1} = \begin{pmatrix}0 & 5\\ 5 & 0\end{pmatrix} = S'$ si $P = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

2. $\phi(M) = \begin{pmatrix}0 & -m_{1,2}\\ m_{2,1} & 0\end{pmatrix}$ donc $\mathrm{Im}\,\phi = \mathrm{Vect}\{E_{1,2}, E_{2,1}\}$ est l'ensemble des matrices à diagonales nulles. Il existe donc M telle que $\phi(M) = S' = QSQ^{-1}$ puis $S = (Q^{-1}\mathrm{diag}(1,2)Q)(Q^{-1}MQ) - (Q^{-1}MQ)(Q^{-1}\mathrm{diag}(1,2)Q)$

3. $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ et $\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(BA)$ donc $x + y = 30$ et $xy = 200$ donc x et y sont les solutions de $X^2 - 30X + 200 = (X-10)(X-20)$. Dans ce cas, $\mathcal{X}_{AB} = \mathcal{X}_{BA}$ donc AB et BA sont DZ (sym réelles) et semblables à la même matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(\alpha, \beta)$. Ainsi il existe P, Q tels que $AB = PDP^{-1}$ et $BA = QDQ^{-1}$; on vérifie alors qu'on peut prendre $A = P\mathrm{diag}(\alpha, 1)Q^{-1}$ et $B = Q\mathrm{diag}(1, \beta)P^{-1}$

Exercice 21 *[sujet]* **1.** Si φ est continue en 0 alors ($\varepsilon = 1$) il existe $r > 0$ tel que $\|f\| \leqslant r \Rightarrow |\varphi(f)| < 1$. Si $f \neq 0$, on pose $g = \frac{r}{2\|f\|}f$ de sorte que $\|g\| = \frac{r}{2} < r$ donc $|\varphi(g)| \leqslant 1$ et par linéarité, $\varphi(g) = \frac{r}{2\|f\|}\varphi(f)$ donc on a $|\varphi(f)| \leqslant \frac{2}{r}\|f\|$ (qui reste valable pour $f = 0$) donc f est continue. Récip évidente

2. a) $|\varphi(f)| \leqslant \int_{-1}^{1} |f(t)|\,\mathrm{d}t + \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant 2\|f\|_\infty$ donc $N \leqslant 2$. On aurait $\varphi(f) = 2$ pour la fct f valant 1 sur $[-1, 0]$ et -1 sur $]0, 1]$ mais elle n'est pas continue donc on va « l'approcher » : on pose $f_n(t) = -1$ sur $[-1, 0]$, $f_n(t) = -2nt + 1$ sur $\left[0, \frac{1}{n}\right]$ et $f_n(t) = 1$ si $t \geqslant \frac{1}{n}$ (dessinez là). On a $\|f_n\|_\infty = 1$ et $\varphi(f_n) = 2 - \frac{1}{n}$ donc $N = 2$

b) ?

Exercice 22 *[sujet]* **1.** si $x \geqslant y$, $|f(x,y)| \leqslant \frac{xy}{(1+x)(1+y)2y} = \frac{x}{2(1+x)(1+y)} \leqslant \frac{x}{2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$ et on fait de même dans l'autre cas

2. si $x \geqslant y$, $f(x,y) \leqslant \frac{x}{1+x} \times \frac{1}{2(1+y)} \leqslant \frac{1}{2}$ et de même si $y \geqslant x$

3. f est continue sur K, fermé borné non vide en dimension finie, donc $M = \max\limits_K(f)$ existe. Comme $(1,1) \in K$, on a $M \geqslant f(1,1) = \frac{1}{8}$ et si $(x,y) \notin K$ alors $f(x,y) = \frac{x}{1+x}\frac{y}{1+y}\frac{1}{x+y} \leqslant 1 \times 1 \times \frac{1}{20} < f(1,1) \leqslant M$ donc $M = \max\limits_D(f)$ aussi (et existe)

4. Si $x = 0$ ou $y = 0$ alors $f(x,y) = 0$ donc M est atteint sur $\overset{o}{D} = (\mathbb{R}^{+*})^2$ qui est un ouvert et f est $\mathcal{C}^1$ sur $\overset{o}{D}$ donc M est atteint en un point critique. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y(y-x^2)}{(1+y)(1+x)^2(x+y)^2}$ (et sym pour y) donc (x,y) est un point critique si et seulement si $\left\{\begin{array}{l} y = x^2\\ x = y^2\end{array}\right. \Leftrightarrow x = y = 1$ donc $M = f(1,1) = \frac{1}{8}$.

Exercice 23 *[sujet]* **1.** $\det(u \circ v) = (-1)^n \det(v \circ u)$ et $\det(u \circ v) = \det(u)\det(v) \neq 0$ donc $(-1)^n = 1$

2. si $x \in F^+$ alors $u(x) = -x$ donc $v(x) = -v(u(x)) = u(v(x))$ donc $v(x) \in F^-$; réciproquement, si $x \in F^-$ alors $u(x) = x$ et $x = v^2(x) = v(v(x))$ puis on vérifie $v(x) \in F^+$ car $u(v(x)) = -v(u(x)) = -v(x)$; on a donc $v(F^+) = F^-$. On en déduit $F^+ = v^2(F^+) = v(F^-)$. Enfin, comme $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ annule u, u est DZ et $E = F^+ \oplus F^-$ (c'est aussi la décomposition classique pour une symétrie)

3. $\dim(F^+) = \dim(F^-)$ car $v(F^+) = F^-$ et v est un isomorphisme ; $F^+ \oplus F^- = E$ donc $\dim(F^+) = \dim(F^-) = p$. Dans une base adaptée à $E = F^- \oplus F^+$, on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix}I_p & 0\\ 0 & -I_p\end{pmatrix}$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix}0 & A\\ B & 0\end{pmatrix}$. Comme $v^2 = id$, on a $AB = I_p$ donc $B = A^{-1}$.

Exercice 24 *[sujet]* **1.** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}=1$ et $\frac{\sin^2 x}{x^2}\underset{+\infty}{=}O\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

2. $f(nh)\underset{n\to+\infty}{=}O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

3. ϕ_h est en escalier sur $\mathbb{R}^+$ et $\phi_h(t)=f(kh)$ si $t\in[kh,(k+1)h[$ donc $\int_{kh}^{(k+1)h}\phi_h(t)\,\mathrm{d}t=hf(kh)$. Comme $\phi_h(t)\underset{t\to+\infty}{=}O\left(\frac{1}{t^2}\right)$, on a (Chasles) $S(h)=\int_0^{+\infty}\phi_h(t)\,\mathrm{d}t$. On fait tendre h vers 0^+ par TCDPC : $\phi_h(t)\xrightarrow[h\to 0^+]{}f(t)$ (car f est continue) et $|\phi_h(t)|\leqslant\begin{cases}1 & \text{si } t\leqslant 2\\ \frac{1}{(t-1)^2} & \text{si } t>2\end{cases}$ si $h\leqslant 1$.

Exercice 25 *[sujet]* **1.** En développant par la dernière colonne, puis en développant le deuxième déterminant qui apparaît par la dernière ligne, on trouve $\Delta_n=\Delta_{n+1}+a_n\Delta_{n-2}$

2. par récurrence (double)

3. (Δ_n) est croissante ; si $\sum a_n$ CV alors $\ln\Delta_n\leqslant\sum_{k=1}^{n}\ln(1+a_k)$ puis (a_n) tend vers 0 donc $\ln(1+a_k)\sim a_k$ (positif) donc $\sum\ln(1+a_k)$ CV et $\ln\Delta_n\leqslant\sum_{n=1}^{+\infty}\ln(1+a_n)$ donc (Δ_n) est majorée donc CV.

Si (Δ_n) CV vers ℓ alors $\ell>0$ (car croissante) et $\sum(\Delta_n-\Delta_{n-1})$ CV ; or $\Delta_n-\Delta_{n-1}=a_n\Delta_{n-2}\sim\ell a_n$ (positif) donc $\sum a_n$ CV

Exercice 26 *[sujet]* **1.** a) $\|AX\|^2=(AX|AX)=(A^TAX|X)$ donc $\ker(A^AA)\subset\ker(A)$, récip facile puis th du rang : $\mathrm{rg}(A)=q-\dim\ker(A)$

b) $\mathrm{rg}(A)\leqslant\min(p,q)$ donc il faut $p\geqslant q$

c) On vérifie $\ker(A^T)\perp\mathrm{Im}(A)$ car $(X|AY)=(A^TX|Y)=0$ si $X\in\ker(A^T)$ puis $\dim(\ker(A^T))=p-\mathrm{rg}(A^T)=p-\mathrm{rg}(A)$

d) A^TA et AA^T ont les mêmes valeurs propres non nulles : si $\lambda\neq 0$ et $A^TAX=\lambda X$ pour $X\neq 0$ alors $AX\neq 0$ puis $AA^T(AX)=\lambda AX$. Par contre c'est faux pour la valeur propres 0 : si $A=\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}$ alors $\mathcal{X}_{AA^T}=X-1$ et $\mathcal{X}_{A^TA}=X(X-1)$

Exercice 27 *[sujet]* **1.** Probas totale avec le SCE $(A_{n+1},\overline{A_{n+1}})$ où A_{n+1} est « on tire une boule rouge au $n+1^{\text{ème}}$ tirage ».

2. $E(X_{n+1})=\sum_{k=0}^{N}kP(X_{n+1}=k)=\sum_{k=0}^{N}k\frac{N-k}{N}P(X_n=k)+k\frac{k+1}{N}P(X_n=k+1)\overset{h=k+1}{=}E(X_n)-\sum_{k=0}^{N}\frac{k^2}{N}P(X_n=k)+\sum_{h=1}^{N}(h-1)\frac{h}{N}P(X_n=h)$ (car $P(X_n=N+1)=0$) donc $E(X_{n+1})=E(X_n)-\frac{1}{N}E(X_n)=\left(1-\frac{1}{N}\right)E(X_n)$

3. $E(X_n)=N\left(1-\frac{1}{N}\right)^n$ donc (Markov VAD positive) $P(X_n\geqslant 1)\leqslant N\left(1-\frac{1}{N}\right)^n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ et $\frac{E(X_n)}{N}=\left(1-\frac{1}{N}\right)^n\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$

4. si l'urne ne contient plus de boule rouge alors il n'y en aura plus jamais donc $(X_{n+1}\geqslant 1)\subset(X_n\geqslant 1)$ et si $(Y=0)$ alors il y a toujours une boule rouge donc $(Y=0)\subset\bigcap_{k=1}^{n}(X_k\geqslant 1)$. On en déduit $P(Y=0)\leqslant P\left(\bigcap_{k=1}^{n}(X_k\geqslant 1)\right)=P(X_n\geqslant 1)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ donc $P(Y=0)=0$

Exercice 28 *[sujet]* **1.** a) seul défini positif pose pb : si les a_i sont 2 à 2 distincts et $\varphi(P,P)=0$ alors P admet $n+1$ racines distinctes et $\deg(P)\leqslant n$ donc $P=0$ et on a un produit scalaire. Si $a_0=a_1$ par exemple et $P=\prod_{i=1}^{n}(X-a_i)\in\mathbb{R}_n[X]$ alors $P\neq 0$ et $\varphi(P,P)=0$ donc pas un produit scalaire.

b) $F^\perp=\mathrm{Vect}\{Q\}$ avec $Q=1$

c) $d(X^n,F)=\|\pi_{F^\perp}(X^n)\|=\frac{|\varphi(X^n,Q)|}{\sqrt{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{n+1}}\sum_{k=0}^{n}a_k^n$

2. a) Si $|a|<1$ alors $\frac{a^n}{x+n}\underset{n\to+\infty}{=}o(a^n)$ donc CS sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}^-$, idem pour $a=-1$ par CSSA ; pour $a=1$ ou $|a|>1$ la série DV

b) $|u_n(x)| \leqslant a^n$ si $n \geqslant 1$ donc $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ CN sur $\mathbb{R}^{+*}$

c) $aS(x+1) = S(x) - \dfrac{1}{x}$ donc $S(x) = aS(x+1) + \dfrac{1}{x} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{x}$ car $S(x+1) \xrightarrow[x\to 0]{} S(1)$ par continuité (donc $o\left(\dfrac{1}{x}\right)$)

d) $xS(x) - \dfrac{1}{1-a} = \sum_{n\geqslant 0} a^n \left(\dfrac{x}{x+n} - 1\right) = -\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{a^n}{1+x/n}$ puis $\left|\dfrac{a^n}{1+x/n}\right| \leqslant a^n$ donc la série CN sur $[1,+\infty[$ et le théorème de double limite donne la réponse.

Exercice 29 *[sujet]* **1.** a) $D =]1,+\infty[$ car $\lim_{t\to 0} f(x,t) = 1$ et $f(x,t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2t}e^{-(x-1)t} = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ si $x > 1$ et $\dfrac{1}{t} = O(f(x,t))$ si $x \leqslant 1$

b) $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \mathrm{sh}(t)e^{-xt} \leqslant \dfrac{1}{2}e^{-(a-1)t}$ si $x \in [a,b] \subset]1,+\infty[$ donc $g'(x) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{sh}(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1+x} - \dfrac{1}{x-1}\right)$

c) $\lim_{+\infty} g(n) = 0$ par TCDPC avec $|f(n,t)| \leqslant f(2,t)$ pour $n \geqslant 2$

d) $g(x) = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x+1}{x-1} + C$ puis $C = \lim_{+\infty} g(n) = 0$

2. a) th spectral

b) cours

c) $X^3 + 4X^2 + 5X = X(X^2 + 4X + 5)$ n'a qu'une seule racine réelle (0) donc $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$ et comme A est DZ, on a $A = P0P^T = 0$ qui est bien solution

Exercice 30 *[sujet]* **1.** a) $t^k e^{-nt} = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$

b) $I_{n,k} \overset{\text{IPP}}{=} \dfrac{k}{n} I_{n,k-1}$ donc $I_{n,k} = \dfrac{k!}{n^{k+1}}$

c) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{-(n+1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-1}$ donc $R = e$.

Si $t > 0$, $\dfrac{tx}{e^t - tx} = \dfrac{txe^{-t}}{1 - txe^{-t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} (tx)^{n+1}e^{-(n+1)t}$ si $|x| < e$ car $|txe^{-t}| < 1$ (étudier $t \mapsto te^{-t}$). Puis TITT avec $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left|(tx)^{n+1}e^{-(n+1)t}\right| \mathrm{d}t = |x|^{n+1} I_{n+1,n+1} = a_{n+1}|x|^{n+1}$

2. a) $MM^T = I_n$ donne $A^TB + B^TA = 2I_n$

b) on a $C + C^T = 2I_n$ et $CC^T = I_n$ (C est aussi orthogonale) donc $C^2 + I_n = 2C$

c) si $X \in \ker(C - I_n)$ et $Z = CY - Y \in \mathrm{Im}(C - I_n)$ alors $CX = X$ donc $(X|Z) = (X|CY - Y) = (CX|CY) - (X|Y) = 0$

d) $(C - I_n)^2 = 0$ donne $\mathrm{Im}(C - I_n) \subset \ker(C - I_n)$ donc $\{0\} = \mathrm{Im}(C - I_n) \cap \ker(C - I_n) = \mathrm{Im}(C - I_n)$ donc $C = I_n$ et $A = B$

Exercice 31 *[sujet]* **1.** a) $u_n(x) = o\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$

b) $\|u_n\|_{\infty,[-a,a]} = u_n(a)$ donc CVNTS

c) u_n n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$

d) $S(0) = 0$ et $S(x) \geqslant u_1(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$

e) $u_n'(x) = \dfrac{2x}{n(1+nx^2)}$ donc $\|u_n'\|_\infty = u_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = \dfrac{1}{n^{3/2}}$

f) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \dfrac{2x}{t(1+tx^2)}\,\mathrm{d}t \leqslant S'(x) \leqslant \int_1^{+\infty} \dfrac{2x}{t(1+tx^2)}\,\mathrm{d}t + u_1'(x)$ donc $S'(x) \underset{x\to 0}{\sim} -4x\ln(x)$

2. a) B est sym réelle

b) $\mathrm{rg}(B) \leqslant \mathrm{rg}(A) = 1$ et $b_{i,j} = a_ia_j$ et $A \neq 0$ donc $B \neq 0$ et $\mathrm{rg}(B) = 1$

c) $\dim(E_0(B)) = n - \mathrm{rg}(B) = n - 1 \overset{\text{DZ}}{=} m_0(B)$ puis $\mathrm{Tr}(B) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = A^TA$ donc $\mathcal{X}_B = X^{n-1}(X - A^TA)$. Enfin, $\ker(A^T) \subset \ker(B)$ donc, comme $\ker(A^T)$ est un hyperplan, $E_0(B) = \ker(A^T)$ et on vérifie $BA = (A^TA)A$ donc $E_{A^TA}(B) = \mathrm{Vect}\{A\}$

Exercice 32 *[sujet]* **1.** a) Si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = D$ alors $\mathrm{Mat}\,\mathcal{B}(u^2) = D^2$ reste diagonale

b) $E_{1,2}$ n'est pas DZ mais $E_{1,2}^2 = 0$ l'est

c) analyse : si $x=a+b\in\ker(u^2-\lambda^2 id)$ alors $u(x)=\lambda(a-b)$ donc $a=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{\lambda}u(x)\right)$ et $b=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{\lambda}u(x)\right)$) donc la déc est unique si elle existe. Récip, pour un tel choix de a et b, on a $x=a+b$, $u(a)=\frac{1}{2}\left(u(x)+\frac{1}{\lambda}u^2(x)\right)=\frac{1}{2}(u(x)+\lambda x)=\lambda a$; de même $u(b)=-\lambda b$. On a donc $\ker(u^2-\lambda^2 id)\subset\ker(u-\lambda id)\oplus\ker(u+\lambda id)$ (récip facile)

d) Soient $\lambda_1,\ldots,\lambda_r$ les vp distinctes de u^2. Il existe des complexes μ_i tels que $\mu_i^2=\lambda_i$ et on a $\mathbb{C}^n=\bigoplus_{1\leqslant i\leqslant r}E_{\lambda_i}(u^2)$

— si u est bijectif alors $\lambda_i\neq 0$ donc $E_{\lambda_i}(u^2)=E_{\mu_i}(u)\oplus E_{-\mu_i}(u)$ donc $\mathbb{C}^n=\bigoplus_{1\leqslant i\leqslant r}(E_{\mu_i}(u)\oplus E_{-\mu_i}(u))$ et u est DZ

— sinon, on suppose $\lambda_1=0$ et on a $\mathbb{C}^n=\ker(u^2)\oplus\bigoplus_{2\leqslant i\leqslant r}E_{\lambda_i}(u^2)$; avec $\ker(u)=\ker(u^2)$ et ce qui précède, on a $\mathbb{C}^n=\ker(u)\oplus\bigoplus_{2\leqslant i\leqslant r}(E_{\mu_i}(u)\oplus E_{-\mu_i}(u))$ donc u est DZ

2. a) $\ln(\sin t)\underset{0}{=}\ln(t)+\ln(1+o(1))\sim\ln t$

b) En posant $u=\frac{\pi}{2}-t$, on vérifie $I=\int_0^{\pi/2}\ln(\cos t)\,\mathrm{d}t$ donc $J=2I$

c) $J=\int_0^{\pi/2}\ln\left(\frac{\sin 2t}{2}\right)\,\mathrm{d}t\overset{u=2t}{=}-\frac{\pi}{2}\ln 2+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\ln(\sin u)\,\mathrm{d}u$ puis $\int_{\pi/2}^{\pi}\ln(\sin u)\,\mathrm{d}u\overset{t=\pi-u}{=}I$ donc au final on trouve $I=-\frac{\pi}{2}\ln 2$

Exercice 33 *[sujet]* **1.** a) i. $\mathcal{X}_M=X^n$ (car $m_{i,i}=0$) donc $M^n=0$ par C-Ham

ii. M^2 est symétrique réelle et $\mathrm{Sp}(M^2)=\{0\}$ car $(M^2)^n=0$ dont M^2 est semblable à 0

iii. $\mathrm{Tr}(M^2)=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}m_{i,j}^2=0$ donc $m_{i,j}=0$

b) $F+\mathcal{A}_n(\mathbb{R})\subset\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc $\dim(F)+\frac{n(n-1)}{2}\leqslant n^2$

2. a) récurrence puis $R\geqslant 1$

b) $f'(x)=\frac{1}{1-x}+f(x)$

c) $y(x)=\alpha e^x+e^x\varphi(x)$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$.

Exercice 34 *[sujet]* **1.** a) $f_n(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{\pi}{2x^{3/2}}$

b) $0\leqslant I_n\leqslant\frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(n+x)}\overset{x=u^2}{=}\pi\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{n+u^2}=\frac{\pi^2}{2\sqrt{n}}$

c) fait au dessus

d) $\arctan(n)\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(n+x)}\leqslant I_n\leqslant\frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(n+x)}$ donne $I_n\sim\frac{\pi^2}{2\sqrt{n}}$

2. a) cours

b) $A=I_3-(A^T)^2=I_3-(I_3-A^2)^2$ donc $A^4-2A^2+A=0$. $P=X^4-2X^2+X=X(X-1)(X^2+X-1)$ donc $\mathrm{Sp}(A)\subset\left\{0,1,\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$. Comme $\sqrt{5}\notin\mathbb{Q}$, la seule possibilité pour avoir $\mathrm{Tr}(A)=0$ est $\mathrm{Sp}(A)=\{0\}$. La matrice $(A-I_3)(A^2+A-I_3)$ est donc inversible puis $A=0$ ce qui n'est en fait pas une solution

Exercice 35 *[sujet]* **1.** a) $g(x)=\lim_{n\to+\infty}f_n(x)=x$ (distinguer $x=0$) puis $|f_n(x)-x|\leqslant\frac{1}{n}$ si $x\geqslant 0$ et $|f_n(x)-x|\leqslant\frac{1}{2\sqrt{n}}$ si $x<0$ donc $\|f_n-g\|_\infty\leqslant\frac{1}{2\sqrt{n}}$

b) $\lim_{n\to+\infty}f_n'(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$ On peut vérifier que f_n est $\mathcal{C}^1$ sur $[-1,1]$ donc il n'y a pas CVU sur $[-1,1]$

2. a) $(XY^T)(XY^T)=(Y^TX)XY^T$ et $Y^TX\in\mathbb{R}$ donc $M_\alpha M_\beta=M_{\alpha+\beta-\alpha\beta Y^TX}$

b) Si $1-\alpha Y^TX\neq 0$ alors $M_\alpha^{-1}=M_\beta$ avec $\beta=\frac{-\alpha}{1-\alpha Y^TX}$ et si $1-\alpha Y^TX=0$ alors $M_\alpha^2=M_\alpha$ donc M_α sera inversible si et seulement si $M_\alpha=I_n$ donc si et seulement si $\alpha=0$ (si X et Y sont non nulles, dans ce cas $\mathrm{rg}(XY^T)=1\neq 0$)

Exercice 36 *[sujet]* **1.** a) $\mathcal{X}_M=(X-1)(X^2-2\alpha X+\alpha^2-1)$ donc $\mathrm{Sp}(M)=\{1,\alpha-1,\alpha+1\}$

b) M_α est sym réelle. $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \operatorname{diag}(1, \alpha+1, \alpha-1)$ (distinguer $\alpha = 0$ et $\alpha = 2$ pour les dimensions des espaces propres)

c) $\det(M_\alpha) = \alpha^2 - 1$

d) $\ker(M_1) = \operatorname{Vect}\{(1,0,-1)\}$ et $\operatorname{Im}(M_1) = \operatorname{Vect}\{(1,0,1),(0,1,0)\}$. Puis $\ker(M_{-1}) = \operatorname{Vect}\{(1,0,1)\}$ et $\operatorname{Im}(M_{-1}) = \operatorname{Vect}\{(-1,0,1),(0,1,0)\}$

2. a) th généraux

b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{2xy^2}{x+y} - \dfrac{x^2y^2}{(x+y)^2}$

c) $\dfrac{1}{t}(f(t,0) - f(0,0)) = 0$ donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$

d) $f(x, -x+x^6) = \dfrac{(-1+x^5)^2}{x^2}$ donc f n'est pas bornée au voisinage de $(0,0)$.

Exercice 37 *[sujet]* **1.** a) $g(x,t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t^x}$ et $g(x,t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{1+x}}$ donc $D =]0,1[$

b) $|g(x,t)| \leqslant g(a,t) + g(b,t)$ si $x \in [a,b]$ (ou distinguer $t < 1$ et $t \geqslant 1$)

c) $x \in]0,1[\Leftrightarrow 1-x \in]0,1[$ et $f(x) \overset{u=\frac{1}{t}}{=} f(1-x)$

d) $f(x) \overset{\text{IPP}}{=} \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{1-x}\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{t^{1-x}}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{t^{1-x}}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to 1]{} \int_0^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}t}{(1+t)^2} = 1$ avec (TCDPC) $\left|\dfrac{t^{1-x}}{(1+t)^2}\right| \leqslant \begin{cases} \dfrac{1}{(1+t)^2} & \text{si } t < 1 \\ \dfrac{\sqrt{t}}{(1+t)^2} & \text{si } t \geqslant 1 \end{cases}$ si $x \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right[$. On a donc $f(x) \underset{x\to 1}{\sim} \dfrac{2}{(1-x)}$ et $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{2}{x}$

2. a) $(MM^T)^3 \overset{MM^T = M^TM}{=} M^3(M^T)^3 = I_3$ donc $X^3 - 1$ annule MM^T et $\operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(MM^T) \subset \{1, j, j^2\}$; MM^T est symétrique réelle donc ses valeurs propres sont réelles puis $\operatorname{Sp}(MM^T) = \{1\}$ donc (DZ) $MM^T = I_n$.

b) Si $n = 3$ alors $\det(M)^3 = 1$ donc $\det(M) = 1$ (car M est inv) donc M est une rotation. On écrit $M = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R(\theta) \end{pmatrix}P^T$; M est alors solution si et seulement si $R(\theta)^3 = I_2$ donc $3\theta = 2k\pi$ et M est I_3, ou une rotation d'angle $\pm\dfrac{2\pi}{3}$

Exercice 38 *[sujet]* **1.** a) $G_X(t) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{nt^n}{2^{n+1}} = \dfrac{t}{(2-t)^2}$ pour $|t| < 2$ et on a bien $G_X(1) = 1$

b) $E(X) = G_X'(1) = 3$

c) Si $j \leqslant i$, $P(X = i, Y = j) = P(Y = j | X = i)P(X = i) = \dfrac{1}{i}P(X = i) = \dfrac{1}{2^{i+1}}$

d) $P(Y = j) = \displaystyle\sum_{i=j}^{+\infty} P(X = i, Y = j) = \dfrac{1}{2^j}$ donc $Y \sim \mathscr{G}\left(\dfrac{1}{2}\right)$ et $E(Y) = 2$.

2. a) symétrique réelle

b) $\operatorname{Sp}(A_2) = \left\{\dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}$

c) Successivement : $C_j \leftarrow C_j - C_1$ pour $j \geqslant 2$ puis développer par rapport à C_n ; le deuxième déterminant se ramène à un déterminant diagonal après dvt par rapport à la dernière ligne

d) $(-1)^{n-k}P_n(k) = (n-k-1)(-1)^{n-1-k}P_{n-1}(k)$ si $k \in [\![0, n-2]\!]$ donne le résultat par récurrence si $k \in [\![0, n-2]\!]$ et $P_n(n-1) = -(n-1)! < 0$. Cela veut dire que P_n change de signe sur tout intervalle de la forme $]k, k+1[$ pour $k \in [\![0, n-2]\!]$ donc (Rolle) s'annule au moins une fois sur ces $n-1$ intervalle.

e) De plus $P_n(n-1) < 0$ et $P_n(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^n \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ donc P_n s'annule aussi une fois sur $]n-1, +\infty[$. P_n est de degré n et possède au moins n racines distinctes donc est SARS

Exercice 39 *[sujet]* **1.** a) $\lim\limits_0 f_n = 0$ et $I_n \geqslant 0$

b) $I_{n+1} - I_n = \displaystyle\int_0^1 e^{-\frac{1}{t}}t^n(t-1)\,\mathrm{d}t \leqslant 0$ donc (I_n) décroît, minorée par 0 donc CV puis $0 \leqslant I_n \leqslant e^{-1}\displaystyle\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \dfrac{e^{-1}}{n+1}$ donc $\lim I_n = 0$

c) facile puis $\lim I_{n-1} = 0$ donc $(n+1)I_n \to e^{-1}$

d) $R = 1$ (par equiv), $\sum I_n$ DV (par equiv SATP) et $\sum (-1)^n I_n$ CV par CSSA donc $D_g =]-1, 1]$

e) $g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{1 - xt}\,\mathrm{d}t$ par TITT avec $\displaystyle\int_0^1 |xt|^n e^{-\frac{1}{t}}\,\mathrm{d}t \leqslant e^{-1}|x|^n$ par ex

f) $I_n - \dfrac{e^{-1}}{n} = -\dfrac{I_n + I_{n-1}}{n} = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc $g(x) - \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-1}}{n} x^n = I_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(I_n - \frac{e^{-1}}{n}\right) x^n \xrightarrow[x \to 1]{} I_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(I_n - \frac{e^{-1}}{n}\right) =$ ℓ par CVN sur $[0, 1]$. On a donc $g(x) - \dfrac{e^{-1}x}{1 - x} \underset{x \to 1}{=} \ell + o(1)$ donc $g(x) \underset{x \to 1}{\sim} \dfrac{e^{-1}}{1 - x}$

2. a) Utiliser le binôme pour $(M + M^{-1})^k$ car M et M^{-1} commutent ; résultats cf c)

b) On a $M^2 + I_n = M$ et $X^2 - X + 1$ est SARS dans $\mathbb{C}$, M est réelle donc semblable à $D = \mathrm{diag}(-jI_p, -j^2 I_p)$ avec $n = 2p$ (forcément pair)

c) $M^k + M^{-k} = P(D^k + D^{-k})P^{-1}$ puis $(-j)^k + (-j^2)^k = (-1)^k \left(e^{\frac{2ik\pi}{3}} + e^{-\frac{2ik\pi}{3}}\right) = (-1)^k 2 \cos \dfrac{2ik\pi}{3}$ donc $M^k + M^{-k} = (-1)^k 2 \cos \dfrac{2ik\pi}{3} I_n$

Exercice 40 *[sujet]* **1.** a) $\mathcal{X}_A = (X-1)^2(X-3)$, $E_1(A) = \mathrm{Vect}\{(2, -1, 1)\}$ et $E_3(A) = \mathrm{Vect}\{(0, 1, 1)\}$ donc A n'est pas DZ

b) si $f(e_i) = \lambda_i e_i$ alors $f(g(e_i)) = g^3(e_i) = g(f(e_i)) = \lambda_i g(e_i)$ et $g(e_i) \neq 0$ car g est bijective $(\det(g)^2 = \det(f) = 3)$

c) Comme $E_1(f)$ et $E_3(f)$ sont deux droites, engendrées par e_1 et e_3, on a $g(e_i) \in \mathrm{Vect}\{e_i\}$ donc $g(e_i) = \mu_i e_i$ puis $f(e_i) = mu_i^2 e_i$ donc e_1 est associé à ± 1 et e_3 à ± 3.

d) Si g était DZ, $f = g^2$ le serait aussi

e) g possède donc deux valeurs propres distinctes (avec 3 g serait DZ) on a donc $\mathcal{X}_g = (X \pm 1)^2(X \pm \sqrt{3})$ ou $\mathcal{X}_g = (X \pm 1)(X \pm \sqrt{3})^2$. Dans le second cas, on aurait (en TZ g) $\mathcal{X}_f = (X-1)(X-3)^2$ ce qui est faux. On a donc $\mathcal{X}_g = (X \pm 1)^2(X \pm \sqrt{3})$

2. a) $f : t \mapsto \dfrac{-\ln(1-t)}{t}$ est $\mathcal{C}^0$ sur $]-\infty, 1[\setminus\{0\}$, prolongeable par continuité en 0 ($\lim\limits_0 f = 1$) donc F est $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 1[$ et comme $f(t) \underset{t \to 1}{\sim} -\ln(1-t)$, f est intégrable sur $]0, 1[$ donc $D_F =]-\infty, 1]$

b) par TITT (à cause de $x = 1$) à partir de $f(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{n}$ sur $]0, 1[$ et $\displaystyle\int_0^1 |f_n(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}$

c) On pose $\varphi(x) = F(x) + F(1-x) + \ln(x)\ln(1-x)$ et on vérifie $\varphi'(x) = 0$ sur $]0, 1[$ car $F'(x) = -\dfrac{\ln(1-x)}{x}$; on en déduit $\varphi = \lim\limits_1 \varphi = 0 + F(1) - 0$ par continuité de F en 1 car la série entière CVN sur $[0, 1]$

Exercice 41 *[sujet]* **1.** a) Reste d'une série CV par CSSA

b) par CSSA, $|v_n| \leqslant \dfrac{1}{n\sqrt{n+1}} = O\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$

c) Si $\ell = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$ alors $w_n = \dfrac{(-1)^n \ell}{n} - v_n$ donc $\sum w_n$ CV

d) $x_n \sim \dfrac{\ell}{n}$ car $\ell = 1 + \displaystyle\sum_{n \geqslant 2} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}} \geqslant 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} > 0$ donc SATP et $\sum x_n$ DV

2. a) sym réelle

b) $C_k = \alpha^{k-1} C_1$ et $C_1 \neq 0$ donc $\mathrm{rg}(A) = 1$ puis (fait en cours) $\mathcal{X}_A = X^{n-1}(X - \mathrm{Tr}(A))$

c) Comme $\dim(E_0(A)) = n - 1$, A est DZ si et seulement si $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$ et $\mathrm{Tr}(A) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n-2} \alpha^{2k} = \frac{1 - \alpha^{2n}}{1 - \alpha^2}$ (pour $\alpha^2 \neq 1$, déjà vu : cas réel) donc A est DZ si et seulement si α n'est pas une racine non réelle $2n^{\text{ème}}$ de l'unité

Exercice 42 *[sujet]* **1.** a) $P(X = i) = \displaystyle\sum_{j=0}^{i} P(X = i, Y = j) = \frac{e^{-\beta}\beta^i}{i!} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \alpha^j (1-\alpha)^{i-j}$ donc $X \sim \mathscr{P}(\beta)$ et $P(Y = j) = \displaystyle\sum_{i=j}^{+\infty} P(X = i, Y = j) \overset{k=i-j}{=} \frac{e^{-\beta}(\alpha\beta)^j}{j!} \sum_{k=0}^{+\infty} \beta^k (1-\alpha)^k k!$ donc $Y \sim \mathscr{P}(\alpha\beta)$

b) $P(X = 1, Y = 2) = 0$ alors que $P(X = 1)P(Y = 2) \neq 0$

c) $P(Z=n)=\sum_{j=0}^{+\infty}P(X=j+n,Y=j)=e^{-\beta}\dfrac{(1-\alpha)^n\beta^n}{n!}\sum_{j=0}^{+\infty}\dfrac{(\alpha\beta)^j}{j!}$ donc $Z\sim\mathscr{P}(\beta(1-\alpha))$

d) $P(Y=j|Z=n)=\dfrac{P(Y=j,X=n+j)}{P(Z=n)}=\cdots=P(Y=j)$ donc Y et Z sont indépendantes

2. si $P=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k$ alors $P(1)=\sum_{k=0}^{n}a_k=(P|Q)$ avec $Q=\sum_{k=0}^{n}X^k$ donc $H=Q^\perp$ et $\pi_H(1)=1-\pi_{\mathrm{Vect}\{Q\}}(1)=1-\dfrac{(Q|1)}{\|Q\|^2}Q=1-\dfrac{1}{n+1}Q$

Exercice 43 *[sujet]* **1.** a) $\dfrac{1}{t}-\arctan\left(\dfrac{1}{t}\right)\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{1}{3t^3}$

b) La fonction est intégrable par l'équivalent précédent et $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{t}-\arctan\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t\overset{\text{IPP}}{=}\frac{\pi}{4}-1+\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{t}-\frac{t}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}-1+\frac{1}{2}\ln 2$

2. a) facile puis $\mathcal{X}_A$ est SARS

b) $P=\begin{pmatrix}1&1\\1&-2\end{pmatrix}$, $D=\mathrm{diag}(1,-8)$ et $P^{-1}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2&1\\1&-1\end{pmatrix}$

c) $B^3=A$ si et seulement si $\Delta^3=D$ avec $\Delta=P^{-1}BP$ donc une seule solution $\Delta=\mathrm{diag}(1,-2)$ et $B=P\Delta P^{-1}$

Exercice 44 *[sujet]* **1.** a) Facile

b) on a $x=\dfrac{\ell(x)}{\ell(a)}a$ car $\ell(a)\in\mathbb{R}^*$.

c) $f(x)=-\ell(a)x$ (donc vp si $x\neq 0$)

d) $f^2(x)=-\ell(a)f(x)$ donc $X(X+\ell(a))$ annule f. Si $\ell(a)\neq 0$, il est SARS et si $\ell(a)=0$ alors $f^2=0$ donc non DZ (0 est la seule valeur propre possible et $f\neq 0$)

e) si $\ell(a)=0$ alors $\mathcal{X}_f=X^n$; sinon $E_0(f)=\mathrm{Vect}\{a\}$ et $E_{-\ell(a)}(f)=\ker(\ell)$ est un hyperplan donc $\mathcal{X}_f=X(X+\ell(a))^{n-1}$. Dans tous les cas, $\mathrm{Tr}(f)=-(n-1)\ell(a)$.

2. a) si $\lim\dfrac{\rho_n}{S_n}=0$, $\ln\left(\dfrac{S_n}{S_{n-1}}\right)=-\ln\left(1-\dfrac{\rho_n}{S_n}\right)\sim\dfrac{\rho_n}{S_n}$ (SATP) et $\ln\left(\dfrac{S_n}{S_{n-1}}\right)=\ln(S_n)-\ln(S_{n-1})$ donc $\sum\ln\left(\dfrac{S_n}{S_{n-1}}\right)$ DV car $\lim\ln(S_n)=+\infty$. Sinon $\sum\dfrac{\rho_n}{S_n}$ est GDV

b) $\dfrac{1}{S_{n-1}}-\dfrac{1}{S_n}=\dfrac{\rho_n}{S_nS_{n-1}}\geqslant\dfrac{\rho_n}{S_n^2}$ (SATP) et $\sum\left(\dfrac{1}{S_{n-1}}-\dfrac{1}{S_n}\right)$ CV car $\lim\dfrac{1}{S_n}=0$

Exercice 45 *[sujet]* **1.** a) cours

b) $F=\mathrm{Vect}\{I_2,E_{1,2}-E_{2,1}\}$

c) $F^\perp=\mathrm{Vect}\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2}}(E_{1,1}-E_{2,2}),\dfrac{1}{\sqrt{2}}(E_{1,2}+E_{2,1})\right\}$

d) $\pi_{F^\perp}(J)=\dfrac{1}{2}(E_{1,1}-E_{2,2}|)(E_{1,1}-E_{2,2})+\dfrac{1}{2}(E_{1,2}+E_{2,1}|J)(E_{1,2}+E_{2,1})=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$

2. a) $F'(x)=\displaystyle\int_0^\pi\sin(t)\cos(a\sin t)\,\mathrm{d}t$ car $|\sin(t)\cos(a\cos t)|\leqslant 1$ et 1 est intégrable sur $[0,\pi]$

b) $F(0)=0$ et F dérivable en 0 donc $\displaystyle\lim_{a\to 0}\frac{1}{a}F(a)=F'(0)=\int_0^\pi\sin(t)\,\mathrm{d}t=2$.

Exercice 46 *[sujet]* **1.** a) i. $P(x)=\det(xA-B)=\det(A)\mathcal{X}_{A^{-1}B}(x)$ est un polynôme de degré n

ii. P admet une racine complexe

b) si $\dim(E)\geqslant 2$, on choisit A,B linéairement indépendantes dans E et k tel que $M=kA-B$ ne soit pas inversible. C'est absurde car E est un sev donc $M\in E$; par liberté de (A,B), on a $M\neq 0$ et M n'est pas inversible.

c) on a donc $E=\mathrm{Vect}\{A\}$ avec A inversible (qui convient bien)

2. a) i. $f'(x+1)=f(x+2)-f(x+1)=[f(x+2)-f(x)]-[f(x+1)-f(x)]=2f'(x)-f'(x)$

ii. $g(x)=\displaystyle\int_x^{x+1}f'(t)\,\mathrm{d}t$; f' est continue donc g est dérivable et $g'(x)=f'(x+1)-f'(x)=0$; $g=\lambda$. De plus $g(x)=f(x+1)-f(x)$ donc $f'(x)=f(x+1)-f(x)=\lambda$

b) Récip toute fonction affine vérifie bien $(*)$

Exercice 47 *[sujet]* **1.** a) si $x>0$, $f_n(x)=o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et DVG si $x\leqslant 0$

b) $|f_n(x)|\leqslant f_n(a)$ si $x\in[a,b]\subset\mathbb{R}^{+*}$

c) $x^kf(x)=\sum_{n\geqslant 1}g_n(x)$; $\lim_{x\to+\infty}g_n(x)=0$ et $|g_n(x)|\leqslant g_n(a)=o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ pour $n\geqslant\left(\dfrac{k}{a}\right)^2$ dont le th de dble limite donne la réponse

2. a) cours

b) si $\mathcal{B}=(u,v,e_3,\dots,e_n)$ alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)=\begin{pmatrix}A&0\\0&0\end{pmatrix}$ avec $A=\begin{pmatrix}(u|v)&\|v\|^2\\-\|u\|^2&-(u|v)\end{pmatrix}$

c) $\mathcal{X}_\varphi=X^{n-2}[X^2-(u|v)^2+\|u\|\|v\|]$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ par C-Sch donc φ n'est pas DZ.

Exercice 48 *[sujet]* **1.** a) $M^4=M^3-M^2+M=I_n$ donc $\Omega^4=I_n$

b) $X^3-X^2+X-1=(X-1)(X^2+1)$ est SARS dans $\mathbb{C}$

c) $\mathrm{Sp}(M)\subset\{1,i,-i\}$ et M réelle donc $m_i(M)=m_{-i}(M)$ et $\mathrm{Tr}(M)=m_1(M)$ donc $n=2p$ avec $p=m_i(M)$. Comme $1\notin\mathrm{Sp}(M)$, et $(M-I_n)(M^2+I_n)=0$, on a $M^2=-I_n$. Ω est sym réelle positive et $\mathrm{Sp}(\Omega)\subset\{\pm1\}$ donc $\Omega=I_n$ donc M est orthogonale et $M^T=M^{-1}=-M$. On construit alors une bon de E par récurrence : on choisit e_1 unitaire et on pose $f_1=Me_1$ qui est unitaire car $M\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$; de plus $(e_1|f_1)=(e_1|Me_1)=(M^Te_1|e_1)=-(Me_1|e_1)=(-f_1|e_1)$ donc (e_1,f_1) est une famille orthonormale et $Mf_1=M^2e_1=-e_1$. Si on suppose avoir construit une famille orthonormale $(e_1,\dots,e_k,f_1,\dots,f_k)$ telle que $f_i=Me_i$ (et donc $Mf_i=-e_i$ car $M^2=-I_n$), on choisit e_{k+1} unitaire dans $\mathrm{Vect}\{e_1,\dots,e_k,f_1,\dots,f_k\}^\perp$ puis on pose $f_{k+1}=Me_{k+1}$, qui est unitaire car $M\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$; on a, pour $i\leqslant k$, $(f_{k+1}|e_i)=(Me_{k+1}|e_i)=(e_{k+1}|M^Te_i)=-(e_{k+1}|Me_i)=-(e_{k+1}|f_i)=0$, puis $(f_{k+1}|f_i)=(Me_{k+1}|Me_i)=(e_{k+1}|e_i)=0$ et $(f_{k+1}|e_{k+1})=(Me_{k+1}|e_{e+1})=(e_{k+1}|M^Te_{k+1})=-(e_{k+1}|Me_{k+1})=-(e_{k+1}|f_{k+1})$ donc la famille $(e_1,\dots,e_k,e_{k+1},f_1,\dots,f_k,f_{k+1})$ est toujours orthonormale. Lorsque $k=p$, on obtient une bon dans la quelle la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à M est celle cherchée.

2. a) $f(x,t)\underset{t\to+\infty}{=}o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ et $f(x,t)\underset{t\to0}{\sim}\dfrac{1}{2t^{1-x}}$ donc $D_\varphi=\mathbb{R}^{+*}$

φ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ car, si $x\in[a,b]\subset\mathbb{R}^{+*}$, $|f(x,t)|\leqslant f(a,t)+f(b,t)$ (distinguer $t\geqslant1$ et $t<1$)

b) $f(x,t)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^nt^{x-1}e^{-(n+1)t}$ si $t>0$ puis TITT avec $\int_0^{+\infty}|f_n(t)|\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-(n+1)t}\,\mathrm{d}t\overset{u=(n+1)t}{=}\dfrac{1}{(n+1)^x}\Gamma(x)$ donc $\sum\int_0^{+\infty}|f_n(t)|\,\mathrm{d}t$ CV pour $x>1$.

c) On vérifie que Γ et $\theta:x\mapsto\sum_{n\geqslant1}\dfrac{(-1)^n}{n^x}$ sont continues sur $[1,+\infty[$ donc la relation précédente reste valable en $x=1$. Comme $\Gamma(1)=1$, on a $\theta(1)=\varphi(1)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{1+e^{-t}}\,\mathrm{d}t=\ln2$

Exercice 49 *[sujet]* **1.** a) $\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Vect}\{f(e_1),f(e_2),f(e_3)\}=\mathrm{Vect}\{f(e_1)\}$ et $f(e_1)\neq0$ donc $\dim(\ker(f))=1$ et $\mathrm{rg}(f)=2$

b) $A=\begin{pmatrix}a&0&a\\1&0&1\\-a&0&-a\end{pmatrix}$ donc $A^2=0$ donc $\mathrm{Sp}(A)\subset\{0\}$

c) $\ker(A)\neq\{0\}$ donc A n'est pas inversible.

d) i. $\det(B(x))=(-1)^3\mathcal{X}_A(x)=-x^3$ donc $B(x)$ est inversible

ii. $B(x)B(-x)=A^2-x^2I_3=-x^2I_3$ donc $B(x)^{-1}=\dfrac{-1}{x^2}B(-x)$

iii. Avec le binôme $(AI_3=I_3A)$, $B(x)^n=(-x)^nI_3+n(-x)^{n-1}A$

2. $R=1$ et $f(x)=xg(x^2)$ avec $g(x)=\sum_{n\geqslant1}(-1)^nnx^n$ donc $g(x)=x\dfrac{-1}{(1+x)^2}$

Exercice 50 *[sujet]* **1.** a) $\ker(u)=\{a,b\}^\perp$ et $\mathrm{Im}(u)=\mathrm{Vect}\{a,b\}$ (distinguer (a,b) libre et liée)

b) Si (a,b) liée, $\mathrm{Sp}(u)=\{0,2(a|b)\}$ avec $(a|b)\neq0$, $E_0(u)=\ker(u)$ hyperplan et $E_{2(a|b)}(u)=\mathrm{Vect}\{a,b\}$ droite. Si (a,b) libre, la matrice de l'induit v sur $\mathrm{Vect}\{a,b\}$ est $\begin{pmatrix}(a|b)&\|b\|^2\\a\|^2&(a|b)\end{pmatrix}$; $\mathcal{X}_v=X^2-2(a|b)X+(a|b)^2-a^2\|b\|^2$ est SARS car $\Delta=\|a\|^2\|b\|^2$ donc $\mathrm{Sp}(v)=\{(a|b)\pm\|a\|\|b\|\}$. On vérifie, par C-Sch, $(a|b)\pm\|a\|\|b\|\neq0$ donc $\mathrm{Sp}(u)=\{0,(a|b)\pm\|a\|\|b\|\}$ puis $E_0(u)=\ker(u)$ est de dimension $n-2$, $E_{(a|b)-\|a\|\|b\|}=\mathrm{Vect}\{\|b\|a-\|a\|b\}$ et $E_{(a|b)+\|a\|\|b\|}=\mathrm{Vect}\{\|b\|a+\|a\|b\}$ sont deux droites

c) cf les dimensions au dessus

d) Vérifier que u est autoadjoint

2. a) $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$

b) La probabilité que toutes les boules tombent dans l'urne 1 est $\dfrac{1}{3^n}$ donc $P(X=2) = 3\dfrac{1}{3^n} = \dfrac{1}{3^{n-1}}$. La probabilité que toutes les boules se répartissent dans les urnes 1 et 2 est $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ donc celle qu'en plus aucune des deux urnes 1 et 2 ne reste vide est $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n - \dfrac{2}{3^n}$ puis $P(X=1) = 3\left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^n - \dfrac{2}{3^n}\right]$. Enfin, $P(X=0) = 1 - P(X=1) - P(X=2)$

c) $E(X) = 3\left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^n - \dfrac{2}{3^n}\right] + 2\dfrac{1}{3^{n-1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ ce qui est normal car plus le nombre de boules est grand, plus la probabilité que toutes les urnes se remplissent est grande

Exercice 51 *[sujet]* **1.** a) On a $X(\Omega) \subset [\![-n, n]\!]$ mais $X_n(\Omega) \neq [\![-n, n]\!]$: si n est pairs les positions atteintes sont d'indices pairs et si n est impair, seules les positions impaires sont atteignables.

b) $X_n = n - 2D_n$

c) $D_n \sim \mathscr{B}np$ donc $P(X_{2n} = 2k) = \dbinom{2n}{n-k} p^k (1-p)^{n+k}$ et $P(X_{2n+1} = 2k+1) = \dbinom{2n+1}{n-k} p^{n-k} (1-p)^{n+k+1}$

d) $E(X_n) = n - 2E(D_n) = n(1-2p)$

2. $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 2^n - 1 \\ 0 & 1 & -2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$

Exercice 52 *[sujet]* **1.** $X^3 - 3X - 5 = (X - r)(X - \lambda)(X - \overline{\lambda})$ avec $r > 1$ (étudier la fonction polynômiale) et A est réelle donc $\det(A) = r^{n_1} |\lambda|^{2n_2} > 0$

2. a) $f_n(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

b) $u_n \geqslant \displaystyle\int_0^1 (1-x)^n \,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{n+1}$

c) $\lim u_n = 0$ par TCD avec $|f_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

d) $u_n \overset{\text{IPP}}{=} \Big[2\sqrt{x}(1-x)^n\Big]_0^1 + 2n \displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}(1-x)^{n-1} \,\mathrm{d}x = 2n \int_0^1 \dfrac{(x - 1 + 1)(1-x)^{n-1}}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x = 2n(-u_n + u_{n-1})$

Exercice 53 *[sujet]* **1.** a) $u_{n+1} = 1 + \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n \dfrac{u_n}{n+1}$

b) On a $u_n \leqslant n$ donc $u_{n+1} \leqslant 1 + \dfrac{n}{n+1} \leqslant 2$

c) Puis $1 \leqslant u_n \leqslant 1 + \dfrac{2}{n}$ donc $\lim u_n = 1$

2. a) Si $(x, f(x))$ est liée alors $f(x) = \lambda x$ (car $x \neq 0$) donc $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ qui n'est pas possible dans $\mathbb{R}$.

b) $f^{-1} = -(f + id_E)$

Exercice 54 *[sujet]* **1.** a) cours

b) F et G sev facile. Si $\varphi = f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$ alors $g(x) = ax + b$, $b = \varphi(0)$ et $a = \varphi'(0)$. Si on pose $a = \varphi'(0)$, $b = \varphi(0)$, $g(x) = ax + b$ et $h(x) = \varphi(x) - g(x)$, on a bien $\varphi = f + g$, $g \in G$, $h(0) = h'(0) = 0$ donc $h \in H$.

c) $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc $f \in E$

d) $f'(x) = 2e^{-4x^2} - e^{-x^2}$ donc $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$ donc $h(x) = x$ et $g(x) = f(x) - x$

2. a) $P(D_1 > D_2) = \dfrac{15}{36} = \dfrac{5}{12}$ donc (lancers indép) $X \sim \mathscr{B}\left(n, \dfrac{5}{12}\right)$

b) $E(X) = \dfrac{5n}{12}$ et $V(X) = np(1-p)$

c) cours

d) $\dfrac{X}{E(X)} \in [0.9, 1.1] \Leftrightarrow |X - E(X)| \leqslant 0.1E(X)$ donc $p_n = P\left(|X - E(X)| \leqslant \dfrac{5n}{120}\right) \leqslant \dfrac{np(1-p)}{(np)^2}$

Exercice 55 *[sujet]* **1.** a) il existe $x \neq 0$ tel que $u(v(x)) = \lambda x \neq 0$ donc $v(x) \neq 0$ et $v \circ u(v(x)) = \lambda v(x)$

b) $u(v(P)) = P - P(1)$ donc $\ker(u \circ v) = \mathbb{R}_0[X]$ et $0 \in \mathrm{Sp}(u \circ v)$. Alors que $v(u(P)) = P$ donc $\ker(v \circ u) = \{0\}$ et $0 \notin \mathrm{Sp}(v \circ u)$

c) $0 \in \mathrm{Sp}(u \circ v) \Leftrightarrow \det(u \circ v) = 0$ et $\det(u \circ v) = \det(u)\det(v) = \det(v \circ u)$ donc $0 \in \mathrm{Sp}(u \circ v) \Leftrightarrow 0 \in \mathrm{Sp}(v \circ u)$

2. a) $P(X = i) = \dfrac{1}{e2^j}\left[\sum_{i=1}^{+\infty} \dfrac{i2^{-i}}{i!} + j\sum_{i=0}^{+\infty} \dfrac{2^{-i}}{i!}\right] \overset{k=i-1}{=} \dfrac{1}{e2^j}\left[\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{2^{-(k+1)}}{k!} + \sqrt{e}\right] = \dfrac{1+2j}{2^j\sqrt{e}}$ puis $P(Y = j) = P(X = j)$.
Elles ne sont pas indépendantes car $P(X = 0)P(Y = 0) \neq 0$ et $P(X = 0, Y = 0) = 0$.

b)