Sujets Centrale 2

Exercice 1 **(Centrale 2 PSI 2016)** *[Solution]*
On pose $u_n = \arctan(n+1) - \arctan(n)$

1. Tracer les 50 premiers termes de la suite.

2. Étudier la monotonie, la convergence de (u_n) puis déterminer un équivalent de u_n.

3. Soit $(\varepsilon_n) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ une suite quelconque.

a) Justifier la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \varepsilon_n u_n$; on note $S(\varepsilon)$ la somme de cette série.

b) Montrer que pour toute suite (ε_n), on a $0 \leqslant S(\varepsilon) \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ puis que cet encadrement est optimal.

c) Soit $\varepsilon = (0,1,0,1,0,1,\dots)$; calculer $S(\varepsilon)$ à 10^{-5} près.

d) Soit $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ fixé, on pose $S_n(\varepsilon) = \sum\limits_{k=0}^{n} \varepsilon_k u_k$ et on définit la suite ε par

$$\varepsilon_0 = \begin{cases} 1 & \text{si } u_0 \leqslant x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_{n+1} = \begin{cases} 1 & \text{si } S_n(\varepsilon) + u_{n+1} \leqslant x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En utilisant Python, conjecturer la limite de $(S_n(\varepsilon))$.

e) Montrer que pour tout $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, il existe $(\varepsilon) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ telle que $x = S(\varepsilon)$.

Exercice 2 **(Centrale 2 PSI 2019)** *[Solution]*
Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit $H_n(\mathbb{R})$ qui est l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients dans $\{-1,1\}$ et dont les colonnes sont 2 à 2 orthogonales. $SH_n(\mathbb{R})$ est le sous-ensemble des matrices symétriques de $H_n(\mathbb{R})$.

1. Écrire une fonction qui donne la norme d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Soit A à coefficients dans $\{-1,1\}$. Montrer que $A \in H_n(\mathbb{R})$ si et seulement si $A\,{}^tA = nI_n$.

3. Tester le script `[[x,y] for x in [0,1] for y in [0,1]]` et en déduire des instructions pour obtenir l'ensemble $H_4(\mathbb{R})$, puis $SH_4(\mathbb{R})$; quel est le cardinal de $SH_4(\mathbb{R})$?

4. Déterminer l'ensemble $\{\mathrm{Tr}(A), A \in SH_4(\mathbb{K})\}$ puis le prouver théoriquement.

5. Montrer que $\{\mathrm{Tr}(A), A \in SH_8(\mathbb{K})\} = \{0\}$

Exercice 3 **(Centrale 2 PSI 2017)** *[Solution]*
Soit $f(x) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} x^{n^2}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.

2. Ecrire un programme qui renvoie $\sum\limits_{k=-n}^{n} x^{k^2}$.

3. Déterminer une valeur approchée à 10^{-5} près de $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

4. Tracer sur le même graphe une approximation de f et $g : x \mapsto \sqrt{\dfrac{\pi}{1-x}}$.

5. Déterminer un équivalent de f en 1 ; on pourra utiliser $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ si $\alpha > 0$.

6. On note $r_2(n)$ le nombre de façons d'écrire n comme somme de deux carrés d'entiers relatifs.
Ecrire un programme donnant $r_2(n)$ et donner les valeurs de $r_2(n)$ pour $n \leqslant 100$.

7. Déterminer le domaine de définition de $h(x) = \sum\limits_{n\geqslant 0} r_2(n) x^n$.

8. Trouver une relation entre f et h et en déduire un équivalent de h en 1.

Exercice 4 **(Centrale 2 PSI 2016)** *[Solution]*

1. Soient $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 125 & -31 \\ -125 & 0 & 57 \\ 31 & -57 & 0 \end{pmatrix}$

a) On pose $M_n = \left(I_3 + \dfrac{1}{n}M\right)^n$ avec $M = E$ ou $M = A$. Calculer les 4 premiers termes de M_n dans les 2 cas.

b) On pose $N_n = {}^tM_nM_n$. Calculer les 6 premiers termes de (N_{10^n}) pour $M = E$ puis $M = A$.
Que peut-on conjecturer sur la limite de N_n ?

c) Prouver ce résultat.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ antisymétrique réelle.

a) Montrer que $X \in \ker(A^2) \Rightarrow X \in \ker(A)$.

b) Montrer que la seule valeur propre réelle possible de A est 0.

c) Montrer que la suite (N_n) converge.

d) Que dire de la suite (M_n) ?

Exercice 5 **(Centrale 2 PSI 2016)** *[Solution]*
On considère un jeu à n joueurs ($n \geqslant 2$). Chaque joueur lance une pièce équilibrée. Un joueur gagne s'il est le seul à faire « pile » ou s'il est le seul à faire « face ».

1. On note X_n la variable aléatoire discrète égale au nombre de parties à jouer pour qu'il y ait un vainqueur.

a) Écrire une fonction `partie(n)` qui renvoie 1 si la partie à n joueurs est gagnée, 0 sinon.

b) Écrire une fonction `X(n)` qui simule X_n.

c) Quelle est la loi de X_n ; donner son espérance et sa variance.

d) Vérifier les résultats à l'aide de la modélisation informatique.

2. On organise un tournoi en N parties (avec n joueurs). On note Y_n le nombre de parties gagnées.

a) Trouver un entier U_n, le plus petit possible, tel que pour tout $N \leqslant U_n$, l'espérance de Y_n soit $\leqslant 1$.

b) Déterminer un équivalent de $P(Y_n \leqslant 2)$ lorsque $N = U_n$.

Exercice 6 **(Centrale 2 PSI 2019)** *[Solution]*
Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \left\{n + \dfrac{1}{2}, n \in \mathbb{Z}\right\}$; on définit l'entier le plus proche de y comme l'entier $q \in \mathbb{Z}$ tel que $|y - q| < \dfrac{1}{2}$.

Soient a_n l'entier le plus proche de $n!e^{-1}$ et $b_n = n! \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

1. a) Écrire une fonction qui renvoie l'entier le plus proche d'un réel y.

b) Écrire une fonction qui renvoie a_n et b_n.

c) Afficher les 16 premiers termes de (a_n) et (b_n).
Émettre une conjecture et la démontrer.

2. On définit $d_n = n!e^{-1} - b_n$ et $J_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^x \, \mathrm{d}x$.

a) Ecrire deux fonctions qui renvoient d_n et J_n.

b) Afficher les 16 premiers termes de (d_n) et $\left(\dfrac{J_n}{d_n}\right)$.

Émettre une conjecture et la démontrer.

3. Tracer les 16 premiers points (n, d_n).

4. Déterminer un équivalent de d_n.

Exercice 7 **(Centrale 2 PSI 2016)** *[Solution]*
Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $a_1 = 1$ et $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}$. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{4^k}$.

1. a) Calculer les 10 premiers termes de (a_n).

b) Tracer les 10 premiers points (n, S_n). Quelle conjecture peut-on faire sur S_n ? On l'admettra pour la suite.

c) Que peut-on en conclure sur le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$?

2. On pose $b_1 = 1$ et $b_n = \dfrac{-n}{2(n-1)} \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} b_k b_{n-k}$.

a) Calculer les 10 premiers termes de (b_n).

b) Comparer $|b_n|$ et a_n.

c) Montrer que $B(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} b_k x^k$ admet un rayon de convergence $R' > 0$.

d) Montrer que sur $]-R', R'[$, B est solution de $xy'(1 + y) - y = 0$.

3. Tracer le graphe de $x \mapsto B(x)e^{B(x)}$; commenter puis justifier l'observation..

Exercice 8 **(Centrale 2 PSI 2016)** *[Solution]*
Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $f_0(x) = x$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1}(x) = 3f_n\left(\dfrac{x}{3}\right) - 4f_n^3\left(\dfrac{x}{3}\right)$

1. Écrire sur Python une fonction `f(n,x)` qui renvoie $f_n(x)$.
2. Tracer f_n sur Python et sur $[0, 4\pi]$ pour $n \in [\![1, 5]\!]$ en limitant les ordonnées en valeur absolue à 3.
3. Soit $\phi(x) = 3x - 4x^3$. Tracer ϕ avec Python sur $[-1, 1]$ puis tracer $x \mapsto \phi(\sin x)$ sur $[-2\pi, 2\pi]$.
4. Prouver que : si $(x, y) \in [-1, 1]^2$, $|\phi(x) - \phi(y)| \leqslant 9|x - y|$.
5. Montrer que $|f_p(x) - \sin(x)| \leqslant 9^p \left|\dfrac{x}{3^p} - \sin\left(\dfrac{x}{3^p}\right)\right|$.
6. Qu'en déduire sur la convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 9 **(Centrale 2 PSI 2016)** *[Solution]*
On considère deux matrices M_n et T_n dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $(M_n)_{i,j} = \min\{i, j\}$ et T_n triangulaire supérieure avec des 1 sur le triangle supérieur, y compris la diagonale.

1. Écrire un script Python permettant l'affichage de M_n pour $2 \leqslant n \leqslant 10$.
2. Calculer $\det(M_n)$ pour $2 \leqslant n \leqslant 10$. Conjecturer un résultat.
3. Écrire un script Python permettant l'affichage de T_n pour $2 \leqslant n \leqslant 10$.
4. Pour $2 \leqslant n \leqslant 10$, calculer ${}^tT_nT_n$. Conjecturer un résultat.
5. Démontrer les deux conjectures faites.
6. Montrer que M_n est diagonalisable à valeurs propres > 0.
7. Montrer que $\lambda_n = \max(\mathrm{Sp}(M_n)) \geqslant \dfrac{n+1}{2}$.
8. En introduisant N, la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $N_{i,i+1} = 1$ (si $1 \leqslant i \leqslant n-1$), les autres coefficients nuls, calculer M_n^{-1} et justifier que $\mathrm{Sp}(M_n^{-1}) \subset]0, 4]$.
9. Utiliser Python pour le calcul de M_n^{-1}.

Exercice 10 **(Centrale 2 PSI 2016)** *[Solution]*
Soient $a \in \mathbb{R}$, $\omega \in \mathbb{R}^{+*}$.

1. Déterminer x de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle de I de $\mathbb{R}$ contenant 0 telle que : $x'' + \omega^2 x = 0$, $x(0) = 0$ et $x'(0) = a$.
2. On considère l'équation différentielle $x'' + \omega^2 \sin(x) = 0$, $x(0) = 0$ et $x'(0) = a$. En utilisant Python, tracer la courbe représentative de la solution f sur $[0, 10]$ pour $a \in \{0,5 \ ; \ 1 \ ; \ 1,5 \ ; \ 2 \ ; \ 2,5\}$.
3. Soient $r \in]0, 1[$ et $F : t \mapsto \displaystyle\int_0^t \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1 - r^2\sin^2(\omega u)}}$.
   a) Montrer que F est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, strictement croissante et impaire.
   b) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ puis que sa réciproque F^{-1} est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
   c) Pour $r = 0,9$ et en utilisant Python, tracer la courbe représentative de F sur $[-5, 5]$.
4. a) Tracer la courbe représentative de $t \mapsto 2\arcsin(r\sin(\omega F^{-1}(t)))$ sur $[-5, 5]$.
   b) On suppose que $0 < a < 2\omega$. On pose $r = \dfrac{a}{2\omega}$ et $\varphi(t) = 2\arcsin(r\sin(\omega F^{-1}(t)))$. Montrer que $\varphi'' + \omega^2\sin(\varphi) = 0$.

Exercice 11 **(Centrale 2 PSI 2016)** *[Solution]*
On considère une urne remplie de boules noires et blanches. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit l'état n, où l'urne contient $n+2$ boules noires et n boules blanches. L'expérience est la suivante : on choisit au hasard une boule de l'urne ; si elle est noire, on la remet et on ajoute une boule noire et une boule blanche ; si elle blanche, on l'enlève et on retire une boule noire.

1. Supposons que l'état initial est l'état $n \geqslant 1$. Montrer qu'après une expérience, l'urne est dans l'état $n-1$ ou $n+1$.
2. Écrire un programme python modélisant un tirage partant de l'état n (passé en paramètre).
3. Écrire un programme python donnant l'évolution de l'urne sur 1000 tirages, en partant de l'état n. Faire des tests pour $n = 5, 10, 20, 100$.
   Tracer l'évolution de l'état de l'urne.
   Conjecturer le comportement du système.
4. On convient que le jeu se termine lorsqu'il n'y a plus aucune boule blanche dans l'urne.
   On définit l'événement E_j : « en partant de l'état j, le jeu a une durée finie ». On pose $e_j = P(E_j)$.
   a) Montrer que, pour tout $j \geqslant 1, e_j = \dfrac{j+2}{2j+2}e_{j+1} + \dfrac{j}{2j+2}e_{j-1}$.
   b) Justifiez la convergence de la suite (e_j).
   Interprétez avec votre conjecture.

c) On définit la suite de vecteurs $U_j = \begin{pmatrix} u_j \\ u_{j+1} \end{pmatrix}$ avec $u_j = (j+1)e_j$. Trouver une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $U_{j+1} = AU_j$.

d) La matrice A est-elle diagonalisable ?

Montrer que A est semblable à $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Donner U_j et conclure.

Exercice 12 **(Centrale 2 PSI 2016)** *[Solution]*

Soient $x \in \mathbb{R}^{+*}$ et $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie pas $u_0 = x$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{n+1}$. On désigne par $u_n(x)$ le $n^{\text{ème}}$ terme de de cette suite.

1. Écrire une fonction `Suite(n,x)` qui renvoie $u_n(x)$. Tester la fonction pour quelques valeurs. Tracer les premiers termes de la suite pour différentes valeurs de x. Commenter.
2. Tracer pour $n \leqslant 30$ et $x = 1,6616$, puis pour $n \leqslant 17$ et $x = 1,6617$ les différents termes de la suite. Commenter.
3. Montrer l'équivalence des trois assertions suivantes :
   (i) $\exists n \in \mathbb{N}^*, u_n < 1$.
   (ii) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.
   (iii) (u_n) converge.
4. On pose $w_n = \dfrac{\ln(n+1)}{2^{n+1}}$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} w_k$. Montrer que (S_n) converge.
   Donner une approximation à 10^{-5} près de sa limite δ.
   Donner une approximation de e^δ.
5. On pose $v_n(x) = \dfrac{\ln(u_n(x))}{2^{n+1}}$.
   a) Calculer $v_{n+1}(x) - v_n(x)$ et en déduire une expression de $u_n(x)$ en fonction de S_n et x.
   b) Etudier la limite de $(u_n(x))$ dans les cas $x < e^\delta$ et $x > e^\delta$.

Exercice 13 **(Centrale 2 PSI 2018)** *[Solution]*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $f(x) = e^{-1/x}$ si $x > 0$. On note $g(x) = f(x)f(1-x)$ et $h(x) = \dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\int_0^x g(t)dt$ avec $\alpha = \displaystyle\int_0^1 g(t)dt$.

1. Représenter la fonction f sur $[-2, 2]$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x > 0,\ f^{(n)}(x) = f(x)\dfrac{P_n(x)}{x^{2n}}$ avec P_n un polynôme.
3. Pour $n \in [\![1, 5]\!]$, calculer $P_n(x)$ avec Python.
4. Quelle est la classe de f sur $\mathbb{R}$? f est-elle DSE ?
5. Calculer α à 10^{-5} près puis représenter g et h sur des intervalles bien choisis.
6. Déduire de ci-dessus qu'il existe une fonction φ telle que $(|x| \leq 1/2 \implies \varphi(x) = 1)$ et $(|x| \geq 1 \implies \varphi(x) = 0)$.
7. Représenter le graphe de φ.
8. Montrer qu'il existe une suite $(M_n)_{n\geq 0}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ |\varphi^{(n)}(x)| \leq M_n$.

Exercice 14 **(Centrale 2 PSI 2018)** *[Solution]*

Soit $(a_n)_{n\geq 0} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ et la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ par $u_0 = 1$, $u_1 = a_1$ et $\forall n \geq 2,\ u_n = a_n u_{n-1} + u_{n-2}$.

1. Écrire une fonction, a étant donnée, qui donne la liste $[u_0, \cdots, u_p]$.
2. Écrire une fonction qui donne la liste $[S_1, \cdots, S_p]$ avec $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{u_k u_{k-1}}$.
3. Tracer la ligne reliant les $((n, S_n))_{n \in [\![1,20]\!]}$ si $a_n = \dfrac{1}{2^n}$, $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, $a_n = \dfrac{1}{n^2}$ et $a_n = 1$. Conjecture ?
4. Si $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n$ converge, montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1 + a_k)$. En déduire la nature de $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^k}{u_k u_{k-1}}$.
5. Si $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n$ diverge, nature de la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^k}{u_k u_{k-1}}$? Indication : étudier de $\displaystyle\sum_{n\geq 2} u_{n-1}(u_n - u_{n-2})$.

Exercice 15 **(Centrale 2 PSI 2019)** *[Solution]*

Soit $A_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique.

1. Calculer $M = (I_2 - A_2)^{-1}(I_2 + A_2)$ à la main.

2. Caractériser géométriquement la matrice M.

3. Soit $a = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix}$. On se place dans $E = \mathbb{R}^3$ euclidien canonique.

Donner la matrice A_3, dans la base canonique, de $f_a : E \to E$ défini par $f_a(x) = a \wedge x$.

4. Calculer $N = (I_3 - A_3)^{-1}(I_3 + A_3)$ et caractériser géométriquement N. Indication : s'aider de $f_a(a)$.

5. Soit $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -3 \\ -1 & 0 & -4 & 0 \\ -3 & 4 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer de $M = (I_4 - A_4)^{-1}(I_4 + A_4)$. Caractériser géométriquement M.

6. Que peut-on conjecturer dans le cas général ?

7. Le démontrer ?

Exercice 16 **(Centrale 2 PSI 2018)** *[Solution]*

Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & -5 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

2. Calculer $P^{-1}UP$ et $P^{-1}VP$. U et V sont-elles diagonalisables ?

3. On pose $W(a) = U + aV$. Trouver une CNS pour que $W(a)$ soit diagonalisable.

4. Pour $a \in \{0, 1/2, 1\}$, montrer que $W(a)^t(W(a))$ et ${}^t(W(a))W(a)$ sont diagonalisables.

5. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que M^tM et ${}^tMM$ sont diagonalisables avec des valeurs propres positives.

6. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $\ker({}^tMM) = \ker(M)$ et que $\dim(\ker({}^tMM)) = \dim(\ker(M^tM))$.

7. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $F_\lambda = \ker({}^tMM - \lambda I_n)$, $G_\lambda = \ker(M^tM - \lambda I_n)$ et $f_\lambda : F_\lambda \to G_\lambda$ définie par $f_\lambda(X) = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}MX$. Montrer que f_λ est bien définie et que c'est une isométrie bijective.

8. En déduire que ${}^tMM$ et M^tM sont orthosemblables (semblables par l'intermédiaire d'une matrice orthogonale).

Exercice 17 **(Centrale 2 PSI 2018)** *[Solution]*

On définit $\theta_n : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ par $\theta_n(x) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1 - x^{2^k})$.

1. Écrire une fonction `dessin(n)` qui trace les θ_k pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

2. Conjecture sur la parité/imparité, monotonie des θ_k et sur la convergence simple sur $[-1, 1]$ de $(\theta_n)_{n\geq 1}$.

3. Démontrer ces conjectures.

4. Montrer que $(\theta_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers $\theta :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ continue qui vérifie $\theta(x) = (1 - x^2)\theta(x^2)$.

5. Trouver toutes les fonctions $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ continues qui vérifient $f(x) = (1 - x^2)f(x^2)$.

6. Si $\forall x \in]-1, 1[,\ \theta(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n}$, calculer a_0 et montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{2n} = a_n$ et $a_{2n+1} = -a_n$.

7. Écrire une fonction `coeff(n)` qui renvoie les n premiers coefficients du DSE supposé de θ.

8. Prouver que θ est DSE sur $]-1, 1[$

Exercice 18 **(Centrale 2 PSI 2018)** *[Solution]*

On considère une urne avec initialement une boule rouge et une boule noire. Au tirage n, on tire au hasard une boule dans l'urne. On la remet, et on rajoute en plus une boule de la même couleur que celle qu'on vient de tirer. On note X_n (resp. Y_n) la variable aléatoire qui indique le nombre de boules rouges (resp. noires) après n tirages. Pour $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n(u, v) = \displaystyle\sum_{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2} P(X_n = i, Y_n = j)u^i v^j$.

1. Écrire une fonction `simulation(n)` qui renvoie le nombre de boules rouges après n tirages.

2. Écrire une fonction `moyenne(n,N)` qui renvoie une liste `L` telle que `L[i]` est la proportion des N simulations effectuées où on a i boules rouges après n tirages.

3. Tester cette dernière fonction et commenter les résultats.

4. Pour $(i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2$, donner $P(X_{n+1} = i, Y_{n+1} = j)$ à l'aide de $P(X_n = i - 1, Y_n = j)$, $P(X_n = i, Y_n = j - 1)$.

5. En déduire que $P_{n+1}(u,v) = \dfrac{1}{n+2}\Big(u^2\dfrac{\partial P_n}{\partial u}(u,v) + v^2\dfrac{\partial P_n}{\partial v}(u,v)\Big)$.

6. Conclure que $P_n(u,v) = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u^{k+1}v^{n-k+1}$

7. Déterminer la loi de X_n ; X_n admet-elle une espérance ?

8. Quelle est la probabilité de ne tirer que des boules rouges ?

Exercice 19 **(Centrale 2 PSI 2018)** *[Solution]*

Soit $A = \begin{pmatrix} 64 & 0 & -28 & 17 \\ 12 & -15 & 0 & 38 \\ -4 & 1 & 64 & 17 \\ -3 & 5 & 0 & 32 \end{pmatrix}$. Soit $A_1 = A$ et $\forall k \geq 1,\ A_{k+1} = A(A_k + a_k I_4)$ où $a_k = -\dfrac{\operatorname{Tr}(A_k)}{k}$.

1. Calculer a_1, a_2, a_3 et a_4.

2. Calculer $P(A)$ si $P = X^4 + \displaystyle\sum_{k=1}^{4} a_k X^{4-k}$. Que représente le polynôme P ?

3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont les valeurs propres complexes sont (éventuellement répétées avec leur ordre de multiplicité) $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. On définit $\chi_A = \displaystyle\prod_{j=1}^{n}(X - \lambda_j) = X^n + \sum_{k=1}^{n} b_k X^{n-k}$ et $S_j = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^j$ pour $j \in \mathbb{N}^*$.

   Montrer que $\forall j \in \mathbb{N}^*,\ \operatorname{Tr}(A^j) = S_j$.

4. On donne la relation suivante : $\exists r > 0,\ \forall x \in]-r;r[\setminus\{0\},\ x^{n-1}\chi_A'(1/x) = x^n\chi_A(1/x)\Big(\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{1-\lambda_j x}\Big)$.

   Montrer que pour $1 \leq p \leq n$, $S_p + S_{p-1}b_1 + \cdots + pb_p = 0$.

5. En déduire un algorithme permettant de calculer les coefficients de χ_A.

6. Conclure quant à la question **2**.

7. Justifier la relation admise à la question **4**.

Exercice 20 **(Centrale 2 PSI 2018)** *[Solution]*

Un infinité de joueurs $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ participent à un tournoi. Le premier match oppose A_0 et A_1, A_0 gagne avec la probabilité $p \in [0;1]$ et, pour $k \geq 2$, A_k affronte le vainqueur du match $k-1$ avec une probabilité p de gagner, son adversaire a une probabilité $q = 1-p$ de gagner. Chaque perdant est définitivement éliminé. Le tournoi s'achève lorsqu'un joueur parvient à cumuler N victoires.

On note $T_{N,p}$ le nombre de matchs nécessaires pour qu'un joueur soit vainqueur et E_n l'évènement « il n'y a pas de vainqueur au n-ième duel (ni avant) ». Tous les duels sont mutuellement indépendants.

On remarquera que la probabilité de gagner n'est pas la même selon le nombre de victoires du joueur.

1. Écrire une fonction `tournoi(N,p)` qui modélise le tournoi et renvoie $T_{N,p}$.

2. Écrire une fonction `moyenne(N,p)` qui renvoie la valeur moyenne de $T_{N,p}$ sur 10^4 tournois.

3. Tester cette fonction pour $N = 6$ et $p = 0.6$ puis pour $N = 3$ et $p = 0.3$.

4. Montrer que $\forall n \in [\![1, N-1]\!]$, $P(E_n) = 1$. Que vaut $P(E_N)$?

5. Montrer que $\forall n \geq N+1, P(E_{n-1}) - P(E_n) = pq^{N-1}P(E_{n-N})$.

6. Montrer que la suite $(P(E_n))_{n\geq1}$ converge, puis que $\displaystyle\sum_{n\geq1} P(E_n)$ converge.

7. Donner $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(E_n)$ et calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(E_n)$.

8. Relier $T_{N,p}$ et E_n et en déduire l'espérance de $T_{N,p}$

Exercice 21 **(Centrale 2 PSI 2018)** *[Solution]*

Soient $P = X^4 + X^3 - 6X^2$ et $Q = -X^4 + X^3 + 5X^2 - 3X + 6$. On note $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, P(x) = Q(y)\}$

1. a) Tracer les graphes de P et Q sur $[-3, 2]$.
   b) Tracer la courbe Γ.
   c) Montrer que Γ est fermée et bornée.
   d) Que dire des tangente à Γ aux points d'intersection avec l'axe (Oy) ? Justifier.

2. On pose $f(x,y) = x^2 + y^2$
   a) Justifier qu'il existe (x_0, y_0) tel que $f(x_0,y_0) = \displaystyle\max_{(x,y)\in\Gamma} f(x,y)$.

b) En admettant que Γ peut être décrit par un paramétrage régulier, déterminer un vecteur directeur de la tangente à Γ en (x_0, y_0)

Exercice 22 **(Centrale 2 PSI 2019)** *[Solution]*

Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1-t}{1-xt^3}\,\mathrm{d}t$

1. Montrer que F est définie sur $[-1, 1]$ et tracer son graphe à l'écran.

2. Montrer que F est continue sur $[-1, 1]$.

3. Soit $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{(3k+1)(3k+2)}$.
Tracer sur le même graphe S_2, S_5, S_8 et F. Quelle conjecture peut-on faire ?
Démontrer cette conjecture.

4. Calculer $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(3n+1)(3n+2)}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{(3n+1)(3n+2)}$ et vérifier le résultat avec l'ordinateur.

5. Montrer que F est dérivable sur $[-1, 1[$.

Exercice 23 **(Centrale 2 PSI 2019)** *[Solution]*

On lance n dés équilibrés. On note T_i le rang d'apparition du premier « 1 » sur le dé i. On relance les dés qui n'ont pas fait « 1 » jusqu'à ne plus avoir de dés à relancer et on note N_n le nombre de lancers nécessaires.

1. Écrire une fonction simulant T_1.

2. Écrire une fonction simulant N_n (avec n en paramètre) puis une fonction simulant $E(N_n)$ et citer le résultat justifiant cette simulation.

3. Tracer $E(N_n)$ en fonction de $n \in [\![1, 20]\!]$

4. Donner la loi, l'espérance et la variance de T_i.

5. Calculer $P(N_n \leqslant k)$

6. Étudier la convergence de $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} P(N_n > k)$.

7. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$.

a) Montrer que $\forall K \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{K-1} P(X > k) = KP(X > K) + \sum_{k=0}^{K} kP(X = k)$.

b) En déduire que si $\sum P(X > k)$ converge alors $E(X)$ existe et $E(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k)$

8. Déterminer $E(N_n)$.

Exercice 24 **(Centrale 2 PSI 2019)** *[Solution]*

On s'intéresse aux cartes Panini des joueurs de foot de la coupe du monde. On suppose que l'on peut acheter les cartes à l'unité et que la probabilité d'obtenir la carte d'un joueur est uniforme. À la coupe du monde il y avait 32 équipes de 23 joueurs ; on notera n le nombre de joueurs. Z_k est la variable aléatoire discrète qui compte le nombre de vignettes différentes que l'on a après l'achat de k cartes ($Z_0 = 0$ et $Z_1 = 1$).

1. a) Écrire une fonction `collec(k,n)` qui renvoie pour k achats le nombre de vignettes différentes.

b) Estimer $E(Z_k)$ et tracer son allure en fonction de k pour $k \in [\![0, 300]\!]$ et $n = 50$.

2. On pose $P_k(X) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} P(Z_k = i)X^{n-i}$

a) Montrer que $P_{k+1}(X) = P_k(X) + \dfrac{1}{n}(1 - X)P_k'(X)$

b) Exprimer $E(Z_k)$ en fonction de $P_k'(1)$.

c) Calculer $E(Z_k)$.

3. On note, pour $k \geqslant 1$, T_k la variable aléatoire discrète qui donne le nombre d'achats nécessaires pour obtenir k cartes différentes.

a) Estimer $E(T_k)$ pour $k \in [\![0, 50]\!]$ et $n = 50$.

b) Déterminer la loi de $T_{k+1} - T_k$.

c) En déduire $E(T_k)$.

Exercice 25 **(Centrale 2 PSI 2019)** *[Solution]*

Soit $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} n \\ n-1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. On note $A_{n,i}$ la matrice dont toutes les colonnes valent u sauf la $i^{\text{ème}}$ qui vaut v.

1. Écrire une fonction prenant n et i en paramètres et qui renvoie $A_{n,i}$.

2. Donner les valeurs propres de $A_{n,i}$ pour $n \in [\![3, 7]\!]$ et $i \in [\![1, n]\!]$.

3. Déterminer une valeur propre α commune à toutes les $A_{n,i}$ pour $n \geqslant 3$.

4. Montrer que $\mathrm{Sp}(M) = \mathrm{Sp}({}^tM)$ pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et en déduire que $\dfrac{n(n+1)}{2}$ est une valeur propre commune aux $A_{n,i}$ pour $n \geqslant 3$.

5. Montrer qu'il existe $\beta_{n,i}$ tel que $\mathrm{Sp}(A_{n,i}) = \left\{0, \dfrac{n(n+1)}{2}, \beta_{n,i}\right\}$ et $|\beta_{n,i}| < \dfrac{n(n+1)}{2}$

6. $A_{n,i}$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 26 **(Centrale 2 PSI 2019)** *[Solution]*

Si $\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique, on dit que A vérifie la propriété (P) si $\forall X \in \mathbb{R}^n, X \neq 0 \Rightarrow {}^tXAX > 0$.
On dit également qu'une famille de vecteurs $(U_1, \ldots, U_p)$ de $\mathbb{R}^n$ est A-conjuguée si $\forall (i,j)$, ${}^tU_iAU_j = \delta_{i,j}$

1. a) Montrer que $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ vérifie (P).

b) Montrer que $(X, Y) \mapsto {}^tXAY$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.

c) Orthonormaliser la base canonique de $\mathbb{R}^3$ pour ce produit scalaire.

d) Déterminer deux base (U_1, U_2, U_3) et (V_1, V_2, V_3) de $\mathbb{R}^3$ A-conjuguées distinctes.

e) Comparer $U_1\,{}^tU_1 + U_2\,{}^tU_2 + U_3\,{}^tU_3$, $V_1\,{}^tV_1 + V_2\,{}^tV_2 + V_3\,{}^tV_3$ et A^{-1}

f) Calculer ${}^tU_1U_1 + {}^tU_2U_2 + {}^tU_3U_3$ et ${}^tV_1V_1 + {}^tV_2V_2 + {}^tV_3V_3$.

2. Justifier les constatations précédentes pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant (P).

3. Soit $\alpha > 0$, existe-t-il une famille $(x_1, \ldots, x_n)$ A-conjuguée telle que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 = \alpha$?

Exercice 27 **(Centrale 2 PSI 2019)** *[Solution]*

Pour $n \in \mathbb{N}$, on introduit sa décomposition en base 2 : $n = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} b_k 2^k$ avec $b_k \in \{0, 1\}$ (nuls à partir d'un certain rang).
Soit X une variable aléatoire discrète telle que $1 + X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$. On définit les variables aléatoires discrètes $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ par $X_i = b_i$ si $X = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} b_k 2^k$.

1. a) Quel est le rôle de la fonction suivante (n et i sont des entiers naturels) ?

```
def f(n,i) :
    return (n//(2**i))%2
```

b) Écrire une fonction `simulation(N,p,m)` prenant en argument deux entiers N et m et un réel p et qui renvoie la liste des moyennes des variables aléatoires discrètes X_i, pour $i \leqslant m - 1$, obtenues sur N expériences.

c) Tester pour $N = 10000$, $m = 15$ et $p \in \left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{10}, \dfrac{1}{100}, \dfrac{1}{1000}\right\}$. Que constate-t-on ?

2. a) Montrer que $P(X_i = 1) = \displaystyle\sum_{j=0}^{2^i - 1} \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = j + 2^i + 2^{i+1}k)$ et en déduire la loi de X_i.

b) Déterminer la limite de $P(X_i = 1)$ si $i \to +\infty$ et si $p \to 0$ (pour i fixé)

3. a) Soit B_i des variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes telles que $B_i \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\dfrac{q^{2^i}}{1 + q^{2^i}}\right)$. Montrer que $P\left(\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{i \geqslant n} (B_i = 0)\right) = 1$.

b) Justifier l'existence de $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \prod_{i=0}^{n} (1 + q^{2^i})$ et que cette limite est strictement positive.

c) On pose $X = \sum_{i \in \mathbb{N}} 2^i B_i$. Montrer que $1 + X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$

Exercice 28 **(Centrale 2 PSI 2019)** *[Solution]*

Soit $f(x) = \dfrac{1}{2 - e^x}$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{\ln(2)\}$; on pose $a_n = \dfrac{1}{n!} f^{(n)}(0)$.

1. a) Montrer que $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{a_{n-k}}{k!}$, pour $n \geqslant 1$; on pourra utiliser $(2 - e^x)f(x) = 1$

b) Calculer les 10 premiers termes de la suite (a_n).

2. On considère la série entière $\displaystyle\sum_{k \geqslant 0} a_n x^n$

a) Tracer les premiers termes des suites (a_n), $\left(\dfrac{1}{\ln(2)^n}\right)$ et $\left(\dfrac{1}{2\ln(2)^n}\right)$; que constate-t-on et que peut-on en déduire sur le rayon de convergence R de la série entière ?

b) Justifier que $R > 0$

3. a) Tracer le graphe des 6 premières sommes partielles de la série entière et celui de f sur $[-0.6, 0.6]$. Que peut-on conjecturer ?

b) Montrer que f est DSE et préciser la valeur du rayon de convergence.

Exercice 29 **(Centrale 2 PSI 2019)** *[Solution]*

Pour $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on pose $M_u = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$

1. a) Montrer que M_u est combinaison linéaire de trois matrices indépendantes de u, dont l'une est le carré d'une des deux autres.

b) Écrire un programme qui renvoie M_u puis calculer $M_{(7,-14,1)} \times M_{(1,2,3)}$ et $M_{(1,2,3)} \times M_{(7,-14,1)}$

c) On définit l'ensemble $\mathcal{M} = \{M_u, u \in \mathbb{R}^3\}$. Quelle est la structure de cet ensemble ? Est-il stable par $\times$? La loi $\times$ est-elle commutative sur $\mathcal{M}$?

2. a) Montrer que M_u est semblable à $\begin{pmatrix} a+b+c & 0 & 0 \\ 0 & a - \frac{1}{2}(b+c) & -\frac{\sqrt{3}}{2}(b-c) \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2}(b-c) & a - \frac{1}{2}(b+c) \end{pmatrix}$.

b) M_u est-elle diagonalisable ?

3. Pour $m \in \mathbb{R}$, on pose $P_m = X^3 - X^2 + m$.

a) Tracer les graphes de P_m sur $\left[-1, \dfrac{3}{2}\right]$ pour $m \in \{-0.1, 0, 0.1, 0.2\}$

b) Déterminer une CNS sur m pour que P_m ait trois racines réelles.

4. Soient $S = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3, a^2 + b^2 + c^2 = 1\}$, $T = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3, a + b + c = 1\}$ et $T' = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3, a + b + c = -1\}$

a) Montrer que M_u est orthogonale si et seulement si $u \in S \cap (T \cup T')$

b) Montrer que M_u est une matrice de rotation si et seulement si a, b, c sont les racines d'un polynôme P_m.

Exercice 30 **(Centrale 2 PSI 2019)** *[Solution]*

Pour $a \in \mathbb{R}$, on définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0(a) = a$ et $u_{n+1}(a) = \arctan\left(\dfrac{u_n(a)}{1 + \sqrt{1 + u_n(a)^2}}\right)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. a) Écrire une fonction `suite(N,a)` qui renvoie la liste des valeurs de $u_n(a)$ pour $n \in [\![0, N]\!]$. Que donne `suite(3,0)` et `suite(10,2019)` ?

b) Conjecturer la limite, quand n tend vers $+\infty$, de $u_n(a)$; le vérifier pour $a \in \{1, 4, 10, 100\}$. On note C_1 cette conjecture.

c) Tracer le graphe de $2^{10} u_{10}$ sur $[-30, 30]$ avec un pas de 0.01 et conjecturer la nature, quand n tend vers $+\infty$ et $a > 0$, de $2^n u_n(a)$. On note C_2 cette conjecture.

2. a) Montrer $\forall x \in \mathbb{R}, |\arctan(x)| \leqslant |x|$

b) Démontrer C_2.

3. a) Déterminer la nature des séries $\sum u_n(a)$, $\sum u_n(a)^2$ et $\sum \ln\left(\dfrac{2u_{n+1}(a)}{u_n(a)}\right)$

b) En déduire un équivalent de $u_n(a)$ quand n tend vers $+\infty$ (à l'aide d'une constante que l'on ne cherchera pas à déterminer).

4. Soit $g(a) = \sum_{n \geqslant 0} u_n(a)$. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 31 **(Centrale 2 PSI 2019)** *[Solution]*
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n = X(1-X)\left(1 - \frac{1}{2}X\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n}X\right)$.

1. a) Écrire une fonction qui renvoie P_n

b) Tracer le graphe de P_n sur $[0,1]$ et $n \in [\![1,10]\!]$; commentez.

c) Montrer que P_n admet sur $[0,1]$ un maximum atteint en un point unique x_n.

2. a) Écrire une fonction qui renvoie la valeur de x_n.

b) Calculer $x_n \ln(n)$ pour $n = 10k$ et $k \in [\![1,10]\!]$; commenter.

c) En considérant $x \longmapsto \ln(P_n(x))$, montrer $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{x_n} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{1-x_n}$

d) En déduire un équivalent de x_n.

3. a) Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $\forall u \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $|\ln(1-u) + u| \leqslant Cu^2$.

b) Déterminer un équivalent de $P_n(x_n)$

Exercice 32 **(Centrale 2 PSI 2021)** *[Solution]*
Une élection se déroule entre A et B avec $m \geqslant 2$ votants. Initialement, a votants ont l'intention de voter pour A et $m - a$ pour B. Chaque jour, deux personnes (choisies aléatoirement) se rencontrent et, si elles ont des intentions de vote différentes, la première convainc la seconde de voter comme elle.
On note X_n le nombre d'intentions de votes pour A le jour n. On a donc $X_0 = a$.

1. Écrire une fonction qui renvoie la valeur de X_n. La tester pour n assez grand. Que remarque-t-on ?

2. On note $\pi_{n,k} = P(X_n = k)$.
Montrer que $P(X_{n+1} = k+1 | X_n = k) = P(X_{n+1} = k-1 | X_n = k) = \dfrac{k(m-k)}{m(m-1)}$ puis
$P(X_{n+1} = k | X_n = k) = 1 - 2\dfrac{k(m-k)}{m(m-1)}$

3. Montrer que $P(X_{n+1} = k) = \left(1 - 2\dfrac{k(m-k)}{m(m-1)}\right)\pi_{n,k} + \dfrac{(k+1)(m-k-1)}{m(m-1)}\pi_{n,k+1} + \dfrac{(k-1)(m-k+1)}{m(m-1)}\pi_{n,k-1}$
Montrer que $\pi_{n,k} \leqslant \left(1 - \dfrac{2}{m(m-1)}\right)^n$ si $k \in [\![1, m-1]\!]$

4. On note V_A l'événement « tout le monde vote pour A au bout d'un certain nombre de jours ». Montrer que $P(V_A) = \lim_{n \to +\infty} P(X_n = m)$.

5. Écrire une fonction qui renvoie 1 si tout le monde vote pour A au bout d'un grand nombre de jours, 0 sinon puis calculer la moyenne de cette fonction sur 100 itérations.

6. Déterminer $P(V_A)$ en fonction de a.

Exercice 33 **(Centrale 2 PSI 2021)** *[Solution]*
On lance, les unes après les autres, n boules sur une planche avec N trous ; chaque boule a une probabilité $\dfrac{1}{N}$ d'entrer dans un des N trous (indépendamment les unes des autres). On note T_n la variable aléatoire discrète qui donne le nombre de trous non vides.

1. Écrire une fonction `remplir(n,N)` qui renvoie le nombre de boules dans chaque trou après n lancers.

2. Écrire une fonction `nombre(n,N)` qui renvoie le nombre de trous non vides. La tester avec $N = 10$ et n grand. Que remarque-t-on ?

3. Déterminer les valeurs possibles de T_n en fonction de n et N.

4. Donner les lois de T_1 et T_2.

5. On suppose $n \geqslant 2$. Calculer $P(T_n = 1)$, $P(T_n = 2)$ et $P(T_n = n)$; on distinguera les cas $n \leqslant N$ et $n > N$.

6. Avec la formule des probabilités totales, montrer que $P(T_{n+1} = k) = \dfrac{k}{N}P(T_n = k) + \dfrac{N-k+1}{N}P(T_n = k-1)$ pour $k \in [\![1, N]\!]$.

7. a) En déduire la relation $G_{n+1}(x) = xG_n(x) + \dfrac{1}{N}x(1-x)G_n'(x)$, où $G_n(x) = \sum_{k=0}^{N} P(T_n = k)x^k$.

b) En déduire $E(T_n)$

c) Le vérifier numériquement.

Exercice 34 **(Centrale 2 PSI 2021)** *[Solution]*
Soient $f(x,y) = \dfrac{\mathrm{ch}(2y) - \cos(2x)}{2}$ et $g_r(\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ pour $r \in \mathbb{R}^+$.

1. Tracer le graphe de g_r sur $[-2\pi, 2\pi]$ et $r \in \{1, 2, 5, 10\}$; conjecturer la périodicité, la parité de g_r, ses variations et son maximum sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

2. Montrer que f admet un minimum en $(0,0)$.

3. Soient $B_r = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \sqrt{x^2+y^2} \leqslant r\right\}$, $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \sqrt{x^2+y^2} < r\right\}$ et $C_r = B_r \setminus \Omega_r$.
Préciser si ces trois ensembles sont ouverts ou fermés.

4. Montrer que f admet un maximum M_r dans B_r.

5. On définit $F_r(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{si } (x,y) \in B_r \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

a) Montrer que M_r est un maximum de F_r sur $[-r,r]^2$.

b) Écrire une fonction `F(r,x,y)` qui renvoie $F_r(x,y)$.

c) Donner une estimation de $M(r)$; on pourra prendre le maximum des $F_r(x_i, y_j)$ avec $x_k = y_k = r - \dfrac{2k}{100} r$ avec $k \in [\![0, 100]\!]$.

d) Tracer le graphe de $r \mapsto M_r$ sur $[1,4]$ par pas de 0.01

e) Tracer sur le même graphe $r \mapsto \mathrm{sh}^2(r)$.

6. a) Montrer $\sin(t) \leqslant t \leqslant \mathrm{sh}(t)$ si $t > 0$

b) Justifier les conjectures précédentes.

Exercice 35 **(Centrale 2 PSI 2021)** *[Solution]*
Soit $(X_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une famille de n^2 variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$. On pose $A = \begin{pmatrix} X_{1,1} & \cdots & X_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{n,1} & \cdots & X_{n,n} \end{pmatrix}$. On dit qu'une matrice carrée symétrique est définie positive si elle est bien symétrique et si toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

1. a) Écrire une fonction qui renvoie une matrice A aléatoire avec ces conditions.

b) Écrire une fonction qui teste si une matrice carrée A est symétrique définie positive.

c) Décrire une méthode pour avoir une première idée de la proportion des matrices symétriques définies positives parmi toutes les matrices A construites comme dans l'énoncé.

d) Programmer la méthode évoquée à la question précédente.

e) Pourquoi la méthode de la question **c.** donne une approximation de la proportion cherchée ?

2. a) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\{0,1\})$ symétrique définie positive, montrer que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXMX \geqslant 0$ et que l'on a la condition d'égalité ${}^tXMX = 0 \Rightarrow X = 0$.

b) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\{0,1\})$ symétrique définie positive, montrer que $M = I_n$.

c) Déterminer la probabilité qu'une matrice introduite précédemment soit symétrique définie positive.

Exercice 36 **(Centrale 2 PSI 2021)** *[Solution]*
On note G un graphe non orienté (ensemble de sommets reliés par des arrêtes), S l'ensemble de ses sommets (numérotés de 1 à n). Chaque sommet peut être relié aux autres, la probabilité d'une liaison est $p \in]0,1[$.
On note S_n le nombre de sommets isolés, ie relié avec aucun autre.
On définit la variable aléatoire X_i (pour $i \in [\![1,n]\!]$) qui vaut 1 si le sommet numéro i est isolé et 0 sinon.

1. a) Écrire une fonction `M(n,p)` permettant d'illustrer cette situation à l'aide d'une matrice dont le coefficient (i,j) vaut 1 si une arrête relie les sommets i et j, 0 sinon.

b) Écrire une fonction `NbIsoles(n,p)` qui renvoie le nombre de sommets isolés.

c) Écrire une fonction `Approx(n,p)` qui approche $E(S_n)$ en effectuant 1000 expériences.

d) Tracer $n \mapsto \ln\left(\dfrac{E(S_n)}{n}\right)$ pour $p \in \{0.3, 0.5, 0.7\}$ et $n \in [\![1, 10]\!]$.

e) Déterminer $E(X_i)$ pour $i \in [\![1,n]\!]$ et en déduire la valeur de $E(S_n)$.

2. a) Soit Z une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que $P(Z = 0) \leqslant \dfrac{V(Z)}{E(Z^2)}$ et que $P(Z \geqslant 1) \leqslant E(Z)$.

b) Calculer $E(S_n^2)$ et en déduire des majorations de $P(S_n \geqslant 1)$ et $P(S_n = 0)$.

3. On suppose dorénavant que p dépend de n et que $p = c\dfrac{\ln(n)}{n}$ avec $c > 0$, $c \neq 1$.
Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} P(S_n = 0)$ selon la valeur de c.

Exercice 37 **(Centrale 2 PSI 2021)** *[Solution]*

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ et $E = \mathrm{Vect}(A, B, C)$.

1. a) Montrer que E est un espace vectoriel. Déterminer sa dimension.

b) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, montrer qu'il existe une unique matrice $M = \begin{pmatrix} a & * & * \\ b & * & * \\ c & * & * \end{pmatrix}$ dans E.

c) Écrire une fonction `M(a,b,c)` qui renvoie cette matrice. Afficher $M(1, 1, 1)$.

2. a) Donner une norme sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Écrire une fonction `Norme(M)` qui calcule cette norme.

b) En déduire une fonction `Test(M)` qui renvoie `True` si et seulement si $M \in E$.

3. a) Donner les éléments propres de quelques matrices $M(a, b, c)$. Montrer qu'il existe un vecteur $V \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ qui soit vecteur propre commun à toutes les matrices M de E.

b) Donner la forme de χ_M si $M \in E$ et $\mathrm{Tr}(M) = 0$.

c) Pour $M = M(a, b, c) \in E$ prise au hasard, constater quelles sont les puissances de M qui sont dans E. Émettre une conjecture.

d) Montrer la conjecture émise à la question précédente. Indication : commencer par le cas $\mathrm{Tr}(M) = 0$.

e) Peut-on trouver $M \in E$ non nulle telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on ait $M^k \in E$.

Exercice 38 **(Centrale 2 PSI 2021)** *[Solution]*

1. On note A_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficients $a_{i,j} = \max(i, j)$.

a) Écrire une fonction qui renvoie A_n et la représenter pour $n \in \{3, 4, 5\}$.

b) Montrer que A_n est inversible. Calculer A_n^{-1} avec Python pour $n \in \{3, 4, 5\}$.

c) Montrer que A_n est diagonalisable.

d) Donner la dimension des sous-espaces propres de A_n pour $n \in \{3, 4, 5\}$ puis conjecturer la dimension de ses sous-espaces dans le cas général.

e) Prouver la conjecture émise à la question précédente.

2. On note M_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficients $m_{i,j} = i + j$.

a) Écrire une fonction qui renvoie M_n et la représenter pour $n \in \{3, 4, 5\}$.

b) Donner le rang de M_n pour $n \in \{3, 4, 5\}$, puis conjecturer son rang dans le cas général.

c) Prouver cette conjecture émise à la question précédente.

d) Donner, sans calcul, une valeur propre de M_n et prouver qu'elle en admet au plus deux autres.

e) Calculer des valeurs approchées de ces deux valeurs propres pour $n \in \{3, 4, 5\}$.

f) Déterminer exactement ces deux valeurs grâce aux traces de M_n et M_n^2.

g) Déterminer exactement ces deux valeurs propres en considérant $(\ker(M_n))^\perp$.

Exercice 39 **(Centrale 2 PSI 2021)** *[Solution]*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on lance une pièce n fois. On note $p \in]0, 1[$ la probabilité de tomber sur pile et $q = 1 - p$ celle de tomber sur face.

On appelle série un intervalle $[\![a, b]\!] \subset [\![1, n]\!]$ tel que :

- tous les lancers du numéro a au numéro b inclus donnent le même résultat.
- si $a > 1$, le lancer numéro $a - 1$ est différent du lancer numéro a.
- si $b < n$, le lancer numéro $b + 1$ est différent du lancer numéro b.

Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on note les évènements :

- $P_k =$« le lancer numéro k donne pile »
- $F_k =$« le lancer numéro k donne face »

On définit la variable aléatoire N_n égale au nombre de séries obtenues au cours des n lancers.

On note enfin G_n la fonction génératrice de N_n.

1. a) Écrire une fonction `lancers(n,p)` qui simule les n lancers. La fonction devra renvoyer une liste de 0 et 1.

b) Écrire une fonction `series(L)` qui prend en argument une liste L de 1 et de 0 et qui renvoie le nombre de séries dans cette liste.

c) Écrire une fonction `moyenne(n,p)` qui renvoie le nombre moyen de séries obtenu lors de 10^5 simulations.

d) Tracer `moyenne(n,p)` en fonction de n pour $n \in [\![1, 10]\!]$ et $p \in \{0.1, 0.4, 0.6, 0.8\}$.

2. a) Donner la loi de probabilité et l'espérance de N_1, N_2 et N_3.

b) Quelles valeurs la variable N_n peut-elle prendre ? Déterminer $P(N_n = 1)$ et $P(N_n = n)$.

c) Montrer, pour $n \geqslant 2$ et $k \in [\![2, n]\!]$, que l'on a :

$$P((N_n = k) \cap P_n) = p\big[P(N_{n-1} = k) \cap P_{n-1}) + P((N_{n-1} = k-1) \cap F_{n-1})\big]$$

$$P((N_n = k) \cap F_n) = q\big[P(N_{n-1} = k) \cap F_{n-1}) + P((N_{n-1} = k-1) \cap P_{n-1})\big]$$

3. Dans les quatre questions suivantes, on prend $p = 1/2$.

a) Donner une expression de G_n en fonction de G_{n-1}.

b) En déduire une expression de G_n en fonction de n et la valeur de $E(N_n)$.

c) Calculer la fonction génératrice d'une variable aléatoire X suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(m, r)$.

d) En déduire la loi de $N_n - 1$.

Exercice 40 **(Centrale 2 PSI 2021)** *[Solution]*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j‘n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite à diagonale propre si $\chi_A = \prod_{k=1}^{n}(X - a_{k,k})$. On note E_n l'ensemble des matrices réelles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à diagonale propre.
On note S_n et A_n les ensembles des matrices respectivement symétriques et antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Soit $A \in E_n$, montrer que A est trigonalisable.

2. a) Écrire une fonction `Polydiag(A)` qui donne les coefficients du polynôme $\prod_{k=1}^{n}(X - a_{k,k})$.

b) En déduire une fonction `estMDP(A)` qui teste si une matrice A est à diagonale propre

c) Les 6 matrices suivantes sont-elles à diagonale propre ?

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ -8 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \quad A_5 = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 4 & 7 \\ -5 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \quad A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Décrire l'ensemble E_2.

4. a) Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec A et C carrées et à diagonales propres. Montrer que $M \in E_n$.

b) Construire $M \in E_4$ avec exactement 13 coefficients non nuls.

5. Soit pour les trois prochaines questions une matrice $M \in E_n \cap A_n$.

a) Calculer χ_M. Que vaut M^n ?

b) Montrer que M^2 est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En déduire que $M^2 = 0$.

c) Calculer $\mathrm{Tr}(M^2)$ en fonction des coefficients de M. En déduire que $M = 0$.

6. Soit un sous-espace F de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $F \subset E_n$.
On cherche dans les deux prochaines questions à majorer de manière optimale la dimension de F.

a) Que dire de $\dim(F + A_n)$? En déduire que $\dim(F) \leqslant \dfrac{n(n+1)}{2}$.

b) Donner un sous-espace F de E_n de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Exercice 41 **(Centrale 2 PSI 2021)** *[Solution]*

On note $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des matrices symétriques à coefficients strictement positifs.

1. a) Faire un programme qui prend en argument un entier n et renvoie une matrice de $\mathcal{E}_n$ avec des coefficients tirés aléatoirement dans $[\![1, 10]\!]$.

b) Déterminer à l'aide de `Python` les valeurs propres de différentes matrices de $\mathcal{E}_n$.
Une matrice de $\mathcal{E}_n$ peut-elle avoir une valeur propre strictement négative ? Toutes les valeurs propres strictement négatives ?

2. On note $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres de $A \in \mathcal{E}_n$ et $(X_1, \ldots, X_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres associée à $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

a) Que peut-on conjecturer sur les coefficients de X_n ?

b) Montrer que : $\forall Y \in \mathbb{R}^n,\ {}^tYAY \leqslant \lambda_n \|Y\|^2$.

c) Démontrer la conjecture (on considèrera le vecteur Z_n dont les composantes sont les valeurs absolues des composantes de X_n).

3. On note $A_a = \begin{pmatrix} A & aX_n \\ a\,{}^tX_n & 0 \end{pmatrix}$ pour tout a réel .

a) On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Donner les valeurs propres de A. En déduire celles de A_a pour certaines valeurs de a.

b) Donner les valeurs propres de A_a dans le cas général .

c) Construire une matrice symétrique de taille 4, à coefficients positifs et dont le polynôme caractéristique est $(X-9)(X+1)(X+3)^2$

Exercice 42 **(Centrale 2 PSI 2022)** *[Solution]*

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 (f(x))^n \,\mathrm{d}x$. On pose $a_1 = -f'(0)$ et $a_2 = -f''(0)$.

1. Dans cette question, on prend $a \in]0,1[$ et $f : x \mapsto 1 - a\sin(x)$.

a) Écrire une fonction qui prend en argument n et qui revoie I_n.

b) Tracer, pour $n \in [\![1, 1000]\!]$, l'ensemble des points $(\ln(n), \ln(I_n))$.

c) En conjecturant que $I_n \sim Kn^\alpha$, trouver une valeur approchée de α.

d) Montrer que $\exists \varepsilon > 0, \forall x \in [0,\varepsilon], 0 \leqslant f(x) \leqslant e^{-\frac{a_1 x}{2}}$.

e) Montrer que $\displaystyle\int_\varepsilon^1 \big(f(x)\big)^n \,\mathrm{d}x = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

f) Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $g_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $g_n(x) = f\left(\dfrac{x}{n}\right)^n$ si $0 \leqslant x \leqslant n\varepsilon$ et $g_n(x) = 0$ sinon. Montrer que la suite $(g_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction $g : x \mapsto e^{-a_1 x}$.

g) Montrer que $I_n \sim \dfrac{1}{a_1 n}$.

2. Dans cette prochaine question, on prend $b \in \mathbb{R}^{+*}$ et $f : x \mapsto 1 - bx^2$.

a) Écrire une fonction qui prend en argument n et qui revoie I_n.

b) Tracer, pour $n \in [\![1, 1000]\!]$, l'ensemble des points $(\ln(n), \ln(I_n))$.

c) Montrer que $\exists \varepsilon > 0, \forall x \in [0,\varepsilon], 0 \leqslant f(x) \leqslant e^{-\frac{a_2 x^2}{4}}$.

d) Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $h_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $h_n(x) = f\left(\dfrac{x}{\sqrt{n}}\right)^n$ si $0 \leqslant x \leqslant \sqrt{n}\,\varepsilon$ et $h_n(x) = 0$ sinon. Montrer que la suite $(h_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction $h : x \mapsto e^{-\frac{a_2 x^2}{2}}$.

e) Montrer que $I_n \sim \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n a_2}}$. Comment en déduire la valeur de l'intégrale de Gauss $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$?

Exercice 43 **(Centrale 2 PSI 2022)** *[Solution]*

1. Soit $x \in]-1, +\infty[$, montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n+x}$ converge. On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+x}$.

2. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{100} \frac{(-1)^{n-1}}{n+x}$ est une approximation à $0,01$ près de $f(x)$.

3. Écrire une fonction `approximation(x)` qui renvoie $\displaystyle\sum_{n=1}^{100} \frac{(-1)^{n-1}}{n+x}$.

4. Donner les valeurs de `approximation(0)` et `approximation(2022)`. Tracer le graphe de f sur $[-0,99; 10]$ avec un pas de $0,01$. Faire des conjectures.

5. Trouver $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to-1^+} f(x)$.

6. Établir que f est de classe C^1 sur $]-1, +\infty[$.

On admet que f est de classe C^∞ sur $]-1, +\infty[$ et que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x > -1, f^{(k)}(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^{n-1}}{n+x}\right)^{(k)}$.

7. Écrire une fonction appelée `derivee(k,x)` qui calcule la dérivée $k^{\text{ème}}$ de f en x.

8. Pour $x \in \left]-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right[$, calculer $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\left|f(x) - \sum_{k=0}^{N}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\right|$. Qu'en déduire ?

Exercice 44 **(Centrale 2 PSI 2022)** *[Solution]*
Deux joueurs font une partie de fléchettes. Le joueur 1 (resp. 2) a une probabilité $p_1 \in]0,1[$ (resp. $p_2 \in]0,1[$) de toucher la cible et il gagne alors la partie.
C'est le joueur 1 qui commence et ensuite ils lancent chacun leur tour (on remarquera que le joueur 1 a les lancers d'indices impairs et le joueur 2 ceux d'indices pairs). Les lancers sont supposés indépendants. On note

- $A_n =$ « le joueur 1 touche la cible au $2n+1^{\text{ème}}$ ».
- $B_n =$ « le joueur 2 touche la cible au $2n+2^{\text{ème}}$ lancer ».
- $E_n =$ « le joueur 1 gagne la match au $2n+1^{\text{ème}}$ lancer ».
- $F_n =$ « le joueur 2 gagne la match au $2n+2^{\text{ème}}$ lancer ».
- $H_n =$ « le jeu ne s'arrête pas au $2n+2^{\text{ème}}$ lancer ».
- $G_1 =$ « le joueur 1 gagne le match ».
- $G_2 =$ « le joueur 2 gagne le match ».

1. Écrire une fonction `jeu` qui renvoie la durée moyenne d'un match (nombres de lancers avant la victoire d'un des deux joueurs) en effectuant 5000 matchs. Donner la fréquence de gain du joueur 1, du joueur 2, tracer l'histogramme des durées des matchs (avec `plt.hist(liste)`).

2. Exprimer H_n en fonction des $A_0, \cdots, A_n, B_0, \cdots, B_n$.

3. Le jeu s'arrête-t-il presque sûrement ?

4. Calculer $P(E_n)$ et $P(F_n)$ en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.

5. Calculer $P(G_1)$ et $P(G_2)$.

On pose X la variable aléatoire qui compte le nombre de lancers avant la victoire d'un des deux joueurs.

6. Calculer $P(X = 2n+1)$ et $P(X = 2n+2)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

7. Montrer que X admet une espérance et la calculer.

8. Ce dernier résultat est-il en accord avec la simulation numérique de la question **1** ?

Exercice 45 **(Centrale 2 PSI 2022)** *[Solution]*
On note d_n le nombre de diviseurs positifs de n, $D_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} d_k$ et $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

1. Écrire deux fonctions d'argument n donnant D_n et H_n.

2. En comptant les points à coordonnées entières sous la courbe $\mathcal{H}_n \ : \ xy = n$ (c'est une hyperbole) et dans $(\mathbb{R}^{+*})^2$, montrer que l'on a $D_n = nH_n + O(n)$.

3. En déduire un équivalent de D_n et vérifier cet équivalent avec Python.

4. Pour $x \in]-1,1[$, calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}H_n x^n$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}nH_n x^n$.

5. Justifier la convergence simple de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ sur $]-1,1[$ si $f_n : x \mapsto \dfrac{x^n}{1-x^n}$.

6. Montrer que $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{1-x^n}$ est continue sur $]-1,1[$.

7. Trouver la suite $(b_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{1-x^k} \underset{0}{=} \sum_{k=1}^{n} b_k x^k + o(x^n)$. Vérifier ce développement limité en traçant les deux sommes partielles au voisinage de 0.

8. Trouver un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 1^- en admettant l'égalité (E) : $\forall x \in]-1,1[, f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} d_n x^n$.

9. Montrer l'égalité (E).

Exercice 46 **(Centrale 2 PSI 2022)** *[Solution]*
On note $\mathcal{B}$ l'ensemble des fonctions bornées de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$.
Soit $q : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue, on dit qu'une fonction $y : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^+$ vérifie le problème $\mathcal{P}(q,a,b)$ si $\forall t \in \mathbb{R}^+, y''(t) + (1+q(t))y(t) = 0$, $y(0) = a$ et $y'(0) = b$.

1. Si $0 < u$, écrire une fonction `trace(a,b,u,q)` qui affiche le graphe d'une solution de $\mathcal{P}(q,a,b)$ sur l'intervalle $[0,u]$.

2. Tester cette fonction avec $q : t \mapsto -\dfrac{t^2}{1+t^2}$, $q : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t}}$ et $q : t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ avec différentes valeurs de (a, b) et conjecturer l'appartenance de la solution tracée à $\mathcal{B}$ dans chacun des cas.

3. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue et $z : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \sin(x-t) f(t)\,\mathrm{d}t$. Calculer $z'' + z$.

Soit $q : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue et y une solution de $\mathcal{P}(q, a, b)$ sur $\mathbb{R}^+$

4. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+, |y(x)| \leqslant |a| + |b| + \displaystyle\int_0^x |q(t)||y(t)|\,\mathrm{d}t$.

5. Qu'en déduire sur la fonction y si on suppose q intégrable sur $\mathbb{R}^+$?

Exercice 47 (Centrale 2 PSI 2022) *[Solution]*
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1} = u_n + u_n^2 \ln(u_n)$, pour $n \in \mathbb{N}$. On définit aussi F par $F(x) = \displaystyle\int_{1/2}^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2 \ln(t)}$

1. a) Calculer les 20 premiers termes de (u_n) ; que peut-on conjecturer ?
b) Montrer que (u_n) converge et préciser sa limite

2. a) Tracer le graphe de F sur $[0.05, 0.95]$
b) Justifier les variations de F est ses limites en 0 et 1

3. a) Tracer les points $M_n = (n, F(u_n))$ pour $n \in [\![0, 100]\!]$
b) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} F(u_{n+1}) - F(u_n)$
c) On admet le théorème de Cesaro : si (α_n) converge vers ℓ alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. En déduire un équivalent de $F(u_n)$.

4. a) Tracer le graphe de $x \mapsto x\ln(x)F(x)$ sur $[0.01, 0.5]$
b) Déterminer un équivalent de F en 0^+
c) Déterminer un équivalent de u_n.

Exercice 48 (Centrale 2 PSI 2022) *[Solution]*
Soient $a_0 \geqslant 0$ et $a_{n+1} = 1 - e^{-a_n}$ pour $n \geqslant 1$

1. a) Tracer $y = x$, $y = 1 - e^{-x}$ et les points $M_n = (a_n, a_{n+1})$ pour $n \in [\![0, 10]\!]$ et a_0 choisi dans $[0, 5]$
b) Faire des conjectures sur (a_n) puis les démontrer.

2. On note $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ et $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec $a_0 = 1$
a) Tracer le graphe de S_n pour plusieurs valeurs de n puis faire des conjectures sur le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ et les limites aux bornes de $]-R, R[$ de S
b) Déterminer le rayon de convergence de la série entière
c) Déterminer une valeur de n pour laquelle $S_n(1/2)$ est une valeur approchée de $S(1/2)$ à 10^{-5} près
d) Justifier que $S(-1)$ existe et en déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près

3. On pose $u_n = \dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n}$
a) Montrer que (u_n) converge
b) On admet que (u_n) et $\left(\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k\right)$ ont la même limite ; en déduire un équivalent de a_n
c) S est-elle définie en 1 ?

Exercice 49 (Centrale 2 PSI 2023) *[Solution]*
Une puce se déplace dans le plan : à l'instant initial elle est à l'origine puis l'instant n, elle se déplace, indépendamment des déplacements précédents, d'une case, soit vers la gauche, soir vers la droite, soit vers le haut, soit vers le bas, de façon équiprobable. On note (X_n, Y_n) la position de la puce à l'instant n, $(x_n, y_n) \in \{(-1, 0), (1, 0), (0, -1), (0, 1)\}$ le déplacement à l'instant n. On note également $u_n = x_n + y_n$, $v_n = x_n - y_n$, $U_n = X_n + Y_n$ et $V_n = X_n - Y_n$. Enfin, on note O_n la variable aléatoire discrète qui vaut 1 si la puce est à l'origine à l'instant $2n$ et 0 sinon.

1. a) Écrire une fonction `pos(n)` qui renvoie la position de la puce à l'instant n sous forme d'un tableau de 2 valeurs.
b) Écrire une fonction permettant de calculer $E(X_n)$, $E(|X_n|)$, $E(X_n^2)$ et $P(O_n = 1)$ pour $n \in \{50, 51, 100\}$ en faisant 10^3 expériences

2. a) Justifier que U_n est à valeurs dans $[\![-n, n]\!]$

b) Montrer que $\dfrac{1}{2}(U_n+n)$ et $\dfrac{1}{2}(V_n+n)$ suivent des lois binomiales dont on déterminera les paramètres

c) En déduire $E(X_n)$ et $E(X_n^2)$

3. Montrer que u_n et v_n sont indépendantes.

4. On note N la variable aléatoire discrète donnant le nombre de fois où la puce repasse à l'origine.

a) Exprimer N en fonction de O_n

b) Montrer que $P(N \geqslant n) = P(X \geqslant 1)^n$

c) N admet-elle une espérance finie ?

d) Quelle est la probabilité que la puce repasse une infinité de fois à l'origine ?

Exercice 50 **(Centrale 2 PSI 2023)** *[Solution]*

Pour $x \in]-1,1[$, on pose $f(x) = \dfrac{1}{(1-x^3)(1-x^5)}$

1. Montrer que f est DSE et déterminer une minoration de son rayon de convergence.

On notera $f(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} c_n x^n$

2. a) Écrire une fonction qui calcule la valeur de c_n.

b) Calculer c_n pour $n \in [\![0,199]\!]$ et c_{n+15} pour $n \in [\![0,184]\!]$

3. a) À l'aide de Python, vérifier que $(1-X^{15})(1-X)$ est divisible par $(1-X^3)(1-X^5)$.

b) Quel est le degré du quotient Q et que vaut $Q(1)$?

4. a) Montrer que la fonction $x \mapsto (1-x^{15})f(x) - \dfrac{1}{1-x}$ est polynômiale

b) En déduire une relation entre c_n et c_{n+15}

5. On note $d_n = \mathrm{Card}\{(u,v) \in \mathbb{N}^2, 3u+5v=n\}$

a) Écrire une fonction qui calcule d_n puis comparer d_n et c_n

b) Prouver la constatation précédente

Exercice 51 **(Centrale 2 PSI 2023)** *[Solution]*

Soit A une partie de $\mathbb{N}$, on pose $a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $f_A(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. On pose alors $\mathscr{A}$ l'ensemble des parties A de $\mathbb{N}$ pour lesquelles $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}(1-x)f_A(x)$ existe (et est finie). Pour $A \in \mathscr{A}$, on pose alors $P(A) = \displaystyle\lim_{x\to 1^-}(1-x)f_A(x)$

1. Donner une minoration du rayon de convergence R_A de f_A.

2. a) Montrer que $\emptyset$ et $\mathbb{N}$ sont dans $\mathscr{A}$ et calculer $P(\emptyset)$ et $P(\mathbb{N})$

b) Soient A, B dans $\mathscr{A}$ tels que $A \subset B$, montrer que $P(A) \leqslant P(B)$

c) Montrer, pour $A \in \mathscr{A}$, que $P(A) \in [0,1]$

3. a) Soient $A, B \in \mathscr{A}$ tels que $A \cap B = \emptyset$, montrer que $A \cup B \in \mathscr{A}$ et calculer $P(A \cup B)$

b) Pour $A \in \mathscr{A}$, montrer que $\overline{A} \in \mathscr{A}$ et calculer $P(\overline{A})$

4. a) Calculer $P(2\mathbb{N})$ et $P(3\mathbb{N}+5)$

b) Montrer qu'il existe $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{A}^{\mathbb{N}}$ tels que $P\left(\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \neq \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)$

c) Que peut-on en déduire sur P ?

5. Dans cette question on suppose $A = \{n^2, n \in \mathbb{N}\}$, l'ensemble des carrés.

a) Écrire une fonction qui calcule f_A

b) En déduire une conjecture sur la valeur de $P(A)$

c) Démontrer cette conjecture

6. ?

Exercice 52 **(Centrale 2 PSI 2023)** *[Solution]*

1. Rappeler le développement en séries entières de $x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^{3/2}}$ et déterminer un équivalent de ses coefficients a_n quand n tend vers $+\infty$.

On considère l'expérience aléatoire suivante : à l'instant $n=0$, une urne contient une boule blanche et une boule noire ; on effectue des tirages dans cette urne de la façon suivante :

— on tire une boule, on examine sa couleur et on la remet dans l'urne

— si la boule tirée était blanche, on rajoute une boule blanche et une boule noire dans l'urne
— si la boule tirée était noire, on rajoute deux boules noires dans l'urne

On note X_n le nombre de boules blanches dans l'urne à l'issue du $n^{\text{ème}}$ tirage et $p_{n,r,s}$ la probabilité qu'il y ait r boules blanches et s boules noires dans l'urne à l'issue du $n^{\text{ème}}$ tirage. Enfin , on pose

$$H(x,u,v) = \sum_{(n,r,s)\in\mathbb{N}^3} p_{n,r,s} x^n u^r v^s$$

et on admet que H est définie et continue sur un ouvert U de $\mathbb{R}^3$ tel que $(x,1,1) \in U$ pour $|x| < \dfrac{1}{2}$ et que les dérivées partielles de H par rapport à une de ses variables se calculent par dérivation terme à terme de la séries par rapport à cette même variable.

2. a) Écrire une fonction `f(n)` qui renvoie une liste `L` de longueur $n+1$ de sorte que `L[i]` soit le nombre de boules blanches dans l'urne à l'issue du $n^{\text{ème}}$ tirage. Tester cette fonction avec $n = 30$

b) Tracer le graphe du nombre moyen, pour 100 répétitions, de boules blanches dans l'urne en fonction de n ($n \in [\![0,30]\!]$) puis du carré du nombre moyen de boules blanches et émettre une conjecture.

3. Que valent $p_{n,r,s}$ si $r+s \neq 2n+2$ et $H(0,u,v)$?

4. Montrer que $\dfrac{\partial H}{\partial u}(x,1,1) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} E(X_n)x^n$

5. a) Montrer que, pour $n \geqslant 0$, $p_{n+1,r,s} = \dfrac{r-1}{2n+2}p_{n,r-1,s-1} + \dfrac{s-2}{2n+2}p_{n,r,s-2}$

b) En déduire que $\dfrac{\partial H}{\partial x}(x,u,v) = \dfrac{1}{2}\left(u^2 v\dfrac{\partial H}{\partial u}(x,u,v) + v^3\dfrac{\partial H}{\partial v}(x,u,v)\right)$

6. ?

Exercice 53 **(Centrale 2 PSI 2023)** *[Solution]*

Pour $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(x+n)^2} = \frac{1}{x^2} + \sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{(n+x)^2} + \frac{1}{(n-x)^2}\right)$

1. a) Vérifier que f est définie sur $D = \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$

b) Montrer que f est 1-périodique

c) Montrer que f est continue sur D

d) Tracer le graphe de f sur $[10.1, 10.9]$

2. On pose, pour $x \in D$, $g(x) = \dfrac{\pi^2}{\sin^2 \pi x} - f(x)$

a) Tracer le graphe de g et commenter

b) Montrer que g se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}$

c) Justifier que g est bornée sur $\mathbb{R}$

3. a) Tracer le graphe de $x \mapsto f\left(\dfrac{x}{2}\right) + f\left(\dfrac{1+x}{2}\right)$ et de $4f$ sur le même graphique. Commenter

b) Prouver la conjecture précédente

c) En déduire le résultat conjecturé en **2.a**

4. Calculer la valeur de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$

5. Montrer que $\sin(\pi x) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} x\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)$ pour $x \in \mathbb{R}$

Exercice 54 **(Centrale 2 PSI 2023)** *[Solution]*

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $A(n) = (a_{i,j})_{0\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que $a_{i,j} = \dfrac{\binom{n}{i}}{n-i+j+1}$. Pour $x, y \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$, on définit le produit scalaire $< x,y >_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\frac{x_i y_j}{i+j+1}$ et pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $u(P) : x \longmapsto \displaystyle\int_0^1 (x+t)^n P(t)\,\mathrm{d}t$

1. a) Écrire une fonction `mat(n)` qui renvoie la matrice $A(n)$.

On pourra utiliser `scipy.special.binom(n,p)` *qui renvoie* $\dbinom{n}{p}$

b) Afficher les matrices $A(n)$ pour $n \in \{2,3,\dots,8\}$; sont-elles diagonalisables ?

2. a) Écrire une fonction `prod_scal(x,y,n)` qui renvoie $< x,y >_n$

b) Les vecteurs propres des matrices $A(1)$ sont-ils orthogonaux pour le produit scalaire $<,>_1$? Même question pour $A(2)$ avec le produit scalaire $<,>_2$

3. a) Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$

b) Montrer que $A(n)$ est la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$

4. Montrer que u est un endomorphisme autoadjoint de $\mathbb{R}_n[X]$ pour le produit scalaire $(P|Q) = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$

En déduire une justification des constatations des questions **1.b** et **2.b**

5. ?

Exercice 55 **(Centrale 2 PSI 2023)** *[Solution]*

On dispose de n boules dont p sont blanches et $n-p$ sont rouges. On les répartit aléatoirement dans n boites, numérotées de 1 à n, alignées. On dit qu'il y a un changement de couleur à l'indice $i \in [\![0, n-1]\!]$ si les boites numéros i et $i+1$ contiennent des boules de couleurs différentes. On note N le nombre de changements de couleurs et X_i, la variable aléatoire discrète qui vaut 1 s'il y a un changement de couleur à l'indice i et 0 sinon.

1. a) Écrire une fonction `N(n,p)` qui renvoie le nombre de changement de couleur
on pourra utiliser la fonction `rd.permutation(L)` qui permute aléatoirement les éléments d'une liste `L`.

b) Donner une approximation de $E(N)$ pour $n = 24$ et différentes valeurs de p

2. a) Déterminer la loi de X_i

b) N suit-elle une loi binomiale ?

c) En déduire $E(N)$ et comparer avec les approximation précédentes.

3. a) Déterminer la loi de X_iX_j pour $i \neq j$

b) En déduire $V(N)$

c) Vérifier ce résultat à l'aide de Python

4. On note $A_{m,k} = \{(a_1, \dots, a_k) \in (\mathbb{N}^*)^k, a_1 + a_2 + \cdots + a_k = m\}$ et $B_{m,k} = \{(b_1, \dots, b_{k-1}) \in [\![1, m-1]\!], b_1 < b_2 < \cdots < b_{k-1}\}$.

a) Montrer que $A_{m,k}$ et $B_{m,k}$ sont en bijection

b) Déterminer $\mathrm{Card}(A_{m,k})$

c) ?

Solutions

Exercice 1 *[sujet]* **1.** Python

2. (u_n) décroît car $x \mapsto \arctan(x+1)-\arctan(x)$ décroît, $\lim u_n = \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2} = 0$ et $u_n = \arctan\left(\frac{1}{n}\right)-\arctan\left(\frac{1}{n}\times\frac{1}{1+1/n}\right)$ donc $u_n \sim \frac{1}{n^2}$

3. a) $0 \leqslant \varepsilon_n u_n \leqslant u_n$ et $\sum u_n$ CV (télescopage)

b) En sommant, on a $0 \leqslant S(\varepsilon) \leqslant \sum_{n\geqslant 0} u_n = \frac{\pi}{2}$ puis $S(0) = 0$ et $S(1) = \sum_{n\geqslant 0} u_n = \frac{\pi}{2}$.

c) $S(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_{2k+1}$ donc $0 \leqslant S(\varepsilon) - \sum_{k=0}^{n} u_{2k+1} \leqslant \sum_{k\geqslant 2n+3} u_k = \frac{\pi}{2} - \arctan(2n+3)$; on a donc une valeur approchée à 10^{-5} près dès que $\frac{\pi}{2} - \arctan(2n+3) \leqslant 10^{-5}$. Suite cf Python

d) Python : la suite semble converger vers x.

e) On vérifie $S_n(\varepsilon) \leqslant x \leqslant S_n(\varepsilon) + r_n$ avec $r_n = \sum_{k\geqslant n+1} u_k$. On a $S_n(\varepsilon) \leqslant x$ par construction de la suite (ε) ; l'autre côté se prouve par récurrence sur n : si $u_0 \leqslant x$ alors $S_0(\varepsilon) + r_0 = u_0 + r_0 = \frac{\pi}{2} \geqslant x$ et si $u_0 > x$ alors $x < u_0 = \frac{\pi}{4} = r_0$. Si on suppose $x \leqslant S_n(\varepsilon) + r_n$ et si $S_n(\varepsilon) + u_{n+1} \leqslant x$ alors $S_{n+1}(\varepsilon) + r_{n+1} = S_n(\varepsilon) + r_n \overset{\text{HR}}{\geqslant} x$; si $S_n(\varepsilon) + u_{n+1} > x$ alors $S_{n+1}(\varepsilon) + r_{n+1} = S_n(\varepsilon) + r_{n+1} > x - u_{n+1} + r_{n+1}$ puis on vérifie $r_{n+1} - u_{n+1} = \frac{\pi}{2} - 2\arctan(n+2) + \arctan(n+1) \geqslant 0$ en vérifiant que $x \mapsto 2\arctan(x+1) - \arctan(x)$ est croissante sur $[2, +\infty[$. Comme $\lim r_n = 0$, on a bien $\lim S_n(\varepsilon) = x$

Exercice 2 *[sujet]* **1.** Python

2. On a $\|C_j\|^2 = n$ donc $A \in H_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

3. Python

4. On a $\mathrm{Tr}(A) \in [\![-4, 4]\!]$ et $A^2 = 4I_4$ donc $\mathrm{Sp}(A) \subset \pm 2$ puis $\mathrm{Tr}(A) = 2m_2(A) - 2m_{-2}(A)$ ce qui laisse trois possibilités (tester les cas pour m_2 et m_{-2}) : $\mathrm{Tr}(A) \subset \{-4, 0, 4\}$. On trouve l'inclusion inverse avec $A = \mathrm{diag}(1, 1, -1, -1)$ pour $\mathrm{Tr}(A) = 0$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ pour $\mathrm{Tr}(A) = 4$ et son opposé pour $\mathrm{Tr}(A) = -4$ (on peut utiliser Python pour trouver cette matrice)

5. On raisonne de même : $\mathrm{Tr}(A) \in [\![-8, 8]\!]$ et $A^2 = 8I_8$ donc $\mathrm{Sp}(A) \subset \{\pm 2\sqrt{2}\}$; on a alors $\mathrm{Tr}(A) = 2\sqrt{2}(m_{2\sqrt{2}}(A) - m_{-2\sqrt{2}}(A))$ et comme $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, cela impose $m_{2\sqrt{2}}(A) = m_{-2\sqrt{2}}(A)$ donc $\mathrm{Tr}(A) = 0$. Réciproquement, on a bien $\mathrm{Tr}(A) = 0$ avec $A = \mathrm{diag}(1, 1, 1, 1, -1, -1, -1, -1)$.

Exercice 3 *[sujet]* **1.** Si $|x| < 1$, $f_n(x) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc AC et DVG si $|x| \geqslant 1$

2. Python

3. $0 \leqslant f\left(\frac{1}{2}\right) - \sum_{k=-n}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{k^2} \leqslant 2\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n-1}}$ car $k^2 \geqslant k$; il suffit donc que $\frac{1}{2^{n-1}} \leqslant 10^{-5}$. Suite Python

4. Python

5. A partir de $f(x) = 1 + 2\sum_{n\geqslant 1} x^{n^2}$ et par comparaison intégrale ($t \mapsto x^{t^2}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$), on trouve $f(x) \underset{x\to 1}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{-\ln x}} \sim \sqrt{\frac{\pi}{1-x}}$.

6. Python

7. Comme $n^2 = 0^2 + n^2$, on a $r_2(n^2) \geqslant 1$ et $(r_2(n))$ ne tend pas vers 0 puis $R \leqslant 1$; par contre si $n = k^2 + h^2$ alors $|h| \leqslant n$ et $|k| \leqslant n$ donc $r_2(n) \leqslant (2n+1)^2$ et $R \geqslant 1$ donc $R = 1$.

8. On écrit $f(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ avec $a_0 = 1$, $a_n = 2$ si $n \geqslant 1$ est un carré et $a_n = 0$ sinon. Par produit de Cauchy, $f(x)^2 = \sum_{n\geqslant 0} c_n x^n$ avec $c_0 = 1$ et $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$; $a_k a_{n-k} = 0$ sauf si n et $n-k$ sont des carrés donc si n est somme de 2 carrés. On trouve donc $f(x)^2 = h(x)$ puis $h(x) \underset{x\to 1}{\sim} \frac{\pi}{1-x}$

Exercice 4 *[sujet]* **1.** a) Python

b) Python ; semble converger vers I_4

c) cf cas génaral après

2. a) Si $A^2X=0$ alors $\|AX\|^2=(AX|AX)={}^tX\,{}^tAAX=-{}^tXA^2X=0$

b) On a $(A^2X|X)={}^tXA^2X=-\|AX\|^2$ donc $\mathrm{Sp}(A^2)\subset\mathbb{R}^-$ et si $\lambda\in\mathrm{Sp}(A)$ alors $\lambda^2\in\mathrm{Sp}(A^2)$ donc $\lambda\in i\mathbb{R}$

c) A et ${}^tA=-A$ commutent donc $N_n=\left(I_n-\dfrac{1}{n^2}A^2\right)^n$; A^2 est symétrique réelle donc diagonalisable ($A^2=PDP^{-1}$) puis $N_n=P\mathrm{diag}\left(1-\dfrac{1}{n^2}\lambda_i\right)^nP^{-1}$. De plus $\left(1-\dfrac{1}{n^2}\lambda\right)^n=\exp n\ln\left(1-\dfrac{\lambda}{n^2}\right)=\exp n\left(-\dfrac{\lambda}{n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)\to 1$ donc par continuité de $M\mapsto PMP^{-1}$n on $N_n\to I_n$.

d) On montre que A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$: A^2 est diagonalisable (dans $\mathbb{R}$ donc dans $\mathbb{C}$) donc $\displaystyle\prod_{i=1}^r(X-\lambda_i)$ est annulteur SARS de A^2 (λ_i les vp distinctes de A^2) ; si $\lambda_i=\mu_i^2$ (possible dans $\mathbb{C}$) alors $\displaystyle\prod_{i=1}^r(X-\mu_i)(X+\mu_i)$ est annulateur de A ; il est SARS sauf s'il existe i tel que $\lambda_i=0$. Si c'est le cas, on suppose $\lambda_1=0$ et on a $A^2\displaystyle\prod_{i=2}^r(A-\mu_iI_n)(A+\mu_iI_n)=0$ donc $\mathrm{Im}\displaystyle\prod_{i=2}^r(A-\mu_iI_n)(A+\mu_iI_n)\subset\ker(A^2)=\ker(A)$. On en déduit $A\displaystyle\prod_{i=2}^r(A-\mu_iI_n)(+\mu_iI_n)=0$ donc on a encore un polynôme annulateur SARS et A est DZ dans $\mathbb{C}$.

On en déduit $M_n=Q\mathrm{diag}\left(1+\dfrac{ib_k}{n}\right)^nQ^{-1}$ (les vp sont dans $i\mathbb{R}$) ; $1+\dfrac{ib}{n}=\sqrt{1+\dfrac{b^2}{n^2}}e^{i\arctan\frac{b}{n}}$ donc (passer par l'exp) $\left(1+\dfrac{ib}{n}\right)^n\to e^{ib}$. On en déduit que (M_n) converge vers une matrice qui est réelle puisque M_n l'est et comme N_n converge vers I_n, la limite de (M_n) est une matrice orthogonale.

Exercice 5 *[sujet]* **1.** a) Python

b) Python

c) La probabilité de faire un seul pile à un tirage est (binomiale) $\dfrac{n}{2^n}$ donc qu'il y ait un vainqueur à une partie $p_n=2\dfrac{n}{2^n}=\dfrac{n}{2^{n-1}}$. X_n est le temps d'attente donc $X_n\hookrightarrow\mathscr{G}(p_n)$, $E(X_n)=\dfrac{2^{n-1}}{n}$ et $V(X_n)=\dfrac{1-p_n}{p_n^2}$

d) Python

2. a) $Y_n\hookrightarrow\mathscr{B}(N,p_n)$ donc on veut $Np_n\leqslant 1$ donc $N=\left\lfloor\dfrac{2^{n-1}}{n}\right\rfloor$

b) Avec $N=U_n$, $P(Y_n\leqslant 2)=P(Y_n=0)+P(Y_n=1)+P(Y_n=2)=(1-p_n)^N+Np_n(1-p_n)^{N-1}+\dfrac{N(N-1)}{2}p_n^2(1-p_n)^{N-2}$ comme $Np_n\to 1$ et $(1-p_n)^{N-2}=\exp(N-2)\ln(1-p_n)\to e^{-1}$, on trouve (factoriser) $P(Y_n\leqslant 2)\to\dfrac{5}{2e}$

Exercice 6 *[sujet]* **1.** a) Python

b) Python

c) Python et il semble que $a_n=b_n$.

$b_n=\displaystyle\sum_{k=0}^n(-1)^k\frac{n!}{k!}$ est entier et avec Taylor appliqué à exp sur $[-1,0]$, $e^{-1}=\displaystyle\sum_{k=0}^n\frac{(-1)^k}{k!}+\int_0^{-1}\frac{(-1-t)^n}{n!}e^t\,\mathrm{d}t$ donc $|n!e^{-1}-b_n|<\displaystyle\int_{-1}^0(1+t)^n\,\mathrm{d}t=\frac{1}{n+1}\leqslant\frac{1}{2}$ donc b_n est l'entier le plus proche de $n!e^{-1}$, ie $a_n=b_n$.

2. a) Python

b) Python : il semble que $J_n=(-1)^{n+1}ed_n$. Par IPP, on a $J_n=e-nJ_{n-1}$, même relation pour $(-1)^{n+1}ed_n$ et même valeur pour $n=0$ donc elles sont égales.

3. Python

4. On pose $u=x^n$ dans J_n : $nJ_n=\displaystyle\int_0^1u^{1/n}e^{u^{1/n}}\,\mathrm{d}u\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_0^1e\,\mathrm{d}u=e$ par TCD avec $|u^{1/n}e^{u^{1/n}}|\leqslant e$ qui est intégrable sur $[0,1]$. On en déduit $d_n\sim\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$

Exercice 7 *[sujet]* **1.** a) Python

b) Python ; elle semble converger

c) La série converge en $\frac{1}{4}$ donc $R \geqslant \frac{1}{4}$

2. a) Python

b) Par récurrence (forte) $|b_n| \leqslant a_n$

c) $R' \geqslant R > 0$

d) On pose $b_0 = 0$ pour pouvoir appliquer le cours sur les produits de Cauchy) : on a, si $|x| < R'$, $f(x)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} b_k b_{n-k} \right)^x = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n-1} b_k b_{n-k} \right) x^n = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{-2(n-1)}{n} b_n x^n$; reste à dériver terme à terme pour trouver l'équation différentielle (on peut faire commencer cette somme à $n = 1$ aussi)

3. Il semble que $g(x) = B(x)e^{B(x)} = x$; on vérifie par $g'(x) = B'(x)(1 + B(x))e^{B(x)}$ donc $xg'(x) = B(x)e^{B(x)} = g(x)$ puis $g(x) = \alpha x$ et comme $g'(0) = B'(0) = 1$, on a $g(x) = x$.

Exercice 8 *[sujet]* **1.** Python

2. Python

3. Python

4. On a $|\phi'| \leqslant 9$ donc (IAF) ϕ est 9-lipschitzienne.

5. réccurence sur n en vérifiant $\sin(x) = \phi\left(\sin \frac{x}{3}\right)$ (linéariser $\sin^3 \theta$).

6. Avec un DL du sin, on trouve $\frac{x}{3^n} - \sin\left(\frac{x}{3^n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x^3}{6 \times 3^{3n}}$ donc (f_n) CS vers sin sur $\mathbb{R}$.

Comme $0 \leqslant x - \sin(x) \leqslant \frac{x^3}{6}$ (étude de fonctions), on a $|f_n(x) - \sin(x)| \leqslant \frac{x^3}{6 \times 3^n}$ ce qui prouve aussi la CU sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Il n'y a pas CU sur $\mathbb{R}$ car f_n est un polynôme donc $\sin - f_n$ n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9 *[sujet]* **1.** Python

2. Python ; $\det(M_n) = 1$

3. Python

4. Python $M_n = {}^tT_nT_n$

5. On commence par $M_n = {}^tT_nT_n$ (produit matriciel) puis $\det(M_n) = \det(T_n)^2 = 1$.

6. M_n est symétrique réelle et $M_n = {}^tT_nT_n$ avec T_n inversible donc $\mathrm{Sp}(M_n) \subset \mathbb{R}^{+*}$ (fait en cours)

7. $\mathrm{Tr}(M_n) = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \leqslant n\lambda_n$.

8. On vérifie $T_n = \sum_{k=0}^{n-1} N^k$ et comme $N^n = 0$, on a $(I_n - N)T_n = I_n$ (l'idée vient de la valeur de $\sum_{k=0}^{n-1} q^k$) donc $T_n^{-1} = I_n - N$ puis $M_n^{-1} = (I_n - N)(I_n - {}^tN)$ et $(M_n^{-1}X|X) = \|(I_n - {}^tN)X\|^2 \leqslant (\|X\| + \|{}^tNX\|)^2$ et comme $\|{}^tNX\|^2 = \sum_{i=2}^{n} x_i^2 \leqslant \|X\|^2$, on trouve $(M_n^{-1}X|X) \leqslant 4\|X\|^2$ donc $\mathrm{Sp}(M_n^{-1}) \in]0, 4]$; dans $\mathbb{R}^{+*}$ car inversible.

Exercice 10 *[sujet]* **1.** $x(t) = \frac{a}{\omega} \sin(\omega t)$

2. Python

3. a) On pose $f(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - r^2 \sin^2(\omega t)}}$; f est continue sur $\mathbb{R}$ donc F est la primitive de f nulle en 0 donc $F' = f > 0$; F est impaire car f est paire (poser $v = -u$) et comme $f \geqslant 1$, on a $F(t) \geqslant t$ donc $\lim_{+\infty} F = +\infty$. Le théorème de bijection donne le reste.

b) $F' = f$ est $\mathcal{C}^\infty$ et comme $F' = f$ ne s'annule pas F^{-1} est $\mathcal{C}^\infty$ aussi et $(F^{-1})' = \frac{1}{F' \circ F^{-1}}$.

c) Python

4. a) Python

b) Faire les calculs avec la valeur de $(F^{-1})'$ précédente (et en simplifiant φ' avant de redériver)

Exercice 11 *[sujet]* **1.** Si on tire une boule blanche on passe à l'état $n - 1$, si elle est noire à l'état $n + 1$

2. Python

3. Python

4. a) Si A est « tirer une boule blanche au premier tirage » alors $e_j = P_A(E_j)P(A) + P_{\overline{A}}(E_j)P(\overline{A})$; $P(A) = \dfrac{j}{2j+2}$ et $P_A(E_j) = e_{j-1}$ puisque cela revient à commencer le jeu avec un état $j-1$ (idem pour l'autre).

b) On vérifie que $e_{j+1} - e_j$ et $e_j - e_{j-1}$ sont de même signe donc (rec) (e_j) est monotone, bornée (dans $[0,1]$) donc converge.

c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

d) $\mathcal{X}_A = (X-1)^2$ et $\dim(E_1(A)) = 1$ donc A n'est pas DZ. Avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ on a la TZ souhaitée. On calcule A^j et on termine sur $e_j = \dfrac{\alpha j + \beta}{j+1} \to \alpha$ et on peut vérifier que $\alpha \neq 0$ (les 2 constantes ne sont pas faciles à trouver car $e_0 = 1$ mais c'est la seule valeur de e_j, donc de u_j, facile à calculer)

Exercice 12 *[sujet]* **1.** Python

2. Python : la première converge vers 0, la seconde semble diverger assez vite

3. Si $u_N < 1$ alors (rec) $u_n < 1$ pour $n \geqslant N$ donc u_n^2 est bornée à partir du rang N donc u_{n+1} tend vers 0. Les deux autres implications sont évidentes

4. $w_n = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum w_n$ CV

$0 \leqslant \delta - S_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} w_k \leqslant \frac{1}{4} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{k}{2^{k-1}}$. Si $|x| < 1$ alors $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} kx^{k-1} = f'(x)$ avec $f(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k = \frac{x^{n+1}}{1-x}$ d'où la majoration utilisée dans le code.

5. a) $v_{n+1}(x) - v_n(x) = -\dfrac{w_n}{2}$ donc $v_n - v_0 = -\dfrac{1}{2} S_n$ et $u_n = \left(\dfrac{x}{S_n}\right)^{2^n}$.

Si $x < e^{\delta}$ alors $\dfrac{x}{S_n} \leqslant k < 1$ (à partir d'un certain rang au moins) donc $0 \leqslant u_n \leqslant k^{2^n}$ donc (u_n) tend vers 0

Si $x > e^{\delta}$ alors $\dfrac{x}{S_n} \geqslant k' > 1$ à partir d'un certain rang et, par minoration cette fois, (u_n) tend vers $+\infty$.

Exercice 13 *[sujet]* **1.** Python

2. Par récurrence : on trouve $P_0 = 1$ et $P_{n+1} = (1 - 2nX)P_n + X^2 P_n'$

3. Python

4. On a $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} f^{(n)}(x) = 0 = f_g^{(n)}(0)$ donc f est $\mathcal{C}^\infty$ mais pas DSE car sinon on aurait $f(x) = \displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)x^n = 0$ sur $]-R, R[$, ce qui est faux à droite de 0.

5. $g(x) = e^{-\frac{1}{x} - \frac{1}{1-x}}$ est croissante sur $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ et son graphe est symétrique par rapport à $x = \dfrac{1}{2}$, on peut donc encadrer α par la méthode des rectangles (selon que l'on construit le rectangle de base $\left[\dfrac{k}{2n}, \dfrac{k+1}{2n}\right]$ avec la hauteur $g\left(\dfrac{k}{2n}\right)$ ou $g\left(\dfrac{k+1}{2n}\right)$) puis cf Python

6. On remarque que h est $\mathcal{C}^\infty$, nulle sur $\mathbb{R}^-$ et constante égale à 1 sur $[1, +\infty[$. Il suffit donc de prendre $\varphi(x) = h(2x+2) \times h(2-2x)$

7. $\varphi^{(n)}$ est nulle hors de $[-1, 1]$ et est continue donc bornée sur ce segment.

Exercice 14 *[sujet]* **1.** Python

2. Python

3. Python ; (S_n) semble converger si et seulement si $\sum a_n$ DV

4. Par récurrence puis $\ln(u_n) \sum \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(1 + a_k)$ avec $\lim a_k = 0$ (car $\sum a_n$ CV) donc $\ln(1 + a_n) \sim a_n$ (positif) et $\sum \ln(1 + a_n)$ CV donc $\ln(u_n)$ puis (u_n) sont majorée, ce qui donne la DVG de $\sum \dfrac{(-1)^n}{u_n u_{n-1}}$

5. $u_{n-1}(u_n - u_{n-2}) = a_n u_{n-1}^2$ donc SATP ; de plus (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont croissantes donc (u_n) est minorée (par $C > 0$), on a alors $u_{n-1}(u_n - u_{n-2}) \geqslant Ca_n$ donc $\sum u_{n-1}(u_n - u_{n-2})$ DVG donc (SATP) la somme partielle tend vers $+\infty$. Enfin $u_{n-1}(u_n - u_{n-2})) = u_n u_{n-1} - u_{n-1} u_{n-2}$ donc par télescopage, $u_n u_{n-1} \to +\infty$ et croît ; on en déduit la CV de $\sum \dfrac{(-1)^n}{u_n u_{n-1}}$ par CSSA

Exercice 15 *[sujet]* **1.** Si $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$ alors $M = \dfrac{1}{1+a^2}\begin{pmatrix} a^2-1 & -2a \\ 2a & a^2-1 \end{pmatrix}$

2. M est orthogonale et $\det(M) = +1$

3. $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 12 \\ 4 & 0 & -3 \\ -12 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

4. Python : on vérifie que N est une rotation. $f_a(a) = 0$ donc $a \pm f_a(a) = a$ ce qui donne $r(a) = a$, a dirige l'axe ; pour l'angle on utilise $\mathrm{Tr}(N) = 1 + 2\cos\theta$ et $\sin\theta$ du signe de $[a, e_2, r(e_2)]$ ...

5. Python ; encore une matrice de rotation

6. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique alors $M = (I_n - A)^{-1}(I_n + A)$ est une rotation.

7. Si $AX = X$ alors $\|X\|^2 = {}^tXX = {}^t(AX)X = -{}^tXAX = -{}^tXX = -\|X\|^2$ donc $\ker(A - I_n) = \{0\}$ et M existe bien. Ensuite, avec ${}^tA = -A$, on a ${}^tM = (I_n - A)(I_n + A)^{-1}$ puis $(I_n - A)$ et $(I_n + A)$ commutent donc on vérifie ${}^tMM = I_n$. Reste le signe de $\det(M)$: on vérifie que $MX = -X$ donne $X = 0$ donc la seule valeur propre réelle est $+1$, les valeurs propres complexes non réelles étant conjuguées deux à deux avec le même ordre de multiplicité (et comme $z\overline{z} = |z|^2 \geqslant 0$), on a bien $\det(M) \geqslant 0$.

Exercice 16 *[sujet]* **1.** Python

2. Python puis $\mathcal{X}_{U1} = X^2(X-1)$ avec $\mathrm{rg}(U1) = 1$ donc U est DZ alors que $\mathcal{X}_{V1} = X^3$ et $\mathrm{rg}(V1) = 1$ donc V n'est pas DZ

3. $\mathcal{X}_{W(a)} = \det(\lambda I_3 - (U1 + aV1)) = X^2(X-1)$ donc $W(a)$ est DZ si et seulement si $\mathrm{rg}(U1 + aV1) = 1$ donc si et seulement si $a = 0$

4. Elles sont symétriques réelles

5. Fait en cours

6. Fait en cours puis $\dim(\ker({}^tMM)) = \dim(\ker(M)) = n - \mathrm{rg}(M) = n - \mathrm{rg}({}^tM) = \dim(\ker({}^tM)) = \dim(\ker(M\,{}^tM))$

7. La réciproque est $X \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}\,{}^tMX$ et $\|f_\lambda(X)\|^2 = \dfrac{1}{\lambda}(MX|MX) = \dfrac{1}{\lambda}\,{}^tX\,{}^tMMX = \dfrac{1}{\lambda}\,{}^tX(\lambda X) = \|X\|^2$ donc isométrie.

8. On en déduit que si $\mathcal{B}_\lambda$ est une bon de F_λ alors $f_\lambda(\mathcal{B}_\lambda)$ est une bon de G_λ. Comme $\dim(\ker({}^tMM)) = \dim(\ker(M\,{}^tM))$, on peut aussi trouver une isométrie qui envoie une bon de F_0 sur une bon de G_0. En recollant ces bases, on construit donc une isométrie de E qui envoie une bon de vecteurs propres de ${}^tMM$ sur une bon de vecteurs propres de $M\,{}^tM$.

Exercice 17 *[sujet]* **1.** Python

2. Paire (évident avec des exposants pairs car $k \geqslant 1$), décroissante sur $[0,1]$ (évident car $x \mapsto x^{2^k}$ est croissante sur $[0,1]$) et semble CVS

3. $\theta_{n+1}(x) = \theta_n(x)\left(1 - x^{2^{n+1}}\right) \leqslant \theta_n(x)$; $(\theta_n(x))$ est décroissante et minorée par 0 donc CV. Comme $\theta_n(x) = (1 - x^2)\theta_{n-1}(x^2)$, on a l'équation fonctionnelle en faisant tendre n vers ∞. Reste la continuité de θ : $\ln\theta(x) = \sum\limits_{n\geqslant 1} u_n(x)$ avec $\|u_n\|_{\infty,[-a,a]} = -\ln(1 - a^{2^n})$ on a donc CN sur tout segment de $]-1,1[$ donc $\ln\circ\theta$ puis θ est continue sur $]-1,1[$.

4. Par récurrence, on a $f(x) = \theta_n(x) f\left(x^{2^{n+1}}\right)$ et par continuité de f en 0, on a $f\left(x^{2^{n+1}}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(0)$ donc $f = f(0)\theta$; la réciproque a été faite juste avant.

5. On a $a_0 = \theta(0) = 1$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^{2n} = (1 - x^2)\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^{4n} = \sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^{4n} - \sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^{4n+2}$, on en déduit $a_{2n} = a_n$ et $a_{2n+1} = -a_n$ par unicité des coefficients d'un DSE

6. Python

7. Avec la suite (a_n) définie par les relations précédentes, on vérifie que $|a_n| = 1$ et $\theta_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{2^{n+1}-1} a_k x^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum\limits_{k\geqslant 0} a_k x^k$ puisque cette série est ACV sur $]-1,1[$ (avec $|a_n x^n| \leqslant |x|^n$)

Exercice 18 *[sujet]* **1.** Python

2. Python

3. Au vue de ce qui est demandé ensuite, on peut juste voir que la probabilité de ne garder qu'une seule blanche (donc de ne tirer que des rouges) tend vers 0

4. On a au plus $n+1$ boules rouges (ou noires) après le $n^{\text{ème}}$ tirage (et $n+2$ boules dans l'urne) donc (probas totales) $P(X_{n+1}=i,Y_{n+1}=j)=\sum_{1\leqslant h,k\leqslant n+1} P(X_{n+1}=i,Y_{n+1}=j|X_n=k,Y_n=h)P(X_n=k,Y_n=h)$ puis $P(X_{n+1}=i,Y_{n+1}=j|X_n=k,Y_n=h)=\begin{cases}\dfrac{j-1}{n+2} & \text{si } k=i \text{ et } h=j-1\\ \dfrac{i-1}{n+2} & \text{si } k=i-1 \text{ et } h=j\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$ On en déduit la relation demandée : $P(X_{n+1}=i,Y_{n+1}=j)=\dfrac{1}{n+2}((i-1)P(X_n=i-1,Y_n=j)+(j-1)P(X_n=i,Y_n=j-1))$

5. P_n est une somme finie donc $u^2\dfrac{\partial P_n}{\partial u}(u,v)+v^2\dfrac{\partial P_n}{\partial v}(u,v)=\sum_{i,j\geqslant 1} iP(X_n=i,Y_n=j)u^{i+1}v^j+\sum_{i,j\geqslant 1} jP(X_n=i,Y_n=j)u^iv^{j+1}=\sum_{k,j\geqslant 1}(k-1)P(X_n=k-1,Y_n=j)u^kv^j+\sum_{i,h\geqslant 1}(h-1)P(X_n=i,Y_n=h-1)$ (les termes $k=h=1$ rajoutés dans chaque somme sont nuls). On en déduit la relation avec la question précédente.

6. Une récurrence sur n (avec des changements d'indices)

7. On remarque que $G_{X_n}(u)=P_n(u,1)$ donc $G_{X_n}(u)=\dfrac{u(1-u^{n+1})}{(n+1)(1-u}$, $P(X_n=k)=\dfrac{1}{n+1}$ et $E(X_n)=\dfrac{n+2}{2}$

8. $(X_n=n+1)$ est « ne tirer que des boules rouges jusqu'au $n^{\text{ème}}$ tirage » donc pas continuité décroissante la probabilité de ne tirer que des boules rouges est $\lim_{n\to+\infty} P(X_n=n+1)=0$

Exercice 19 *[sujet]* **1.** Python

2. Python : $P(A)=0$ et $P=\mathcal{X}_A$ (à comprendre en lisant la suite)

3. En trigonalisant A

4. On fait un DL (n est fixé) : $\sum_{j=1}^{n}\dfrac{1}{1-\lambda_j x}=n+S_1x+S_2x^2+\cdots+S_nx^n+o(x^n)$ puis on identifie (par unicité des coeff d'un DL) le coeff de X^p dans $n+\sum_{k=1}^{n}(n-k)x^k=(1+\sum_{k=1}^{n}b_kx^k)(n+S_1x+S_2x^2+\cdots+S_nx^n+o(x^n))$, on trouve $(n-p)b_p=nb_p+b_{p-1}S_1+\cdots+b_1S_{p-1}+S_p$

5. On a $b_1=-S_1=-\operatorname{Tr}(A)$ puis $b_p=-\dfrac{1}{p}\operatorname{Tr}(A^p+b_1A^{p-1}+\cdots+b_{p-1}A)=-\dfrac{1}{p}\operatorname{Tr}(A_p)$ si on pose $A_p=A(A_{p-1}+b_{p-1}I_n)$

6. On vient de le faire

7. Partir de $\dfrac{\mathcal{X}_A'(x)}{\mathcal{X}_A(x)}=\sum_{j=1}^{n}\dfrac{1}{x-\lambda_j}$ valable pour $x\notin\operatorname{Sp}(A)$ et utiliser cette égalité en $\dfrac{1}{x}$ qui ne sera plus dans $\operatorname{Sp}(A)$ si x est suffisamment petit.

Exercice 20 *[sujet]* **1.** Python

2. Python

3. Python

4. Il faut au moins N duel pour voir un vainqueur. E_N est « ni A_0 ni A_1 ne gagne N duels » ; la probabilité que A_0 gagne N duels est pq^{N-1} (A_0 gagne le premier duel avec la probabilité p, les suivant avec la probabilité q), pour A_1 c'est q^N donc $P(E_N)=1-pq^{N-1}-q^N=1-q^{N-1}$.

5. $E_n\subset E_{n-1}$ donc $P(E_{n-1})-P(E_n)=P(E_{n-1}\setminus E_n)$ puis $E_{n-1}\setminus E_{n-1}$ est « un joueur gagne au duel n », ce ne peut donc être que A_{n-N}, qui gagnera s'il joue puis gagne N duels (la probabilité qu'il gagne le premier est p, les suivant q) donc $P(E_{n-1}\setminus E_n)=pq^{N-1}P(E_{n-N})$

6. $(P(E_n))$ est décroissante et minorée par 0 donc CV puis par télescopage (avec la question précédente), $\sum P(E_n)$ CV

7. $\sum P(E_n)$ CV donc $\lim P(E_n)=0$ puis en sommant la relation de la question précédente, on trouve $pq^{N-1}\sum_{n\geqslant 1}P(E_n)=P(E_N)-\lim P(E_n)$ donc $\sum_{n\geqslant 1}P(E_n)=\dfrac{1-q^{N-1}}{pq^{N-1}}$

8. $E_n=(T_{N,p}\geqslant n+1)$ donc $T_{N,p}$ admet une espérance et $E(T_{N,p})=\sum_{n\geqslant 1}P(T_{N,p}\geqslant n)=1+\sum_{n\geqslant 1}P(E_n)$ car $P(T_{N,p}\geqslant 1)=1$

Exercice 21 *[sujet]* **1.** a) Python

b) Python

c) $g : (x, y) \mapsto P(x) - Q(y)$ est continue donc Γ est fermée. Pour $|x| > 3$, on a $P(x) \geqslant 0$ et il existe $C > 0$ tel que $|y| > C \Rightarrow Q(y) < 0$, on a donc $\Gamma \subset [-3, 3] \times [-C, C]$ (bornée)

d) Elles sont horizontales car $P = X^2(X-2)(X+3)$ donc $P(0) = 0$ et $Q(y) = 0$ admet deux solutions réelles ; on a donc deux points d'intersection avec $x = 0$. Comme 0 est racine double de P, en ces points, on a $\nabla g(0, y) = (P'(0), -Q'(y)) = (0, -Q'(y))$ est un vecteur vertical (car $Q'(y) \neq 0$ lorsque $Q(y) = 0$, les racines de Q sont simples)

2. a) f est continue sur Γ, fermée bornée non vide

b) On décrit Γ par $(x, y) = (x(t), y(t))$, $t \in I$; on a alors $\varphi(t) = f(x(t), y(t)) = x(t)^2 + y(t)^2$ donc f est maximale sur Γ lorsque φ est maximale sur I donc $\varphi'(t) = 2x'(t)x(t) + 2y'(t)y(t)$ s'annule en t_0 tel que $(x_0, y_0) = (x(t_0), y(t_0))$. On a donc $\begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$. Comme le paramétrage est régulier, $\begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix}$ dirige la tangente à Γ en (x_0, y_0), elle est donc normale à $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$.

Exercice 22 *[sujet]* **1.** $t \mapsto g(x, t) = \dfrac{1-t}{1-xt^3}$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $[0, 1]$ si $x \in [-1, 1[$ et $\mathcal{CM}^0$ sur $[0, 1[$ si $x = 1$ avec $\dfrac{1-t}{1-t^3} = \dfrac{1}{1+t+t^2} \xrightarrow[t \to 1]{} \dfrac{1}{3}$ puis Python

2. $|g(x, t)| = g(x, t) \leqslant \dfrac{1-t}{1-t^3} = \dfrac{1}{1+t+t^2}$ donne la domination

3. Python, semble converger (vers F) ; par TITT avec $g(x, t) = (1-t) \sum_{n \geqslant 0} x^n t^{3n}$ pour $x \in [-1, 1]$ et $t \in [0, 1[$; on termine avec (H4) $\displaystyle\int_0^1 (1-t)x^n t^{3n}| \,\mathrm{d}t = x^n \left(\frac{1}{3n+1} - \frac{1}{3n+2} \right) = \frac{x^n}{(3n+1)(3n+2)} \leqslant \frac{1}{9n^2}$

4. l'égalité précédente était valable avec $x \in [-1, 1]$ donc il suffit de prendre $x = \pm 1$ et de calculer les intégrales $F(1)$ et $F(-1)$

5. Utiliser, pour $x \in [a, b] \subset [-1, 1[$, $\left| \dfrac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| = \dfrac{3t^2(1-t)}{(1-xt^3)^2} \leqslant \dfrac{3t^2(1-t)}{(1-bt^3)^2}$ qui est $\mathcal{CM}^0$ sur $[0, 1]$ car $b < 1$.

Exercice 23 *[sujet]* **1.** Python

2. Python et loi faible des grands nombres

3. Python

4. $T_i \hookrightarrow \mathscr{G}\left(\dfrac{1}{2}\right)$

5. $(N_n \leqslant k) = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} (T_i \leqslant k)$ donc (les T_i sont mutuellement indépendantes) $P(N_n \leqslant k) = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^i} \right)^n = \left(1 - \dfrac{1}{2^k} \right)^n$

6. $P(N_n > k) = 1 - P(N_n \leqslant k) = 1 - \left(1 - \dfrac{1}{2^k} \right)^n \underset{k \to +\infty}{\sim} \dfrac{n}{2^k}$ (positif) donc la série CV

7. C'est la preuve de la prop IV.2 du cours variables aléatoires discrètes

8. On a $1 - \left(1 - \dfrac{1}{2^k} \right)^n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{i+1} \frac{1}{2^{ki}}$ (somme finie) donc, en échangeant les sommes sur i et k, on obtient $E(N_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{i+1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{ki}} = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{i+1} \frac{2^i}{2^i - 1}$

Exercice 24 *[sujet]* **1.** Python

2. a) On a $Z_{k+1} = i$ si on a $Z_k = i$ et si la $k+1^{\text{ème}}$ carte n'est pas nouvelle (proba $\dfrac{i}{n}$) ou si $Z_k = i-1$ et si la $k+1^{\text{ème}}$ carte est nouvelle (proba $\dfrac{n-i+1}{n}$) donc $P(Z_{k+1} = i) = \dfrac{i}{n} P(Z_k = i) + \dfrac{n-i+1}{n} P(Z_k = i-1)$ si $i \geqslant 1$. On a donc $P_{k+1} = P(Z_{k+1} = 0) + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n} P(Z_k = i) + \frac{n-i+1}{n} P(Z_k = i-1) \right) X^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} \frac{i}{n} P(Z_k = i) X^{n-i} + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n-j}{n} P(Z_k = j) X^{n-j-1} = \sum_{i=0}^{n} \frac{(i-n)+n}{n} P(Z_k = i) X^{n-i} + \sum_{j=0}^{n} \frac{n-j}{n} P(Z_k = j) X^{n-j-1} = -\frac{X}{n} P_k'(X) + P_k(X) + \frac{1}{n} P_k'(X)$.

b) $P_k'(1) = \sum_{i=0}^{n}(n-i)P(Z_k = i) = n - E(Z_k)$

c) En dérivant l'égalité trouvée en **2.a** puis en $X = 1$, on obtient $P_{k+1}'(1) = P_k'(1) - \frac{1}{n}P_k'(1)$ donc $P_k'(1) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-1} P_1'(1)$ et $P_1 = X^{n-1}$ donc $E(Z_k) = n - \frac{(n-1)^k}{n^{k-1}}$

3. a) Python

b) $T_{k+1} - T_k \hookrightarrow \mathscr{G}\left(\frac{n-k}{n}\right)$ (temps d'attente d'une nouvelle carte quand on en a déjà k)

c) $T_k = \sum_{i=0}^{k-1}(T_{i+1} - T_i)$ (avec $T_0 = 0$) et par linéarité de l'espérance, $E(T_k) = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{n}{n-i}$

Exercice 25 *[sujet]* **1.** Python

2. Python

3. $\mathrm{rg}(A_{n,i}) = 2 \neq n$ donc $0 \in \mathrm{Sp}(A_{n,i})$ et $m_0(A_{n,i}) \geqslant \dim(E_0(A_{n,i})) = n-2$

4. cours puis, si $X = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, on a ${}^tA_{n,i}X = \frac{n(n+1)}{2}X$ et $X \neq 0$ donc $\frac{n(n+1)}{2} \in \mathrm{Sp}(A_{n,i})$

5. $\mathrm{Tr}(A_{n,i} = (n-2) \times 0 + \frac{n(n+1)}{2} + \lambda$ et $\mathrm{Tr}(A_{n,i}) = \frac{n(n+1)}{2} - i + n - i + 1$ donc $\beta_{n,i} = n - 2i + 1 \in [\![1-n, n-1]\!]$

6. $A_{n,i}$ est DZ si $\beta_{n,i} \neq 0$ car on a alors 2 vp simples et $m_0(A_{n,i}) = n-2 = \dim(E_0(A_{n,i})$. Par contre si $\beta_{n,i} = 0$, donc n impair et $i = \frac{n+1}{2}$, on a $\beta_{n,i} = 0$ donc $m_0(A_{n,i}) = n-1 > \dim(E_0(A_{n,i}))$ donc $A_{n,i}$ n'est pas DZ

Exercice 26 *[sujet]* **1.** a) ${}^tXAX = 5x^2+5y^2+6z^2+2xy+4xz+8yz = (x+y+z)^2+4x^2+2xz+4y^2+6yz+5z^2 = (x+y+z)^2+(x+z)^2+3x^2+3(y+z)^2+y^2+z^2 > 0$ si $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ par ex (ou alors vérifier $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^{+*}$ et les ex du cours)

b) Python

c) Python

d) Python c'est bien A^{-1}

e) Python ; c'est $\mathrm{Tr}(A^{-1})$ cette fois

2. On suppose ${}^tU_iAU_j = \delta_{i,j}$ et on pose $B = \sum_{i=1}^{n} U_i\,{}^tU_iA$; on a $BU_j = \sum_{i=1}^{n}\delta_{i,j}U_i = U_j$ donc B et I_n coïncident sur la base $(U_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ donc $B = I_n$ et $\sum_{i=1}^{n} U_i\,{}^tU_i = A^{-1}$. On applique alors la trace : $\mathrm{Tr}(A^{-1}) = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{Tr}(U_i\,{}^tU_i) = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{Tr}({}^tU_iU_i) = \sum_{i=1}^{n} \hat{\mathrm{U}}_iU_i$ (ce sont déjà des scalaires)

3. On vient de voir que ça ne peut existe que si $\alpha = \mathrm{Tr}(A^{-1})$. Dans ce cas, par th spectral, il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^{-1} = P\mathrm{diag}(\lambda_i)\,{}^tP$. Il suffit alors de prendre $U_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}PE_i$ si $(E_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 27 *[sujet]*

1. Renvoyer le $i^{\text{ème}}$ chiffre de n en base 2

2. Python

3. Python

1. Il faut décrire les entiers n dont le $i^{\text{ème}}$ chiffre en base 2 est 1 : un tel nombre est de la forme $n = \sum_{j=0}^{i-1} b_j2^j + 2^i + \sum_{j\geqslant i+1} b_j2^j$ puis $\sum_{j\geqslant i+1} b_j2^j = 2^{i+1}k$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant \sum_{j=0}^{i-1} b_j2^j \leqslant \sum_{j=0}^{i-1} 2^j = \frac{1-2^i}{1-2} = 2^i - 1$ donc les entiers cherchés sont de la forme $n = j + 2^i +^{i+1} k$ avec $j \in \left[\,0, 2^i - 1\,\right]$ et $k \in \mathbb{N}$ (et cette écriture est unique).

On a $\sum_{k=0}^{+\infty} P(X^j + 2^i + 2^{i+1}k) = \sum_{k=0}^{+\infty} p(1-p)^{j+2^i+2^{i+1}k} = p(1-p)^{j+2^i}\frac{1}{1-(1-p)^{2^{i+1}}}$ donc $P(X_i = 1) = \sum_{j=0}^{2^i-1} \frac{p(1-p)^{j+2^i}}{1-(1-p)^{2^{i+1}}} = \frac{p(1-p)^{2^i}}{1-(1-p)^{2^{i+1}}} \times \frac{1-(1-p)^{2^i}}{1-(1-p)} = \frac{(1-p)^{2^i}}{1+(1-p)^{2^i}}$ (car $q^{2^{i+1}} = (q^{2^i})^2$)

2. $\lim_{i\to+\infty} P(X_i=1)=0$ et $\lim_{p\to 0} P(X_i=1)=\dfrac{1}{2}$

1. On a $\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcap_{i\geqslant n}(B_i=0)}=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{i\geqslant n}(B_i=1)$ donc on va prouver $P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{i\geqslant n}(B_i=1)\right)=0$: par continuité décroissante, $P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{i\geqslant n}(B_i=1)\right)=\lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{i\geqslant n}(B_i=1)\right)\leqslant \sum_{i\geqslant n}\dfrac{q^{2^i}}{1+q^{2^i}}\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ car c'est un reste de série CV, car $|q|<1$ et $\dfrac{q^{2^i}}{1+q^{2^i}}\sim q^{2^i}$

2. $\ln(1+q^{2^i})\sim q^{2^i}$ (positif) donc $\ln\prod_{i=0}^{n}(1+q^{2^i})$ est la somme partielle d'une série CV donc tend vers $\ell\in\mathbb{R}$ et $\prod_{i=0}^{n}(1+q^{2^i})\xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{\ell}>0$.

3. La question **3.a** signifie qu'il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que, presque surement, $B_i=0$ pour tout $i\geqslant n$ (les B_i sont nuls à partir d'un certain rang, presque surement) donc la somme définissant X est presque surement finie (donc X est à valeurs dans $\mathbb{N}$ presque surement).

Si $n\in\mathbb{N}$, on écrit la décomposition de n en base 2 sous la forme $n=\sum_{i\in\mathbb{N}} b_i 2^i$ avec $I=\{i\in\mathbb{N}, b_i=1\}$ (qui est fini) et $J=\mathbb{N}\setminus I$; on a alors $(X=n)=\bigcap_{i\in\mathbb{N}}(B_i=b_i)=\left(\bigcap_{i\in I}(B_i=1)\right)\cap\left(\bigcap_{j\in J}(B_j=0)\right)$. Par continuité décroissante, $P(X=n)=\lim_{k\to+\infty} P\left(\bigcap_{i\leqslant k}(B_i=b_i)\right)$. I étant fini (donc majoré), si k est grand, on a, par indépendance mutuelle des B_i, $P\left(\bigcap_{i\leqslant k}(B_i=b_i)\right)=\prod_{i\in I}P(B_i=1)\times\prod_{j\in J, j\leqslant k}P(B_j=0)=\prod_{i\in I}\dfrac{q^{2^i}}{1+q^{2^i}}\times\prod_{j\in J,j\leqslant k}\dfrac{1}{1+q^{2^j}}=\dfrac{q^{\sum_{i=0}^{k} b_i 2^i}}{\prod_{i=0}^{k}(1+q^{2^i})}=\dfrac{q^n}{\prod_{i=0}^{k}(1+q^{2^i})}$. On a donc $P(X=n)=e^{-\ell}q^n$.

Reste donc à vérifier que $e^{-\ell}=(1-q)$ ce qui est obligatoire pour que $\sum_{n=0}^{+\infty}P(X=n)=1$ (car $P(X\in\mathbb{N})=1$ comme expliqué avant, avec **3.a**).

Exercice 28 *[sujet]* **1.** a) On dérive $n\geqslant 1$ fois l'égalité $2f(x)-1=e^x f(x)$ avec la formule de Leibniz : $2f^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(x)e^x$ qui donne la relation avec $x=0$.

b) Python

2. a) Python et on conjecture $\dfrac{1}{2\ln(2)^n}\leqslant a_n\leqslant\dfrac{1}{\ln(2)^n}$ ce qui donnerait $R=\ln(2)$ par encadrement

b) On prouve $a_n\leqslant\dfrac{1}{\ln(2)^n}$ par récurrence (forte) : $a_0=1\leqslant\dfrac{1}{\ln(2)^0}=1$ et si on suppose $a_k\leqslant\dfrac{1}{\ln(2)^k}$, pour $k\leqslant n-1$, on a $a_n\leqslant\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k!}\dfrac{1}{\ln(2)^{n-k}}$ (car $k\geqslant 1$ dans la somme) donc $\ln(2)^n a_n\leqslant\sum_{k=1}^{n}\dfrac{\ln(2)^k}{k!}\leqslant\sum_{k=1}^{+\infty}\dfrac{\ln(2)^k}{k!}=e^{\ln(2)}-1=1$.

Comme, par récurrence évidente, on a $a_n\geqslant 0$, on a $|a_n|\leqslant\dfrac{1}{\ln(2)^n}$ donc $R\geqslant\ln(2)$

3. a) Python, ça semble converger vers f (donc f semble DSE)

b) On pose $S(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}a_k x^k$ et on vérifie par produit de Cauchy que $(2-e^x)f(x)=1$ si $|x|<R$: on a $2-e^x=\sum_{k=0}^{+\infty}b_k x^k$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ avec $b_0=1$ et $b_k=\dfrac{-1}{k!}$ si $k\geqslant 1$; on a alors, pour $|x|<R$, $(2-e^x)f(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}c_k x^k$ avec $c_0=a_0b_0=1$ et, si $n\geqslant 1$, $c_n=\sum_{k=0}^{n}b_k a_{n-k}=a_n-\sum_{k=1}^{n}\dfrac{a_{n-k}}{k!}=0$. On a donc bien $(2-e^x)f(x)=1$ pour $|x|<R$ donc, comme $R>\ln(2)$ et que $2-e^x\neq 0$ sur $]-\ln(2),\ln(2)[$, on en déduit $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n$ sur $]-\ln(2),\ln(2)[$; f est donc DSE sur cet intervalle.

Reste à justifier $R=\ln(2)$: si on avait $R>\ln(2)$, S serait continue sur le segment $[-\ln(2),\ln(2)]$ donc bornée, de même que f qui coïncide avec S sur $]-\ln(2),\ln(2)[$, ce qui absurde puisque $\lim\limits_{x\to\ln(2)^-} f(x)=+\infty$.

Exercice 29 *[sujet]* **1.** a) $M_u=aI_3+bA+cA^2$ avec $A=M_{(0,1,0)}$

b) Python

c) $\mathcal{M}=\mathrm{Vect}\{I_3,A,A^2\}$ est un sev de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, stable par $\times$ car $A^3=I_3$; la loi $\times$ est commutative sur $\mathcal{M}$ (polynômes en A)

2. a) On vérifie que A est la matrice d'une rotation d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$ (autour de $(1,1,1)$) donc il existe $P\in\mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ telle que $A=P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\0&\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}{}^tP$ donc $A^2=P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\\0&-\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}{}^tP$ ce qui donne le résultat pour M_u

b) M_u est DZ si et seulement si $N_u=\begin{pmatrix}a-\frac{1}{2}(b+c)&-\frac{\sqrt{3}}{2}(b-c)\\\frac{\sqrt{3}}{2}(b-c)&a-\frac{1}{2}(b+c)\end{pmatrix}$ est DZ ; on a $\mathcal{X}_{N_u}=X^2-(2a-b-c)X+a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc$, $\Delta=-3(b-c)^2$ donc si $b\neq c$, N_u n'est pas DZ et si $b=c$ alors N_u est déjà diagonale (et M_u est symétrique réelle)

3. a) Python

b) On dessine le tableau de variations de P_m ; P_m a 3 racines réelles (éventuellement confondues) si $P(0)\geqslant 0\Leftrightarrow m\geqslant 0$ et $P_m\left(\dfrac{2}{3}\right)\leqslant 0\Leftrightarrow m\leqslant-\dfrac{4}{27}$

4. a) M_u est orthogonale si et seulement si $a^2+b^2+c^2=1$ (norme des colonnes) et $ab+bc+ac=0$ (produit scalaire de 2 colonnes) et comme $ab+bc+ac=\dfrac{1}{2}\left[(a+b+c)^2-\left(a^2+b^2+c^2\right)\right]$, on obtient l'équivalence annoncée

b) $M_u\in\mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$ si et seulement si M_u est orthogonale et $\det(M_u)=+1$; comme $\det(N_u)=\mathcal{X}_{N_u}(0)=1$, on a $\det(M_u)=a+b+c$ donc la CNS cherchée est $u\in S\cap T$. On a $(X-a)(X-b)(X-c)=X^3-(a+b+c)X^2+(ab+ac+bc)X-abc$. M_u est donc une rotation si et seulement si a, b et c sont racines de P_m, avec $m=-abc\in\left[-\dfrac{8}{27},0\right]$

Exercice 30 *[sujet]* **1.** a) Python

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(a)=0$

c) semble converger

2. a) Il suffit de prouver $\arctan(x)\leqslant x$ sur $\mathbb{R}$, par étude de fonction

b) On a $|u_{n+1}(a)|\leqslant\dfrac{|u_n(a)|}{1+\sqrt{1+u_n(a)^2}}\leqslant\dfrac{1}{2}|u_n(a)|$ donc $|u_n(a)|\leqslant\dfrac{1}{2^n}|u_0(a)|\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$

3. a) $u_n(a)\underset{n\to+\infty}{=}O\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$ donc $\sum u_n(a)$ CV. Puis, comme $\lim u_n(a)=0$, $u_n(a)^2\underset{n\to+\infty}{=}o(u_n(a))$ donc $\sum u_n(a)^2$ CV aussi. Enfin $\dfrac{1}{1+\sqrt{1+x^2}}\underset{0}{=}\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{x^2}{4}+o(x^2)\right)$ donc $\ln\left(\dfrac{2u_{n+1}(a)}{u_n(a)}\right)\sim-\dfrac{1}{4}u_n(a)^2$ (négatif) donc $\sum\ln\left(\dfrac{2u_{n+1}(a)}{u_n(a)}\right)$ CV aussi (si $a\neq 0$ car $u_n(0)=0$ pour tout n).

b) Si on note ℓ la somme de la série précédente, on a $\ell=\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\ln\left(2^{k+1}u_{k+1}(a)\right)-\ln\left(2^k u_k(a)\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\left(2^n u_n(a)\right)-\ln(a)$. Par continuité de exp, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}2^n u_n(a)=e^{\ell+a}>0$ donc $u_n(a)\sim\dfrac{e^{\ell+a}}{2^n}$.

4. $|u_n(a)|\leqslant\dfrac{\alpha}{2^n}$ si $a\in[-\alpha,\alpha]$ donc CVNTS de $\mathbb{R}$.

Exercice 31 *[sujet]* **1.** a) Python

b) Python

c) P_n est continu sur le segment $[0,1]$ donc y admet un maximum ; pour l'unicité, on utilise le th de Rolle : $P_n(0)=P_n(1)=\cdots=P_n(n)$ donc P_n' s'annule au moins une fois sur chaque intervalle $]0,1[,\ldots,]n-1,n[$, on a donc au moins n racines distinctes pour P_n'. Comme $\deg(P_n')=n$, on a toutes ses racines (et elles sont simples) donc P_n' admet une seule racine dans $]0,1[$, c'est donc x_n.

2. a) Python

b) Python, semble converger vers 1

c) si $x\in]0,1[$, $\ln(P_n(x)) = \ln(x) + \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k}x\right)$; en dérivant cette égalité et avec $P_n'(x_n) = 0$, on a $0 = \frac{1}{x_n} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k-x_n}$ donc $\frac{1}{x_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k-x_n} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ car $x_n \geqslant 0$ et $\frac{1}{x_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k-x_n} = \frac{1}{1-x_n} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-x_n} \leqslant \frac{1}{1-x_n} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1}$ car $x_n \leqslant 1$.

d) On prouve $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n)$ et on en déduit $\frac{1}{x_n} \sim \ln(n)$: par minoration on a $\lim \frac{1}{x_n} = +\infty$ donc $\lim x_n = 0$ et $\frac{1}{1-x_n} = o(\ln(n))$

3. a) On peut trouver une constante explicite en traçant le graphe de $\varphi : u \longmapsto \frac{u+\ln(1-u)}{u^2}$ puis étudier la fonction $u \mapsto Cu^2 - u - \ln(1-u)$ ou théoriquement : $\lim_0 \varphi = -\frac{1}{2}$ donc φ se prolonge en une fonction continue sur le segment $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ donc elle est bornée.

b) On a $\left|\ln\left(1-\frac{x_n}{k}\right) + \frac{x_n}{k}\right| \leqslant C\frac{x_n^2}{k^2}$ car $\frac{x_n}{k} \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ pour $k \geqslant 1$ et n assez grand (de sorte que $x_n < \frac{1}{2}$). On en déduit $\left|\ln\left(\frac{P_n(x_n)}{x_n}\right) + \sum_{k=1}^{n} \frac{x_n}{k}\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left|\ln\left(1-\frac{x_n}{k}\right) + \frac{x_n}{k}\right| \leqslant C\sum_{k=1}^{n} \frac{x_n^2}{k^2}$. On vérifie $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{n}$ (comparaison série/intégrale) donc $\ln\left(\frac{P_n(x_n)}{x_n}\right) = x_n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + O\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)$ puis $\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{P_n(x_n)}{x_n}\right) = 1$ donc $\lim \frac{P_n(x_n)}{x_n} = e$ et $P_n(x_n) \sim e x_n \sim \frac{e}{\ln(n)}$.

Exercice 32 *[sujet]* **1.** Python

2. Si $X_n = k$, on aura $X_{n+1} = k+1$ si la première personne vote pour A (proba $\frac{k}{m}$) et la seconde vote pour B (proba $\frac{m-k}{m-1}$, $m-1$ car c'est une autre personne) ; idem pour $X_{n+1} = k-1$. On aura $X_{n+1} = k$ si les deux personnes votent pour le même candidat.

3. $(X_n = i)_{0\leqslant i\leqslant m}$ est un SCE et $P(X_{n+1} = k | X_n = i) = 0$ si $|k-i| \geqslant 2$.
Par récurrence sur n (pour tout $k \in [\![1, m-1]\!]$).

4. $V_A = \bigcup_{n\geqslant 0} (X_n = m)$ et $(X_n = m) \subset (X_{n+1} = m)$ d'où le résultat par continuité croissante. On dédit de la question précédente que A ou B remporte tous les votes presque surement.

5. Python

6. On note $V(a) = P(V_A)$ alors $P(V(a)) = \frac{a(m-a)}{m(m-1)} P(V(a+1)) + \frac{(m-a)a}{m(m-1)} P(V(a-1)) + \left(2 - \frac{a(m-a)}{m(m-1)}\right) P(V(a))$ donc $2P(V(a)) = P(V(a-1)) + P(V(a+1))$ puis $P(V(a)) = \alpha a + \beta$ avec $P(V(0)) = 0$ et $P(V(m)) = 1$ donc $P(V(a)) = \frac{a}{m}$

Exercice 33 *[sujet]* **1.** Python

2. Python

3. $T_n(\Omega) = [\![1, N]\!]$ si $n \geqslant N$ et $T_n(\Omega) = [\![1, N-n]\!]$ si $n < N$

4. $T_1 = 1$. Puis $P(T_2 = 1) = \frac{1}{N}$ (N choix pour le trou et $\frac{1}{N^2}$ chances que les 2 boules tombent dans ce trou) et $P(T_2 = 2) = \sum_{i=1}^{N} P(T_2 = 2 | X_1 = i) P(X_1 = i) = \sum_{i=1}^{N} \frac{N-1}{N}\frac{1}{N} = \frac{N-1}{N}$ si X_1 est le numéro du trou dans lequel la première boule est tombée.

5. $P(T_n = 1) = \frac{N(N-1)^n}{N}^n = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n$: N choix pour le trou restant vide, $(N-1)^n$ façon de répartir les n boules dans les $N-1$ trous restants et N^n façon de les répartir dans les N trous.
$P(T_n = 2) = \binom{N}{2} \frac{(N-2)^n}{N^n}$ pour les mêmes raisons, $\binom{N}{2}$ façon de choisir les 2 trous vides.
$P(T_n = n) = 0$ si $n > N$ et, si $n \leqslant N$, $P(T_n = n) = \frac{N(N-1)\dots(N-n+1)}{N^n}$ car chaque boule doit occuper un trou différent : N choix pour la première, $N-1$ pour la deuxième,...

6. $(T_n=i)_{i\in[\![1,N]\!]}$ est un SCE ; $P(T_{n+1}=k|T_n=i)=0$ si $i\notin\{k-1,k\}$ donc $P(T_{n+1}=k)=P(Tn+1=k|T_n=k)P(T_n=k)+P(T_{n+1}=k|T_n=k-1)P(T_{n-1}=k-1)$ puis $P(T_{n+1}=k|T_n=k)=\dfrac{k}{N}$ (la $n+1^{\text{ème}}$ boule doit tomber dans un des k trous déjà pleins) et $P(T_{n+1}=k|T_n=k-1)=\dfrac{N-k+1}{N}$ (la $n+1^{\text{ème}}$ boule doit tomber dans un des $N-(k-1)$ trous vides)

7. a) $G_{n+1}(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\left[\frac{k}{N}P(T_n=k)+\frac{N-k+1}{N}P(T_n=k-1)\right]x^k=\frac{x}{N}\sum_{k=1}^{N}P(T_n=k)x^{k-1}+\frac{x}{N}\sum_{i=0}^{N}(N-i)P(T_n=i)x^i=\frac{x}{N}G_n'(x)+\frac{x}{N}\left(NG_n(x)-xG_n'(x)\right)$

b) Après dérivation, en $x=1$, on trouve $G_{n+1}'(1)=1+\left(1-\dfrac{1}{N}\right)G_n'(1)$ et $E(T_n)=G_n'(1)$ donc (suite arithmético-géométrique) $E(T_n)=N-(N-1)\left(1-\dfrac{1}{N}\right)^{n-1}$ car $E(T_1)=1$

c) Python

Exercice 34 *[sujet]* **1.** Python ; π-périodique et paire, croissante sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ donc maximale en $\dfrac{\pi}{2}$.

2. $f(0,0)=0$ et $f(x,y)\geqslant 0$ car $\cos\leqslant 1$ et $\operatorname{ch}\geqslant 1$.

3. B_r et C_r sont fermés (boule fermée et sphère) ; Ω_r est ouvert (boule ouverte)

4. f est continue sur B_r, partie fermée bornée non vide

5. a) $B_r\subset[-r,r]$ donc $F_r(x,y)\leqslant M_r$ sur B_r et comme $M_r\geqslant f(0,0)=0$, on a aussi $F_r(x,y)\leqslant M_r$ si $(x_y)\in[-r,r]^2\setminus B_r$.

b) Python

c) Python

d) Python

e) Python

6. a) Étudier $t\mapsto t-\sin(t)$ et $t\mapsto \operatorname{sh}(t)-t$.

b) Si M_r est atteint sur Ω_r (ouvert), c'est un point critique de f (car $\mathcal{C}^1$). Les points critiques sont $\left(k\dfrac{\pi}{2},0\right)$ en lesquels f vaut 0 ou 1 (si $r\geqslant\dfrac{\pi}{2}$). Sinon M_r est atteint sur C_r, donc un point de la forme $(r\cos\theta,r\sin\theta)$ avec $\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ vues les propriétés de périodicité/parité de g_r. On a $g_r'(\theta)=r\cos\theta\operatorname{sh}(2\sin\theta)-r\sin\theta\cos(2\cos\theta)\geqslant 2r\sin\theta\cos\theta-2r\sin\theta\cos\theta=0$ donc g_r est croissante et atteint son max en $\dfrac{\pi}{2}$. Enfin, $g_r\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=f(0,r)=\dfrac{\operatorname{ch}(2r)-1}{2}=\operatorname{sh}^2(r)$ et comme $\operatorname{sh}^2\left(\dfrac{\pi}{2}\right)>1$, on a $M_r=\operatorname{sh}^2(r)$ atteint en $(0,r)$

Exercice 35 *[sujet]* **1.** a) Python

b) Python

c) Faire la moyenne d'un grand nombre d'expériences

d) Python

e) C'est la loi faible des grands nombres

2. a) Cours

b) Si $m_{i,i}=0$ alors on a ${}^te_iMe_i=0$ et $e_i\neq 0$ (base canonique) ; si $m_{i,j}=1$ avec $i\neq j$ (et donc $m_{j,i}=m_{i,i}=m_{j,j}=1$) alors ${}^t(e_i-e_j)M(e_i-e_j)=0$ alors que $e_i-e_j\neq 0$

c) C'est donc $P\left(\displaystyle\bigcap_{i\neq j}(X_{i,j}=X_{j,i}=0)\cap\bigcap_{i=1}^{n}(X_{i,i}=1)\right)=\dfrac{1}{2^{n^2}}$ par indépendance mutuelle des $X_{i,j}$

Exercice 36 *[sujet]* **1.** a) Python

b) Python

c) Python

d) Python

e) $X_i\hookrightarrow\mathscr{B}(q^{n-1})$ car $X_i=1$ si et seulement si aucune des $n-1$ autres sommets n'est lié au sommet i puis $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}X_i$ donc $E(S_n)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}E(X_i)=nq^{n-1}$ (cohérent avec le tracé)

2. a) $P(Z \geqslant 1) \leqslant E(Z)$ par Markov et, par C-Sch, $E(Z)^2 = \sum_{k\geqslant 1}(k\sqrt{P(Z=k)})(\sqrt{P[Z=k)}) \leqslant \sum_{k\geqslant 1} k^2 P(Z = k) \times \sum_{k\geqslant 1} P(Z=k) = E(Z^2)P(Z \geqslant 1)$ qui donne le résultat avec $P(Z=0) = 1 - P(Z \geqslant 1)$

b) $S_n^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i + \sum_{i\neq j} X_iX_j$ car $X_i^2 = X_i$ puis $E(X_iX_j) = q^{2n-3}$ car $(X_iX_j = 1) = (X_i = X_j = 1)$ qui ne se produit que s'il n'y a pas d'arrête entre i et j (proba q) ni entre i et les $n-2$ autres sommets (proba q^{n-2}) ni entre j et les $n-2$ autres sommets (probas q^{n-2}). On en déduit $E(S_n^2) = nq^{n-1}[1+(n-1)q^{n-2}]$

Ce qui donne $P(S_n \geqslant 1) \leqslant \frac{1}{q}nq^n$ et $P(S_n = 0) \leqslant 1 - \frac{nq^{n-1}}{1+(n-1)q^{n-2}}$

3. On a $nq^n = \exp\left(\ln(n) + n\ln\left(1 - c\frac{\ln(n)}{n}\right)\right) = \exp\left((1-c)\ln(n) + o\left(\frac{(\ln(n))^2}{n}\right)\right)$ donc $q \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et $nq^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } c>1 \\ +\infty & \text{si } c<1 \end{cases}$

Si $c > 1$, par $P(S_n \geqslant 1) \leqslant \frac{1}{q}nq^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on trouve $\lim_{n\to+\infty} P(S_n = 0) = 1$

Si $c < 1$, par $P(S_n = 0) \leqslant 1 - \frac{nq^{n-1}}{1+(n-1)q^{n-2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on trouve $\lim_{n\to+\infty} P(S_n = 0) = 0$

Exercice 37 *[sujet]* **1.** a) (A, B, C) est libre donc $\dim(E) = 3$

b) $M = \frac{1}{3}(aA + bB + cC)$

c) Python

2. a) $\|M\| = \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}|$ par exemple puis Python

b) Python

3. a) Python puis $V = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A, B et C associé à la valeur propre $3 = \mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B) = \mathrm{Tr}(C)$ donc V est vecteur propre de toute $M \in E$ pour la valeur propre $\mathrm{Tr}(M)$.

b) On a $\mathcal{X}_M = X^3 - (\mathrm{Tr}\, M)X^2 + \alpha X - \det(M)$ s'annule en $\mathrm{Tr}(M)$ donc $\mathcal{X}_M = X^3 - (\mathrm{Tr}\, M)X^2 + \alpha X - \alpha\,\mathrm{Tr}(M)$ donc $\mathcal{X}_M = X^3 + \alpha X$ si $\mathrm{Tr}(M) = 0$

c) Python ; les puissances impaires sont dans E

d) Si $\mathrm{Tr}(M) = 0$ alors (C-Ham) $M^3 = -\alpha M$ permet de prouver $M^{2k+1} \in E$ par récurrence.
Si $\mathrm{Tr}(M) \neq 0$, on a $M^3 = -\alpha M + (\mathrm{Tr}\, M)(M^2 + \alpha I_3)$ donc il suffit de vérifier que $M^2 + \alpha I_3 \in E$ pour que $M^3 \in E$: un calcul (atroce) donne, avec $M = M(a,b,c)$, $\alpha = (c-a)(a-2b+c)$ et on vérifie $M^2 + \alpha I_3 \in E$ (colinéaire à $M(1,1,1)$) donc $M^3 \in E$. On a ensuite $M^5 = -\alpha M^3 - (\mathrm{Tr}\, M)(M^4 + \alpha M^2) \in E$ car $M^4 + \alpha M^2 = \mathrm{Tr}(M)(M^3 + \alpha M) \in E$ et M^{2k+1} par récurrence aussi.

e) On peut vérifier que B convient par exemple avec Python. De façon plus générale, si $M^2 \in E$ alors comme $M^2 + \alpha I_3 \in E$, on doit aussi avoir αI_2 in E et comme $I_3 \notin E$, il faut $\alpha = 0$ donc $(a-c)(a-2b+c) = 0$ (donc $M(1,1,1)$ et $M(1,2,3)$ conviennent aussi). Dans ce cas, on a bien $M^2 \in \mathrm{Vect}\{M(1,1,1)\} \subset E$ puis $M^k \in E$ pour tout k par récurrence.

Exercice 38 *[sujet]* **1.** a) Python

b) Avec $L_i \Leftarrow L_i - L_{i+1}$, on prouve $\det(A_n) = 1$ (triangulaire) puis Python

c) th spectral

d) Python

e) Avec les mêmes manipulations sur la matrice $A_n - \lambda I_n$, on trouve $\mathrm{rg}(A_n - \lambda I_n) \geqslant n-1$ (les $n-1$ premières colonnes sont libres) donc $\dim(\ker(A_n - \lambda I_n)) \leqslant 1$ et comme A_n est DZ, $m_\lambda(A_n) = \dim(E_\lambda(A_n)) = 1$

2. a) Python

b) Python

c) Avec $L_i \leftarrow L - L_1$, on trouve $\mathrm{rg}(M_n) = 2$ pour $n \geqslant 2$ (les lignes sont 2 à 2 colinéaires à partir de la 2nde)

d) M_n n'est pas inversible donc $0 \in \mathrm{Sp}(M_n)$, M_n est DZ (sym réelle) donc $m_0(M_n) = n - \mathrm{rg}(M_n) = n-2$; il y a donc au plus deux autres vp distinctes

e) Python

f) En DZ M_n, on trouve $\mathrm{Tr}(M_n) = \lambda_1 + \lambda_2 = n(n+1)$ et $\mathrm{Tr}(M^2) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = \frac{n^2(n+1)(7n+5)}{6}$; on en déduit $2\lambda_1\lambda_2 = \mathrm{Tr}(M_n)^2 - \mathrm{Tr}(M^2) = -\frac{n^2(n^2-1)}{6}$ et λ_i sont les 2 racines de $X^2 - n(n+1)X - -\frac{n^2(n^2-1)}{6}$

g) Comme M_n est sym réelle, on a $\ker(M_n)^\perp = \mathrm{Im}(M_n) = \mathrm{Vect}\{C_1, C_2\}$. Les deux vp restantes sont les vp de l'endomorphisme induit par M_n sur $\mathrm{Im}(M_n)$ donc calculer M_nC_1 et M_nC_2 pour écrire la matrice 2×2 de cet endomorphisme induit...

Exercice 39 *[sujet]* **1.** a) Python

b) Python

c) Python

d) Python

2. a) $N_1 = 1$ donc $E(N_1) = 1$
$P(N_2 = 1) = p^2 + q^2$; $P(N_2 = 2) = 2pq$ donc $E(N_2) = 1 + 2p - 2p^2$
$P(N_3 = 1) = p^3 + q^3$; $P(N_3 = 2) = pq^2 + qp^2 + q^2p + p^2q = 2pq$; $P(N_3 = 3) = pqp + qpq = pq$ donc $E(N_3) = 1 + 4p(1-p)$

b) $N_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$ puis $P(N_n = 1) = p^+q^n$ et selon la parité de n, $P(N_{2k} = 2k) = 2p^kq^k$ et $P(N_{2k+1} = 2k+1) = p^kq^{k+1} + p^{k+1}q^k = p^kq^k$

c) (P_{n-1}, F_{n-1}) est un SCE donc $P((N_n = k)\cap P_n) = P((N_n = k)\cap P_{n-1}\cap P_n) + P((N_n = k)\cap F_{n-1}\cap P_n)$ puis $P((N_n = k)\cap P_{n-1}\cap P_n) = P((N_{n-1} = k)\cap P_{n-1}\cap P_n) = pP((N_{n-1} = k)\cap P_{n-1})$ par indep des lancers et, de même, $P((N_n = k)\cap F_{n-1}\cap P_n) = P((N_{n-1} = k-1)\cap F_{n-1}\cap P_n) = pP((N_{n-1} = k-1)\cap F_{n-1})$

3. a) En ajoutant les deux relations précédentes avec $p = q = \dfrac{1}{2}$, on a $P(N_n = k) = \dfrac{1}{2}(P(N_{n-1} = k) + P(N_{n-1} = k-1))$ pour $k \geqslant 2$. On en déduit (le dernier terme de la première somme après partage est nul)

$$\begin{aligned}G_n(t) &= P(N_n = 1)t + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}(P(N_{n-1} = k) + P(N_{n-1} = k-1))t^k\\ &= \frac{t}{2^{n-1}} + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n-1}(P(N_{n-1} = k)t^k + \frac{1}{2}\sum_{h=1}^{n-1}P(N_{n-1} = h)t^{h+1} = \frac{t}{2^{n-1}} + \frac{1}{2}\left(G_{n-1}(t) - \frac{t}{2^{n-2}}\right) + \frac{t}{2}G_{n-1}(t)\\ &= \left(\frac{1+t}{2}\right)G_{n-1}(t) = t\left(\frac{1+t}{2}\right)^{n-1}\end{aligned}$$

$$E(N_n) = G_n'(1) = \frac{n+1}{2}$$

b) $((1-r) + rt)^m$

c) Comme $G_{N_n-1}(t) = E(t^{N_n-1}) = \dfrac{1}{t}G_n(t)$, on en déduit $N_n - 1 \hookrightarrow \mathscr{B}\left(n-1, \dfrac{1}{2}\right)$

Exercice 40 *[sujet]* **1.** $\mathcal{X}_A$ est scindé

2. a) Python

b) Python

3. Si $A = \begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ alors $\mathcal{X}_A = X^2 - (a+d)X + ad - bc$ et $(X-a)(X-d) = X^2 - (a+d)X + ad$ donc $A \in E_2$ si et seulement si $bc = 0$ donc si et seulement si A est triangulaire

4. a) $Chi_M = \mathcal{X}_A\mathcal{X}_C$

b) Prendre $M = \begin{pmatrix} A & ?\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ avec $A \in E_3$ sans coeff nul (A_3 par ex)

5. a) Les coeff diag de M sont nuls car $M \in A_n$ donc $\mathcal{X}_M = X^n$, car $M \in E_n$; par C-Ham, on a $M^n = 0$.

b) M^2 est symétrique réelle, X^n annule M donc aussi M^2, on a $\mathrm{Sp}(M^2) \subset \{0\}$ et M^2 est DZ donc semblable à la matrice nulle et $M^2 = 0$.

c) $\mathrm{Tr}(M^2) = -\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} m_{i,j}^2$ est une somme de nombre négatifs nulle donc $m_{i,j} = 0$ pour tout i, j

6. a) $\dim(F + A_n) \leqslant \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = n^2$. On vient de prouver $F \cap A_n \subset E_n \cap A_n = \{0\}$ donc $\dim(F + A_n) = \dim(F) + \dim(A_n) = \dim(F) + \dfrac{n(n-1)}{2}$ donc $\dim(F) \leqslant \dfrac{n(n+1)}{2}$

b) Les matrices triangulaires supérieures conviennent par ex

Exercice 41 *[sujet]* **1.** a) Python

b) Python puis $\mathrm{Tr}(A) \geqslant 0$ donc les vp ne peuvent pas être toutes < 0 ; une oui (cf Python))

2. a) Il semblent du même signe (Python)

b) On a $Y=\sum_{i=1}^n y_iX_i$ puis ${}^tYAY=\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 \leqslant \lambda_n \sum_{i=1}^n y_i^2=\lambda_n\|Y\|^2$ car (X_i) est une bon de vecteurs propres de A.

c) Avec $(x_1,\dots,x_n)$ les coordonnées de X_n, on a ${}^tX_nAX_n=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}x_ix_j \leqslant \left|\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}x_ix_j\right| \overset{a_{i,j}\geqslant 0}{\leqslant} \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}|x_ix_j| = {}^tZ_nAZ_n$ et ${}^tX_nAX_n=\lambda_n\|X_n\|^2=\lambda_n\|Z_n\|^2$; toutes les inégalités précédentes sont donc des égalités. On en déduit (égalité dans inégalité triangulaire) $a_{i,j}x_ix_j$ est de signe fixe donc tous les x_i sont de même signe (car $a_{i,j}>0$) (donc on peut les supposer positives, en le multipliant par 1 si besoin)

3. a) Python

b) $A_aY_i=\lambda_iY_i$ si $i\leqslant n-1$ et $Y_i=\begin{pmatrix}X_i\\0\end{pmatrix}$; les deux derniers vecteurs propres sont à chercher dans $\mathrm{Vect}\{Y_i, i<n\}^\perp$ (th spectral) donc de la forme $Y=\begin{pmatrix}bX_n\\c\end{pmatrix}$. $AY=\lambda Y \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} ab-\lambda c=0\\ (\lambda_n-\lambda)b+ac=0\end{array}\right.$ Ce système admet une solution (b,c) non nulle si et seulement si $\det(S)=0$ et $\det(S)=a^2+\lambda\lambda_n-\lambda^2$. On a donc deux nouvelles valeurs propres : $\lambda=\dfrac{\lambda_n\pm\sqrt{\Delta}}{2}$ car $\Delta=\lambda_n^2+4a^2>0$; elles sont associées aux vecteurs propres $Y=\begin{pmatrix}\lambda X_n\\1\end{pmatrix}$

c) Les vp de A sont $6,-1,-3$ donc $\lambda_3=6$; on cherche a de sorte que les deux nouvelles vp de A_a soient 9 et -3 ; on doit donc avoir $\sqrt{\Delta}=9-(-3)=12$ donc $a^2=\dfrac{\Delta^2-\lambda_3^3}{4}=27$ donc $a=3\sqrt{3}$ (car $a\geqslant 0$)

Exercice 42 *[sujet]* **1.** a) Python

b) Python

c) Python car $\alpha=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln(I_n)}{\ln(n)}$

d) Vérifier, par DL, $e^{\frac{ax}{2}}f(x)-1 \underset{0}{\sim} -a\dfrac{x}{2}<0$

e) Sur $[\varepsilon,1]$, $0\leqslant f(x)\leqslant 1-a\sin\varepsilon=k<1$ donc $0\leqslant \displaystyle\int_\varepsilon^1 f(x)^n\,\mathrm{d}x\leqslant \varepsilon k^n=o\left(\frac{1}{n}\right)$

f) Pour n grand, $g_n(x)=\exp\left[n\ln\left(1-a\sin\dfrac{x}{n}\right)\right]=\exp\left[n\ln\left(1-a\dfrac{x}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)\right]\xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-ax}$

g) Par TCD, $n\displaystyle\int_0^\varepsilon (f(x))^n\,\mathrm{d}x \overset{t=nx}{=} \int_0^{+\infty} g_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} e^{-at}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{a}$ avec $|g_n(t)|\leqslant \exp\left[-na\sin\dfrac{t}{n}\right]\leqslant e^{-at}$ intégrable sur $\mathbb{R}^+$. On a donc $\displaystyle\int_0^\varepsilon f(x)^n\,\mathrm{d}x\sim\frac{1}{an}$ et $\displaystyle\int_\varepsilon^1 f(x)^n\,\mathrm{d}x=o\left(\frac{1}{n}\right)$; par somme $I_n\sim\dfrac{1}{an}$

2. a) Python

b) Python

c) Vérifier, par DL, $e^{\frac{bx^2}{2}}f(x)-1 \underset{0}{\sim} -b\dfrac{x^2}{2}<0$

d) pour n grand $h_n(x)=\exp\left[n\ln\left(1-b\dfrac{x^2}{n}\right)\right]\xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-b\frac{x^2}{2}}$

e) On pose $x=\dfrac{\cos(t)}{\sqrt{b}}$ et on a $I_n=\dfrac{1}{\sqrt{b}}\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}t\,\mathrm{d}t$ (Wallis) donc $I_n\sim\dfrac{1}{\sqrt{b}}\times\sqrt{\dfrac{\pi}{2n+1}}\sim\sqrt{\dfrac{\pi}{2nb}}$

On choisit $b=1$ et on a $0\leqslant\displaystyle\int_\varepsilon^1 f(t)^n\,\mathrm{d}t\leqslant\varepsilon(1-b\varepsilon^2)^n=o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ et $\sqrt{n}\displaystyle\int_0^\varepsilon f(x)^n\,\mathrm{d}x \overset{t=x\sqrt{n}}{=} \int_0^{+\infty} h_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t=I$ par TCD avec $|h_n(t)|\leqslant e^{-t^2}$ intégrable. On a donc $I_n\sim\dfrac{I}{\sqrt{n}}$ et $I=\lim\sqrt{n}I_n=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 43 *[sujet]* **1.** CSSA

2. Par CSSA, $|R_{100}(x)|\leqslant\dfrac{1}{101+x}\leqslant\dfrac{1}{100}=0,01$

3. Python

4. Python

5. $|f(x)|\leqslant\dfrac{1}{1+x}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$ et $f(x)=\dfrac{1}{1+x}+R_1(x)$ et $|R_1(x)|\leqslant\dfrac{1}{x+2}$ est borné au voisinage de -1 donc $f(x)\underset{-1^+}{\sim}\dfrac{1}{1+x}$

6. Si $x\in[a,b]\subset]-1,+\infty[$ alors $|u_n'(x)|\leqslant\dfrac{1}{(n+a)^2}$ donc CVNTS de $]-1,+\infty[$

7. Python avec $u_n^{(k)}(x) = (-1)^{k+n+1}\dfrac{k!}{(x+n)^{k+1}}$

8. Par Taylor-Lagrange, $\left|f(x) - \displaystyle\sum_{k=1}^{N}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\right| \leqslant \dfrac{|x|)^{N+1}}{(N+1)!}\displaystyle\max_{[-1/2,1/2]}|f^{(N+1)}|$ et par CSSA appliqué à $\sum u_n^{(N+1)}(x)$, on a $|f^{(N+1)}(x)| \leqslant \dfrac{(N+1)!}{(x+1)^{N+2}}$ donc $\displaystyle\max_{[-1/2,1/2]}|f^{(N+1)}| \leqslant \frac{(N+1)!}{2^{N+2}}$ et $\left|f(x) - \displaystyle\sum_{k=1}^{N}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\right| \leqslant \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{|x|}{2}\right)^{N+1} \xrightarrow[N\to+\infty]{}$ 0 donc f est DSE sur $\left]-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right[$

Exercice 44 *[sujet]* **1.** Python (ne pas chercher à la faire en une seule fois et expliquer vos choix) ; chercher l'aide de la fct `hist` pour la syntaxe

2. Pour faire la différence entre A_n et E_n, il faut comprendre que pour que les lancers soient indépendants, on effectue toujours une infinité de lancers, ie on continue les lancers même après la victoire d'un joueur. H_n est donc plutôt « pas de vainqueur avant le $2n+2^{\text{ème}}$ lancer »
$H_n = \displaystyle\bigcap_{i=1}^{n+1}(\overline{A_i} \cap \overline{B_i})$

3. Par indépendance, $P(H_n) = (1-p_1)^{n+1}(1-p_2)^{n+1}$ et par continuité décroissante, la probabilité que le jeu ne s'arrête pas est $P\left(\displaystyle\bigcap_{n\geqslant 0} H_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(H_n) = 0$.

4. $E_n = H_{n-1} \cap A_n$ donc, par coalitions, $P(E_n) = (1-p_1)^n(1-p_2)^n p_1$ et $F_n = H_{n-1} \cap \overline{A_n} \cap B_n$ donc $P(F_n) = (1-p_1)^{n+1}(1-p_2)^n p_2$

5. $G_1 = \displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} E_n$ donc par incompatibilité des E_n, $P(G_1) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(E_n) = \frac{p_1}{1(1-p_1)(1-p_2)}$ et comme le jeu se termine presque surement, $P(G_2) = 1 - P(G_1)$

6. $(X = 2n+1) = F_n$ et $(X = 2n+2) = E_{n+1}$

7. $E(X) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)P(F_n) + (2n+2)P(E_{n+1})$ (ACV car $|(1-p_1)(1-p_2)| < 1$). Pour $|x| < 1$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)x^n = \frac{2x}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(2n+2)x^n = \frac{2}{(1-x)^2}$ donc ...

8. Vérifier avec Python (et loi faible des grands nombres pour différentes valeurs de p_1 et p_2)

Exercice 45 *[sujet]* **1.** Python

2. d_n est le nombre de points entiers sur $\mathcal{H}_n$ donc D_n est le nombre de points entiers sur une des $\mathcal{H}_k$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$ donc le nombre de points entiers sous $\mathcal{H}_n$. On compte les solutions entières de $xy = n$ en fonction de la valeur de x : pour $x = 1$, n solutions ; pour $x = 2$, $\left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor \in \left[\dfrac{n}{2} - 1, \dfrac{n}{2}\right]$ solutions, ..., pour $x = k$, $\left\lfloor \dfrac{n}{k} \right\rfloor \in \left[\dfrac{n}{k} - 1, \dfrac{k}{n}\right]$ solutions,...En sommant, on trouve $nH_n - n \leqslant D_n \leqslant nH_n$

3. $H_n \sim \ln(n)$ donc $D_n \sim n\ln(n)$

4. On vérifie $R = 1$ pour les trois séries puis $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$; (H_n) est le produit de Cauchy des suites 1 et (a_n) avec $a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ \dfrac{1}{n} & \text{si } n \geqslant 1 \end{cases}$ donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n = \frac{-\ln(1-x)}{1-x} = g(x)$. En dérivant, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nH_n x^n = xg'(x)$

5. $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} x^n$ car $1 - x^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

6. pour $[-a, a] \subset]-1, 1[$, on a $|f_n(x)| \leqslant \dfrac{a^n}{1-a^n}$ donc CVNTS

7. $\dfrac{x^k}{1-x^k} \underset{0}{=} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x^{jk} + o(x^n)$ donc en sommant (somme finie de DL), on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{1-x^k} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x^{jk} + o(x^n)$; le nombre de fois où x^h apparaît est le nombre de couples (j,k) tels que $jk = h$ donc d_h fois. On a donc $b_h = d_h$; à vérifier avec Python

8. Si on pose $d_0 = 0$ alors (D_n) est le produit de Cauchy des suites (d_n) et 1 donc $(1-x)f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} D_n x^n = h(x)$ et, comme d'après **2**, $|D_n - nH_n| \leqslant Cn$, on a $|(1-x)f(x) - xg'(x)| \leqslant C\dfrac{x}{(1-x)^2} \underset{1}{=} o(g'(x))$ donc $f(x) \underset{1}{\sim} \dfrac{g'(x)}{1-x}$

9. La famille $(x^{jk})_{j,k\in\mathbb{N}^*}$ est sommable pour $|x|<1$ car $\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty}|x|^{jk}=\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{|x|^j}{1-|x|^j}=f(|x|)$. On en déduit $f(x)=\displaystyle\sum_{j,k\geqslant 1}x^{jk}$ que l'on somme par paquets avec $J_n=\{(j,k)\in(\mathbb{N}^*)^2, jk=n\}$ (qui est une partition de $(\mathbb{N}^*)^2$) et on trouve $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{(j,k)\in J_n}x^{jk}=\sum_{n=1}^{+\infty}d_nx^n$ car $d_n=\mathrm{Card}(J_n)$

Exercice 46 *[sujet]* **1.** Python

2. Python

3. $z(x)=\sin(x)\displaystyle\int_0^x f\cos-\cos(x)\int_0^x f\sin$ donne $z''+z=f$

4. y est solution de $y''+y=qy$ dont une solution particulière est $x\mapsto\displaystyle\int_0^x\sin(x-t)q(t)y(t)\,\mathrm{d}t$ donc $y(x)=\alpha\cos(x)+\beta\sin(x)+\displaystyle\int_0^x\sin(x-t)q(t)y(t)\,\mathrm{d}t$; $y(0)=a$ donne $\alpha=a$ et $y'(0)=b$ donne $\beta=b$. On a alors $|y(x)|\leqslant|a|+|b|+\displaystyle\int_0^x|\sin(x-t)||q(t)y(t)|\,\mathrm{d}t$

5. On pose $g(x)=|a|+|b|+\displaystyle\int_0^x|q(t)||y(t)|\,\mathrm{d}t$ et on a $g'(x)=|q(x)y(x)|\overset{\textbf{Q4}}{\leqslant}|q(x)|g(x)$. On en déduit $g(x)\leqslant|g(0)|\exp\displaystyle\int_0^x|q(t)|\,\mathrm{d}t\leqslant|g(0)|\exp\int_0^{+\infty}|q(t)|\,\mathrm{d}t$ donc g est bornée (car $g\geqslant 0$) puis y est bornée avec **4**

Exercice 47 *[sujet]* **1.** a) Python

b) On vérifie $u_n\in[0,1]$ donc $u_{n+1}-u_n\leqslant 0$ donc (u_n) CV vers $\ell\in[0,1/2]$ tel que $\ell=\ell+\ell^2\ln(\ell)$ donc $\ell=0$

2. a) Python

b) $t\mapsto\dfrac{1}{t^2\ln(t)}$ est continue sur $]0,1[$ donc $F'(x)=\dfrac{1}{x^2\ln(x)}<0$; $t\mapsto\dfrac{1}{t^2\ln t}$ est négative, non intégrable sur $\left]0,\dfrac12\right]$ car $\dfrac1t=o\left(\dfrac{1}{t^2\ln t}\right)$ donc $\lim\limits_0 F=+\infty$ et non intégrable sur $\left[\dfrac12,1\right[$ car $\dfrac{1}{t^2\ln t}\underset{1}{\sim}\dfrac{1}{t-1}$ donc $\lim\limits_1 F=-\infty$

3. a) Python

b) $F(u_{n+1})-F(u_n)=\displaystyle\int_{u_{n+1}}^{u_n}\frac{\mathrm{d}t}{-t^2\ln t}\leqslant\frac{u_n-u_{n+1}}{-u_{n+1}^2\ln u_n}=\frac{u_n^2}{u_{n+1}^2}\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$ car $u_{n+1}=u_n(1+u_n\ln u_n)\sim u_n$. De même, $\displaystyle\int_{u_{n+1}}^{u_n}\frac{\mathrm{d}t}{-t^2\ln t}\geqslant\frac{u_n-u_{n+1}}{-u_n^2\ln u_{n+1}}=\frac{\ln u_n}{\ln u_{n+1}}\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$ donc $\lim F(u_{n+1})-F(u_n)=1$

c) on a donc $1=\lim\dfrac1n\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}F(u_{k+1})-F(u_k)=\lim\frac1n(F(u_n)-F(u_0))=\lim\frac1nF(u_n)$ donc $F(u_n)\sim n$

4. a) Python

b) $F(x)\overset{\text{IPP}}{=}-\dfrac{1}{x\ln x}-\dfrac{2}{\ln 2}+\displaystyle\int_{1/2}^x\frac{\mathrm{d}t}{(\ln t)^2}$ et $\dfrac{1}{(\ln t)^2}\underset{0}{=}o\left(\dfrac{1}{\sqrt t}\right)$ donc $\displaystyle\int_{1/2}^x\frac{\mathrm{d}t}{(\ln t)^2}\xrightarrow[x\to0]{}\int_{1/2}^0\frac{\mathrm{d}t}{(\ln t)^2}$ (Cte) et $F(x)\underset{0}{\sim}\dfrac{-1}{x\ln x}$

c) $F(x)\underset{0}{\sim}\dfrac{-1}{x\ln x}$ et $\lim u_n=0$ donc $F(u_n)\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{-1}{u_n\ln u_n}$ ce qui donne avec l'équivalent de $F(u_n)$, $n\sim\dfrac{-1}{u_n\ln u_n}$ donc $-u_n\ln u_n\sim\dfrac1n$ puis $\ln u_n+\ln|\ln u_n|=-\ln(n)+o(1)$; on vérifie enfin $\ln|\ln u_n|=o(\ln u_n)$ car $\lim\ln u_n=-\infty$ donc on a $\ln u_n\sim-\ln(n)$ et $u_n\sim\dfrac{-1}{n\ln u_n}\sim\dfrac{1}{n\ln(n)}$

Exercice 48 *[sujet]* **1.** a) Python

b) $f:x\mapsto 1-e^{-x}$ croît sur $\mathbb{R}^+$ qui est stable donc (u_n) est monotone et positive, $f(x)-x\leqslant 0$ donc (u_n) décroît donc CV vers ℓ tel que $\ell=f(\ell)$ donc $\ell=0$

2. a) Python

b) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{1-e^{-a_n}}{a_n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$ donc $R=1$

c) on a $0\leqslant a_n\leqslant 1$ donc $0\leqslant R_n\left(\dfrac12\right)\leqslant\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}2^{-k}=\frac{1}{2^n}$ donc il suffit que $2^n\geqslant 10^5$ puis Python

d) Par CSSA, $S(-1)$ existe et $|R_n(-1)| \leqslant a_{n+1}$ donc il suffit de choisir n de sorte que $a_{n+1} \leqslant 10^{-5}$

3. a) Par DL, on trouve $u_n = \dfrac{a_n - 1 + e^{-a_n}}{a_n(1-e^{-a_n})} \sim \dfrac{a_n^2/2}{a_n^2}$ donc $\lim u_n = \dfrac{1}{2}$

b) $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \dfrac{1}{n}(\dfrac{1}{a_n} - \dfrac{1}{a_0}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{2}$ donc $a_n \sim \dfrac{2}{n}$

c) Par équivalent de SATP, $\sum a_n$ DV

Exercice 49 *[sujet]* **1.** a) Python

b) Python

2. a) $U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$ et $u_k(\Omega) = \{-1, +1\}$

b) $\dfrac{1}{2}(U_n + n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{u_k+1}{2} \sim \mathscr{B}\left(n, \dfrac{1}{2}\right)$ puisque les u_k sont indépendantes et $\dfrac{u_k+1}{2} \sim \mathscr{B}\left(\dfrac{1}{2}\right)$. De même $\dfrac{1}{2}(V_n + n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{v_k+1}{2} \sim \mathscr{B}\left(n, \dfrac{1}{2}\right)$

c) On en déduit $E(U_n) = E(V_n) = 0$ donc $E(X_n) = 0$. On a donc $E(X_n^2) = V(X_n)$, puis $V(U_n) = n \overset{\text{indép}}{=} V(X_n) + V(Y_n)$, $V(V_n) = n \overset{\text{indép}}{=} V(X_n) - V(Y_n)$ et $E(X_n^2) = \dfrac{n}{2}$

3. $P(u_n = 1, v_n = 1) = P(x_n = 1, y_n = 0) = P(x_n = 1)P(y_n = 0) = \dfrac{1}{4}$ et $P(u_n = 1) = P(x_n = 1, y_n = 0) + P(x_n = 0, y_n = 1) = \dfrac{1}{2}$, de même $P(v_n = 1) = \dfrac{1}{2}$ et étudier les autres cas de la même façon

4. a) $N = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} O_n$ est à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$

b) Si on note T_1 l'instant où on repasse pour la première fois en O (avec $T_1 = +\infty$ si on n'y repasse pas), on a $P(N \geqslant n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P(N \geqslant n | T_1 = k)P(T_1 = k) + P(N \geqslant n | T_1 = +\infty)P(T_1 = +\infty) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(N \geqslant n-1)P(T_1 = k) = P(N \geqslant n-1)P(N \geqslant 1)$ car $P(N \geqslant 1) = P(T_1 \in \mathbb{N}^*)$ et $P(N \geqslant n | T_1 = k) = P(N \geqslant n-1)$ par indépendance des déplacements (comme si on recommençait l'expérience après l'instant k)

c) $O_n \sim \mathscr{B}(p_n)$ avec $p_n = P(U_n = V_n = 0) = \left(\dbinom{2n}{n}\dfrac{1}{4^n}\right) \sim \dfrac{1}{n\pi}$ donc, par linéarité de l'espérance (dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$), $E(N) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} E(O_n) = +\infty$

d) La série $\sum P(N \geqslant n)$ est DV donc $P(N \geqslant 1) = 1$ puis $P(N \geqslant n) = 1$ et par continuité décroissante, $P(N = +\infty) = 1$ donc la puce repassera presque surement une infinité de fois en O.

Exercice 50 *[sujet]* **1.** $\dfrac{1}{1-x^3} = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} x^{3n}$ et $\dfrac{1}{1-x^5} = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} x^{5n}$ sont DSE sur $]-1, 1[$ donc f aussi par produit de Cauchy et $R \geqslant 1$.

2. a) Python

b) Python

3. a) Python

b) $\deg(Q) = 8$ et $Q(X) = \dfrac{(1-X^{15})(1-X)}{(1-X^3)(1-X^5)} = \dfrac{1 + X + \cdots + X^{14}}{(1+X+X^2)(1+X+\cdots+X^4)}$ donc $Q(1) = 1$

4. a) $(1-x^{15})f(x) - \dfrac{1}{1-x} = \dfrac{Q(x)-1}{1-x}$ est polynômiale (de degré 7) puisque Q s'annule en 1

b) $(1-x^{15})f(x) - \dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{14} c_n x^n + \sum_{n\geqslant 0}(c_{n+15} - c_n)x^{n+15} - \sum_{n\geqslant 0} x^n$ donc cette fonction étant polynômiale de degré $7 < 15$, on a $c_{n+15} - c_n = 1$

5. a) Python

b) On reprend $\dfrac{1}{1-x^3} = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ et $\dfrac{1}{1-x^5} = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} b_n x^n$ avec $a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in 3\mathbb{N} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $b_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in 5\mathbb{N} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Par produit, $c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = d_n$ car $a_k b_{n-k} = 1$ si et seulement si il existe (u, v) tel que $k = 3u$ et $n-k = 5v$ donc $n = 3u + 5v$

Exercice 51 *[sujet]* **1.** (a_n) est bornée donc $R_A \geqslant 1$

2. a) $f_\emptyset(x) = 0$ donc $P(\emptyset) = 0$ et $f_{\mathbb{N}}(x) = \dfrac{1}{1-x}$ donc $P(\mathbb{N})1$

b) on a $s_n \leqslant b_n$ donc, pour $x \in [0, 1[$, $1-x)f_A(x) \leqslant (1-x)f_B(x)$ puis $P(A) \leqslant P(B)$

c) $\emptyset \subset A \subset \mathbb{N}$ donc $0 = P(\emptyset) \leqslant P(A) \leqslant P(\mathbb{N}) = 1$

3. a) si on note c_n l'ensemble associé à $A \cup B$, on a $c_n = a_n + b_n$ donc (sommation par paquets d'une série à termes positifs), pour $x \in [0, 1[$, $f_{A\cup B}(x) = f_A(x) + f_B(x)$ donc $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

b) On prouve de même $f_{\overline{A}}(x) = f_{\mathbb{N}}(x) - f_A(x)$ pour $x \in [0, 1[$ donc $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

4. a) pour $x \in]-1, 1[$, $f_{2\mathbb{N}} = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} x^{2n} = \dfrac{1}{1-x^2}$ donc $P(2\mathbb{N}) = \dfrac{1}{2}$ et $f_{3\mathbb{N}+5}(x) = \dfrac{x^5}{1-x^3}$ donc $P(3\mathbb{N}+5) = \dfrac{1}{3}$

b) $2\mathbb{N} = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{2n\}$, $f_{\{2n\}}(x) = x^{2n}$ donc $P(\{2n\}) = 0$ (comme pour toute partie finie) alors que $P(2\mathbb{N}) = \dfrac{1}{2} \neq \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(\{2n\})$

c) P n'est donc pas une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathscr{A})$ (ou $\mathscr{A}$ n'est pas une tribu)

5. a) Python

b) $P(A) = 0$

c) Par comparaison à une intégrale, on prouve $f_A(x) \underset{x\to 1}{\sim} \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{t^2 \ln x}\,\mathrm{d}t \overset{u=t\sqrt{-\ln x}}{=} \dfrac{1}{\sqrt{-\ln x}} \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u \sim \dfrac{1}{\sqrt{1-x}} \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$ donc $P(A) = 0$.

6. ?

Exercice 52 *[sujet]* **1.** $a_n = \dbinom{2n}{n} \dfrac{2n+1}{4^n} \sim 2\sqrt{\dfrac{n}{\pi}}$

2. a) Python

b)

3. Il y a toujours $2n+2$ boules dans l'urne après le $n^{\text{ème}}$ tirage donc $p_{n,r,s} = 0$ si $r + s \neq 2n+2$ puis, si $n = 0$ alors $r = s = 1$ donc $H(0, u, v) = uv$

4. $\dfrac{\partial H}{\partial u}(x, 1, 1) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{r=0}^{2n+2} r p_{n,r,2n+2-r} \right) x^n$ puis $p_{n,r,2n+2-r} = P(X_n = r)$ donc $\displaystyle\sum_{r=0}^{2n+2} r p_{n,r,n+2-r} = E(X_n)$

5. a) On a toujours $r \geqslant 1$, puis $s \geqslant 2$ à partir $n = 1$. On note $A_{n,r,s}$ l'événement « l'urne contient r blanches et s noires après le tirage n » ; $(A_{n,i,n+2-i})_{0\leqslant i\leqslant 2n+2}$ est un SCE (même si en fait $r \leqslant n+1$) donc $p_{n+1,r,s)} = \displaystyle\sum_{i=0}^{2n+2} P(A_{n+1,r,s} | A_{n,i,2n+2-i}) P(A_{n,i,2n+2-i}$ puis $P(A_{n+1,r,s} | A_{n,i,2n+2-i}) = \begin{cases} \dfrac{r-1}{2n+2} & \text{si } i = r-1 \\ \dfrac{2n-r}{2n+2} & \text{si } i = r \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

b) $\dfrac{\partial H}{\partial x}(x, u, v) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0, r, s} (n+1) p_{n+1,r,s} x^n u^r s^r = \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{n, r\geqslant 2, s} (r-1) p_{n,r-1,s-1} x^n u^r v^s + \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{n, r, s\geqslant 3} (s-2) p_{n,r,s-2} x^n u^r v^s = \dfrac{u^2 v}{2} \dfrac{\partial H}{\partial u}(x, u, v) + \dfrac{v^3}{2} \dfrac{\partial H}{\partial (} x, u, v)$

Exercice 53 *[sujet]* **1.** a) $\dfrac{1}{(n+x)^2} + \dfrac{1}{(n-x)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n^2}$ (SATP)

b) $f(x+1) = \dfrac{1}{(1+x)^2} + \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(\dfrac{1}{(n+1+x)^2} + \dfrac{1}{(n-1-x)^2} \right) \underset{p=n-1}{\overset{k=n+1}{=}} \dfrac{1}{(1+x)^2} + \displaystyle\sum_{k\geqslant 2} \dfrac{1}{(k+x)^2} + \displaystyle\sum_{p\geqslant 0} \dfrac{1}{(p-x)^2} = f(x)$

c) Si $x \in [a, 1-a] \subset]0, 1[$ et $n \geqslant 1$ alors $0 \leqslant n + x \leqslant n + 1 - a$ et $0 \leqslant n - x \leqslant n - a$ donc $\|f_n\|_{\infty,[a,1-a]} \leqslant \dfrac{1}{(n+1-a)^2} + \dfrac{1}{(n-a)^2} \sim \dfrac{2}{n^2}$ donc CVNTS de $]-1, 1[$ puis f est continue sur $]-1, 1[$ puis que D par 1-périodicité

d) Python

2. a) Python ; il semble que $g=0$

b) $g(x)=\dfrac{\pi^2}{\sin^2\pi x}-\dfrac{1}{x^2}-\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{(n+x)^2}+\frac{1}{(n-x)^2}\right)$. On vérifie comme en **1.c** que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{(n+x)^2}+\frac{1}{(n-x)^2}\right)$ CVNTS de $]-1,1[$ donc est continue en 0 et on vérifie $\dfrac{\pi^2}{\sin^2\pi x}-\dfrac{1}{x^2}\underset{0}{\sim}\dfrac{\pi^2x^2-\sin^2\pi x}{\pi^2x^4}\sim\dfrac{x^4\pi^4/3}{\pi^4x^4}$ donc g est prolongeable en 0 puis en tout point entier par 1-périodicité ($\sin^2$ est π-périodique)

c) Par 1-périodicité, $g(\mathbb{R})=g([0,1])$ est un segment puisque g est continue sur le segment $[0,1]$

3. a) Elles ont l'air égales

b) $f\left(\dfrac{x}{2}\right)=\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{4}{(x+2n)^2}$ et $f\left(\dfrac{1+x}{2}\right)=\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{4}{(x+1+2n)^2}$ (la famille est sommable donc ce calcul est licite, sinon passer par les sommes partielle de la série avec $n\geqslant 1$). En ajoutant, on retrouve les termes pairs/impairs de f

c) On a aussi $4g(x)=g\left(\dfrac{x}{2}\right)+g\left(\dfrac{1+x}{2}\right)$ donc avec x_0 tel que $|g(x_0)|=\|g\|_\infty$ (qui existe par th des bornes atteintes), on a $\|g\|_\infty\leqslant\dfrac{1}{4}g\left(\dfrac{x_0}{2}\right)+g\left(\dfrac{1+x_0}{2}\right)\leqslant\dfrac{1}{4}(2\|g\|_\infty)$ donc $\|g\|_\infty\leqslant 0$ et g est nulle

4. Par CVN sur $]-1,1[$ de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}f_n$, on a $2\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\pi^2}{\sin^2\pi x}-\frac{1}{x^2}=\frac{\pi^2}{3}$ (par DL)

5. On en déduit, si $x\in]0,1[$, $\dfrac{\pi^2}{\sin^2\pi x}-\dfrac{1}{x^2}=\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{(n+x)^2}+\frac{1}{(n-x)^2}\right)$ avec CVN sur $[0,x]\subset]-1,1[$ donc, en intégrant terme à terme sur $[0,x]$, on obtient $\dfrac{\pi\cos\pi x}{\sin\pi x}-\dfrac{1}{x}=\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n-x}-\frac{1}{n+x}$ et cette série CVNTS de $]-1,1[$ à nouveau donc on peut réintégrer sur $[0,x]$, ce qui donne $\ln\left(\dfrac{\sin\pi x}{x}\right)=\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\ln\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)$ d'où le résultat par continuité de exp. Le résultat est prouvé si $x\in[0,1[$ puis s'obtient sur $\mathbb{R}$ par 1-périodicité de $\sin(\pi x)$ et de $x\displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)$ (avec des chgt d'indice, même méthode que pour f au début avec $\left(1-\dfrac{x^2}{k^2}\right)=\dfrac{(k-x)(k+x)}{k^2}$ et en passant par le produit partiel)

Exercice 54 *[sujet]* **1.** a) Python

b) Python ; on dirait que oui

2. a) Python

b) Python ; ils sembles orthogonaux

3. a) Linéarité facile et $u(X^j)(x)=\displaystyle\int_0^1(x+t)^nt^j\,\mathrm{d}t=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i\int_0^1t^{n-i+j}\,\mathrm{d}t$ donc $u(X^j)\in\mathbb{R}_n[X]$

b) Vu au dessus car $\displaystyle\int_0^1t^{n-i+j}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{n-i+j+1}$

4. $(u(P)|Q)=\displaystyle\int_0^1\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i\int_0^1t^{n-i}P(t)\,\mathrm{d}t\right)Q(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left(\int_0^1t^{n-i}P(t)\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_0^1x^iQ(t)\,\mathrm{d}t\right)$ Comme $\dbinom{n}{n-i}=\dbinom{n}{i}$, on trouve, par le même calcul, $(u(P)|Q)=(u(Q)|P)=(P|u(Q))$.

$A(n)$ n'est pas symétrique car la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ n'est pas une bon pour ce produit scalaire. Par contre u, donc $A(n)$, est diagonalisable dans une bon pour le produit scalaire introduit sur $\mathbb{R}_[X]$ à la question **4**. De plus les vecteur propres de u, qui sont des polynômes, sont orthogonaux pour ce produit scalaire. Si $P=\displaystyle\sum_{i=0}^{n}x_iX^i$ et $Q=\displaystyle\sum_{j=0}^{n}y_jX^j$ alors $(P|Q)=\displaystyle\int_0^1\sum_{0\leqslant i,j\leqslant n}x_ix_jt^{i+j}\,\mathrm{d}t=\sum_{0\leqslant i,j\leqslant n}\frac{x_iy_j}{i+j+1}=<x,y>_n$ donc les vecteurs propres de $A(n)$ qui sont les colonnes des coordonnées des vecteurs propres de u dans $\mathcal{B}_c$ sont bien orthogonaux pour $<,>_n$

5. ?

Exercice 55 *[sujet]* **1.** a) Python

b) Python (par symétrie sur les couleurs, on peut se contenter de $p\leqslant\dfrac{n}{2}$)

2. a) Il y a $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$ façon de choisir la position des boules blanches et pour que $X_i = 1$, on doit avoir B, R au rang i (ou l'inverse) et il reste $\begin{pmatrix} n-2 \\ p-1 \end{pmatrix}$ façons de placer les $p-1$ autres boules blanches donc $P(X_i = 1) = 2\frac{\binom{n-2}{p-1}}{\binom{n}{p}} = 2\frac{p(n-p)}{n(n-1)}$ et X_i suit une loi de Bernoulli

b) non car $0 \notin N(\Omega)$ (les X_i ne sont pas indépendantes)

c) $N = \sum_{i=1}^{n-1} X_i$ donc $E(N) = 2\frac{p(n-p)}{n}$ puis Python

3. a) Loi de Bernoulli, reste à trouver le paramètre. Si $i = j+1$ on a BRB (ou RBR) aux rang i, $i+1$, $i+2$ et $\begin{pmatrix} n-3 \\ p-2 \end{pmatrix}$ façon de placer les $p-2$ blanches restantes. Dans le cas RBR, il y a $\begin{pmatrix} n-3 \\ p-1 \end{pmatrix}$ façon de placer les $p-1$ blanches restantes donc $P(X_iX_{i+1} = 1)$ et $P(XiX_{i+1} = 1) = \frac{\binom{n-3}{p-2} + \binom{n-3}{p-1}}{\binom{n}{p}} = \frac{\binom{n-2}{p-1}}{\binom{n}{p}} = \frac{p(n-p)}{n(n-1)}$

Par contre si $j > i+1$ on a 4 possibilités pour les changements de couleurs aux rang i et j (BR puis BR ou BR puis RB ou ...) et $\begin{pmatrix} n-4 \\ p-2 \end{pmatrix}$ façon de placer les $p-2$ blanches restantes donc $P(X_iX_j = 1) = 4\frac{\binom{n-4}{p-2}}{\binom{n}{p}} = \frac{p(p-1)(n-p)(n-p-1)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$

b) $V(N) = E(N^2) - E(N)^2$ et $E(N^2) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n-1} E(X_iX_j) = \sum_{i=1}^{n-1} E(X_i) + 2\sum_{i=1}^{n-2} E(X_iX_{i+1}) + \sum_{|i-j| \geqslant 2} E(X_iX_j)$ (car $X_i^2 = X_i$ pour la première somme). On trouve $E(N^2) = 2\frac{p(n-p)}{n} + 2(n-2)\frac{p(n-p)}{n(n-1)} + 4(n-2)(n-3)\frac{p(p-1)(n-p)(n-p-1)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$

c) Python

4. a) $\varphi : A_{m,k} \to B_{m,k}$ avec $b_i = a_1 + \cdots + b_i$ et φ^{-1} avec $a_1 = b_1$ puis $a_i = b_i - b_{i-1}$ et $a_k = m - b_{k-1}$

b) Obtenir une telle décomposition de m peut s'obtenir de la façon suivante : on place m fois le chiffre 1 et on chercher à regrouper ces chiffres en k paquets non vides ; ce qui revient à placer $k-1$ séparations dans les $m-1$ espaces entre deux 1 consécutifs. On en déduit $\mathrm{Card}(A_{m,k}) = \begin{pmatrix} m-1 \\ k-1 \end{pmatrix}$

c) ?