Oral TD5 : intégrales à paramètres

Exercice 1 **(Mines PSI 2023)**
Soient $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{k+1}\right)^n$ et $v_n = \displaystyle\int_2^n \left(1 - \frac{1}{x}\right)^n \mathrm{d}x$, pour $n \geqslant 2$

1. Montrer que $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n \displaystyle\int_0^1 e^{-1/t}\,\mathrm{d}t$
indication : commencer par un changement de variable

2. En déduire un équivalent de v_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 2 **(CCINP PSI 2022)**
Soit $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} \sin(xt)\,\mathrm{d}t$

1. Montrer que φ est définie sur $\mathbb{R}$

2. Montrer que φ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$

3. Calculer φ' puis φ à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 3 **(CCINP PSI 2021)**
Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^x}$

1. Trouver le domaine de définition D de F.

2. Montrer que F est continue sur D.

3. Montrer que F est $\mathcal{C}^1$ sur un domaine à préciser et, à l'aide d'un changement de variable, que

$$F'(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)t^x}{(1+t^x)^2}\left(\frac{1}{t^2} - 1\right)\mathrm{d}t$$

En déduire les variations de F.

4. Déterminer les limites de F en $+\infty$ et en 1.

Exercice 4 **(Mines-Télécom PSI 2022)**
Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

1. Montrer que f est définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$.

2. Montrer que f est solution sur $\mathbb{R}^{+*}$ de $y'' + y = \dfrac{1}{x}$

3. Montrer que f est l'unique solution sur $\mathbb{R}^{+*}$ de cette équation différentielle, telle que $\lim\limits_{+\infty} y = 0$

Exercice 5 **(Centrale PSI 2022)**
Soient $\lambda > -\dfrac{1}{2}$, $\varphi_\lambda(t) = \left(1 - t^2\right)^{\lambda - \frac{1}{2}}$ et $I_\lambda(x) = \displaystyle\int_0^1 \varphi_\lambda(t)\cos(xt)\,\mathrm{d}t$

1. φ_λ est-elle intégrable sur $[0, 1[$?

2. Montrer que I_λ est définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ puis exprimer I''_λ en fonction de $I_{\lambda+1}$ et $I_{\lambda+2}$

3. Montrer que I_λ est développable en série entière.

Exercice 6 **(Centrale PSI 2021)**
On admet l'existence de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ et on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\sin(xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$

2. Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = I$ et déterminer la limite en $+\infty$ de f.

3. a) Montrer que $I = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u + k\pi}\,\mathrm{d}u$

b) Montrer que f n'est pas continue en 0