Exercices d'oraux 2022

Mines-Ponts

Exercice 1 **(Mines-Ponts PSI 2022)** *[Indication] [Solution]*

1. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $(E) : y'' - 9y = 3a|x| + b$

a) Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer qu'il existe une unique solution admettant des asymptotes en $\pm\infty$.

2. Soient $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ telles que $ABAB = 0$. A-t-on $BABA = 0$?

Exercice 2 **(Mines-Ponts PSI 2022)** *[Indication] [Solution]*

1. Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur E telle que $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty$, ie $\forall A \in \mathbb{R}^+, \exists R > 0, \|x\| > R \Rightarrow f(x) > A$.

a) Soit $A = f(0)$ et R le réel correspondant dans la définition précédente. Montrer que $\inf\{f(x), x \in E\} = \inf\{f(x), \|x\| \leqslant R\}$

b) Montrer que f admet un minimum sur E

c) Soit $g \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un polynôme P_n de degré $\leqslant n$ tel que $\|g - P_n\|_\infty = \min\{\|g-P\|_\infty, P \in \mathbb{R}_n[X]\}$

d) ?

2. a) Soit $Q \in \mathbb{C}_n[X]$, montrer qu'il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $Q(M) = 0$

b) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 2 ; montrer qu'il existe $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $P(N) = 0$

Exercice 3 **(Mines-Ponts PSI 2022)** *[Indication] [Solution]*

1. Soient $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\varphi : M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longmapsto AM - MB$

a) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

b) Écrire la matrice de φ dans $\mathcal{B}$.

c) Déterminer une CNS sur A et B pour que φ soit nul

d) Peut-on avoir $\mathrm{rg}(\varphi) = 1$?

2. Soient $x \in \mathbb{R}^+$ et $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \cos\left(\frac{\pi t}{x+t}\right) \mathrm{d}t$

a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$ et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$

b) Calculer $f(0)$ et $\lim\limits_{+\infty} f$

c) En utilisant les deux changements de variable $u = x + t$ puis $v = \dfrac{x\pi}{u}$, montrer que f est dérivable en 0

Exercice 4 **(Mines-Ponts PSI 2022)** *[Indication] [Solution]*

1. Soient $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, pour $n \geqslant 1$ et $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{n!} x^n$

a) Déterminer le rayon de convergence de cette série entière

b) Montrer que $f'(x) - f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$

c) En déduire une autre expression de f

d) Montrer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{n!} = e \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \times n!}$

2. soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices symétriques réelles définies positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle, montrer que $\mathrm{Tr}(AA^T) > 0$

b) Soit $S \in \mathcal{E}$. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = A^T A$

c) Soit $(S, S') \in \mathcal{E}^2$. Montrer $\mathrm{Tr}(SS') > 0$

Exercice 5 **(Mines-Ponts PSI 2022)** *[Indication] [Solution]*

1. Soit $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, pour $n \geqslant 1$.

a) Montrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ telle que $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$

b) Déterminer la limite de $(H_{2n} - H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

c) On pose $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$. Justifier la convergence et calculer la somme de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{a_n}$

2. Soit $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille d'événement d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$

a) Monter que $P\left(\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \geqslant \displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(A_i) - n + 1$

b) ?

Exercice 6 **(Mines-Ponts PSI 2022)** *[Indication] [Solution]*

1. Soient $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ et $\varphi : (u_n) \in E \longmapsto (v_n) \in E$ avec $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$

a) Montrer que φ est un automorphisme

b) Déterminer les éléments propres de φ

2. Soit $u_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$

a) Montrer que u_n existe

b) Montrer que $\sum u_n$ converge

c) Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$

Exercice 7 **(Mines-Ponts PSI 2022)** *[Indication] [Solution]*

1. Soit E un ensemble et $I(E) = \{g : E \to E, g \circ g = id_E\}$

a) On pose $t_0 = 1$ et $t_n = \mathrm{Card}(I([\![1,n]\!]))$. Calculer t_1, t_2 et t_3

b) Montrer que le rayon de convergence de $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t_n}{n!} x^n$ est $\geqslant 1$.

c) Montrer que $t_{n+2} = t_{n+1} + (n+1)t_n$

d) Déterminer $f(x)$

2. Soit G une partie de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ stable par produit et telle que $\forall A \in G, A^2 = I_n$ et $\forall (A,B) \in G^2, AB = BA$

a) Montrer qu'il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall A \in G, P^{-1}AP$ soit diagonale

b) En déduire que G est fini et $\mathrm{Card}(G) \leqslant 2^n$.

Exercice 8 **(Mines-Ponts PSI 2022)** *[Indication] [Solution]*

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \neq -1$ et $u_{n+1} = 2u_n + n$ pour $n \geqslant 0$

a) Déterminer (a,b) tel que $u_{n+1} + a(n+1) + b = 2(u_n + an + b)$ et en déduire la valeur de u_n.

b) Déterminer le rayon de convergence R et la valeur de $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$

c) La série entière précédente converge-t-elle pour $x = R$ et $x = -R$?

2. Soient $E = \mathcal{C}^0([-1,1], \mathbb{R})$ et $\phi(f,g) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$

a) Montrer que ϕ est un produit scalaire sur E.

b) Calculer $\|\arcsin\|$

c) Calculer $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_{-1}^{1} \frac{(\arcsin t - at - b)^2}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$

Centrale maths 1

Exercice 9 **(Centrale PSI 2022)** *[Indication] [Solution]*

Si $(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in (\mathbb{C}^*)^4$, pour $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, on pose $\overline{M} = \begin{pmatrix} \overline{\alpha} & \overline{\beta} \\ \overline{\gamma} & \overline{\delta} \end{pmatrix}$ et $M^* = \overline{M}^T$.

On pose $A = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}), M^* = -M \text{ et } \mathrm{Tr}(M) = 0\}$ et $B = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}), MM^* = I_2 \text{ et } \det(M) = 1\}$

1. a) A est-il un $\mathbb{R}$ espace vectoriel ? De quelle dimension ?

b) A est-il un $\mathbb{C}$ espace vectoriel ?

2. Déterminer $A \cap B$.

3. Les matrices de B sont-elles diagonalisables ?

Exercice 10 **(Centrale PSI 2022)** *[Indication] [Solution]*

1. Montrer que $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ est $\mathbb{R}$-linéaire si et seulement si il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que $f(z) = az + b\overline{z}$.
Exprimer $|a|^2 - |b|^2$ en fonction de $\det(f)$ et en déduire une CNS pour que f soit un automorphisme.

2. Soit $H = \{(z_1, \ldots, z_p) \in \mathbb{C}^p, z_1 + \cdots + z_p = 0\}$. Montrer que H est un sous-espace vectoriel et donner sa dimension.

3. ?

Exercice 11 **(Centrale PSI 2022)** *[Indication] [Solution]*

Soit $a \in]0, 1[$ et $\Omega = \mathbb{C} \setminus \left\{\dfrac{1}{a}\right\}$. Pour $\omega \in \Omega$, on pose $T(\omega) = \dfrac{a - \omega}{1 - a\omega}$. Enfin, on pose $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leqslant 1\}$, $\partial D = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$, $\overset{o}{D} = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ et $D^c = \Omega \setminus D$

1. a) Montrer que $T \circ T$ est bien définie sur Ω et calculer $T \circ T(\omega)$

b) Déterminer les images de ∂D, $\overset{o}{D}$ et D^c par T.

2. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré n ayant m racines distinctes $z_1, \ldots, z_m$ telles que $z_1 = a$ est racine simple. On pose $\widetilde{P}(x) = (1 - ax)^n P(T(x))$ pour $x \in \Omega$.

a) Vérifier que $\widetilde{P}$ est la restriction à Ω d'un polynôme de degré n et calculer $\widetilde{P}\left(\dfrac{1}{a}\right)$.

b) ?

Exercice 12 **(Centrale PSI 2022)** *[Indication] [Solution]*

Soient X_k des variables aléatoires discrètes indépendantes qui suivent une loi uniforme sur $\{1, N\}$. On pose $S_n = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} X_k$ et $T_n = \min\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} X_k$

1. a) S_n et T_n sont-elles indépendantes ?

b) Calculer $E(T_n)$ sous forme d'une somme puis calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} E(T_n)$.

c) Calculer $E(S_n)$ sous forme d'une somme puis calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} E(S_n)$.

2. ?

Exercice 13 **(Centrale PSI 2022)** *[Indication] [Solution]*

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 + 2f + \alpha id = 0$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$

1. On suppose $n = 2$ et $\alpha = 1$. Que dire de f ?

2. Dans toute la suite, on suppose $\alpha > 1$. Montrer que n est pair

3. On suppose $n = 2$. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans la quelle $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha & -2 \end{pmatrix}$

4. Dans le cas général, montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \mathrm{diag}(M_1, \ldots, M_p)$, où M_k est la matrice 2×2 de la question précédente.

Exercice 14 **(Centrale PSI 2022)** *[Indication] [Solution]*

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$ et $f \in \mathcal{L}(E)$

1. Montrer qu'il existe au moins deux sous espaces de E stables par f.
Donner un exemple d'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ n'ayant que 2 sous espaces stables.

2. On suppose $f \neq 0$ et non injectif. Montrer qu'il existe au moins 3 sous espaces de E stables par f.
Dans le cas où n est impair, montrer qu'il existe 4 sous espaces de E stables par f.
Donner un exemple d'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ n'ayant que 3 sous espaces stables.

3. On suppose f diagonalisable. Montrer que f admet un nombre fini de sous espaces stables si et seulement si f admet n valeurs propres distinctes.

Exercice 15 **(Centrale PSI 2022)** *[Indication] [Solution]*

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $\gamma \in [-1, 1] \setminus \{0\}$ et $S_\alpha = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(\gamma x) \text{ et } f(0) = \alpha\}$

1. Déterminer S_α pour $\gamma = 1$ puis $\gamma = -1$.

2. Soit $f(x) = \alpha \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \gamma^{n(n-1)/2} \frac{x^n}{n!}$. Vérifier que le rayon de convergence de cette série entière est $+\infty$ et montrer que $f \in S_\alpha$

3. Déterminer S_α

Exercice 16 **(Centrale PSI 2022)** *[Indication] [Solution]*
Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos^n x}{x^2}\,\mathrm{d}x$

1. Justifier l'existence de u_n pour $n \geqslant 1$

2. Montrer que $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{2}} v_n$ avec $v_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos^n\left(\sqrt{\frac{2t}{n}}\right)}{t\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

3. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que si $t \in [0,\alpha]$ alors $\ln(\cos t) \geqslant -2t^2$

4. Déterminer un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$; on donne $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$.

Exercice 17 **(Centrale PSI 2022)** *[Indication] [Solution]*
Soient $P_0 = 1$ et $P_k = \displaystyle\prod_{i=0}^{k-1}(X-i)$ pour $k \in [\![1,n]\!]$.

1. Montrer que $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$

2. Soient $a_1, \ldots, a_n$ des réels et $b_1, \ldots, b_n$ des entiers naturels deux à deux distincts. On pose $Q(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i X^{b_i}$ et on suppose qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q = (X-1)^n P$.
Calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i P_k(b_i)$ pour $k \in [\![0,n]\!]$.

3. On pose $B_i = \begin{pmatrix} 1 \\ b_i \\ \vdots \\ b_i^n \end{pmatrix}$ et $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i B_i$. Calculer S_n en fonction de $n!P(1)$.

4. En considérant le déterminant de $(S_n, B_1, \ldots, B_n)$, calculer $P(1)$.

Exercice 18 **(Centrale PSI 2022)** *[Indication] [Solution]*
Soient $\alpha > 0$ et $(\mathcal{E}) : xy' + \alpha y - xy^2 = \alpha$

1. Montrer que $(\mathcal{E})$ admet une unique solution φ développable en série entière sur $]-1,1[$

2. Montrer que $\varphi(x) \underset{1}{=} O\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$

3. Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ telle que $f(1) = 0$.

a) Montrer la convergence de $\displaystyle\int_0^1 t^\alpha \left[f'(t) + \varphi(t)f(t)\right]^2\,\mathrm{d}t$

b) En déduire $\alpha \displaystyle\int_0^1 t^{\alpha-1} f(t)^2\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^\alpha f'(t)^2\,\mathrm{d}t$

Exercice 19 **(Centrale PSI 2022)** *[Indication] [Solution]*
Soit $f \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R})$. On pose $B_n(f)(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}$, et $S_{n,r}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}(k-nx)^r$, pour $x \in [0,1]$.

1. Citer la formule de Taylor avec reste intégral

2. Montrer que $S_{n,0}(x) = 1$ et $S_{n,1}(x) = 0$
On admet $S_{n,2}(x) = nx(1-x)$

3. Montrer qu'il existe $M \geqslant 0$ tel que $|B_n(f)(x) - f(x)| \leqslant \dfrac{Mx(1-x)}{2n}$ pour $x \in [0,1]$.
En déduire que $(B_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[0,1]$

Exercice 20 **(Centrale PSI 2022)** *[Indication] [Solution]*
Soient $\lambda > -\dfrac{1}{2}$, $\varphi_\lambda(t) = \left(1-t^2\right)^{\lambda-\frac{1}{2}}$ et $I_\lambda(x) = \displaystyle\int_0^1 \varphi_\lambda(t)\cos(xt)\,\mathrm{d}t$

1. φ_λ est-elle intégrable sur $[0,1[$?

2. Montrer que I_λ est définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ puis exprimer I''_λ en fonction de $I_{\lambda+1}$ et $I_{\lambda+2}$

3. Montrer que I_λ est développable en série entière.

Exercice 21 **(Centrale PSI 2022)** *[Indication] [Solution]*

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $I_n + M$ est inversible. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $(M - I_n)^{-1} = P(M)$
2. Soient $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques réelles et $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $I_n + M$ et $I_n - M$ sont inversibles.
3. Pour $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, on pose $f(M) = (I_n + M)(I_n - M)^{-1}$. Montrer que f est une bijection de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sur l'ensemble $\{N \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R}), -1 \notin \mathrm{Sp}(N)\}$
4. ?

CCINP

Exercice 22 **(CCINP PSI 2022)** *[Indication] [Solution]*

1. Soit $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$
   a) Montrer, pour $n \in \mathbb{N}$, $P(X \leqslant n) = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_\lambda^{+\infty} e^{-x}x^n \,\mathrm{d}x$.
   b) Trouver un équivalent, quand n tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\int_\lambda^{+\infty} e^{-x}x^n \,\mathrm{d}x$.
   c) Déterminer G_X, la fonction génératrice de X et calculer $G_X(1)$ et $G_X(-1)$.
   d) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}$
   e) Soit Y une variable aléatoire discrète indépendante de X suivant une loi uniforme sur $\{1, 2\}$. Déterminer la probabilité que XY soit pair.
2. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille libre de E, espace préhilbertien, telle que $\forall x \in E, \|x\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(e_i|x)^2$
   a) Montrer que, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, $\|e_i\| \leqslant 1$.
   b) Soit x un vecteur unitaire et orthogonal à $\mathrm{Vect}\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$. Calculer $(x|e_n)^2$ et en déduire $\|e_n\|$.
   c) Montrer que $(a_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormale de E.

Exercice 23 **(CCINP PSI 2022)** *[Indication] [Solution]*

1. Soit $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$
   a) Montrer que g est définie sur $\mathbb{R}$ et impaire
   b) Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}^+$
   c) Vérifier, pour $x \neq 1$, $\dfrac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)} = \dfrac{1}{1-x^2}\left(\dfrac{1}{1+t^2} - \dfrac{x^2}{1+x^2t^2}\right)$ et en déduire la valeur de $g'(x)$ pour $x \geqslant 0$.
   d) Montrer que $g(x) = \dfrac{\pi}{2}\ln(1+x)$ pour $x \geqslant 0$.
   e) Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan(t)}{t}\right)^2 \mathrm{d}t$.
2. Soit φ l'application qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_3[X]$ associe le reste de la division euclidienne de X^2P par $X^4 - 1$.
   a) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$
   b) Montrer que φ est diagonalisable et donner ses éléments propres
   c) Calculer $\mathrm{Tr}(\varphi)$ et $\det(\varphi)$.

Exercice 24 **(CCINP PSI 2022)** *[Indication] [Solution]*

1. Soit $(\mathcal{E}) : xy' + \lambda y = \dfrac{1}{1+x}$ avec $\lambda > 0$
   a) Résoudre l'équation homogène sur $\mathbb{R}^{+*}$
   b) Donner la forme générale des solutions de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ à l'aide d'une intégrale
   c) Montrer qu'il existe une unique solution de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ bornée au voisinage de 0.
2. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, canoniquement euclidien, canoniquement associé à A.
   a) Montrer que $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2, (f(x)|y) = -(x|f(y))$

b) Montrer que $\det(f) = (-1)^n \det(f)$. Que peut-on en déduire ?

c) Montrer que f induit sur $\mathrm{Im}(f)$ un endomorphisme antisymétrique injectif. Que peut-on en déduire sur $\mathrm{rg}(f)$?

d) On suppose $n = 3$.

i. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & -a & 0 \end{pmatrix}$

ii. A est-elle diagonalisable ?

Exercice 25 **(CCINP PSI 2022)** *[Indication] [Solution]*

1. Soient E un espace vectoriel de dimension n, $u \in \mathcal{L}(E)$ ayant n valeurs propres distinctes et $Z_u = \{v \in \mathcal{L}(E), u \circ v = v \circ u\}$

a) Montrer que Z_u est un espace vectoriel

b) Montrer que si $v \in Z_u$ alors $E_\lambda(u)$ est stable par v

c) Donner $\dim(E_\lambda(u))$ et en déduire que les vecteurs propres de u sont aussi des vecteurs propres de v

d) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices de u et v sont diagonales puis déterminer $\dim(Z_u)$

2. Soit $f(t) = e^t \ln(t)$

a) Montrer que f est intégrable sur $]0, 1]$

b) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \times n!}$

Exercice 26 **(CCINP PSI 2022)** *[Indication] [Solution]*

1. a) Justifier l'existence de $R_n = \displaystyle\sum_{k \geqslant n+1} \frac{1}{k!}$.

b) On admet $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (n+1)!R_n = 1$; déterminer la nature de $\sum \sin(2n!\pi e)$.

c) Montrer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (n+1)!R_n = 1$.

2. Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ tel que $A = AB - BA$ et $f : X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longmapsto XB - BX$

a) Montrer que f est un endomorphisme

b) Calculer $\mathrm{Tr}(A)$ et $\mathrm{Tr}(A^k)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$

c) Montrer que $f(A^k) = kA^k$ pour $k \in \mathbb{N}^*$

d) En déduire que A est nilpotente

Exercice 27 **(CCINP PSI 2022)** *[Indication] [Solution]*

1. Soit $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^t - 1}\,\mathrm{d}t$. On donne $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

a) Montrer que I existe

b) Montrer que $I = \displaystyle\frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$

2. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix}$ et $\varphi : X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) \mapsto AXA$

a) Donner les valeurs propres de A, A est-elle diagonalisable ?

b) Donner les valeurs propres de φ, φ est-il diagonalisable ?

c) Déterminer $\mathrm{Im}(\varphi)$.

Exercice 28 **(CCINP PSI 2022)** *[Indication] [Solution]*

1. Soient $f(x) = \dfrac{x}{\operatorname{sh} x}$ et $f_n(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 nx}$

a) f est-elle prolongeable par continuité en 0. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$

b) Montrer que $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} f_n$ CVS sur $\mathbb{R}^*$; on pose $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

c) Montrer que S est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$

d) Exprimer f_n à l'aide de f et en déduire un équivalent simple de S en 0

e) Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - A^2 + A - I_n = 0$

a) Montrer que les valeurs propres de A sont racines de $X^3 - X^2 + X - 1$

b) Calculer $\det(A)$

c) Que dire de $\mathrm{Tr}(A)$?

Exercice 29 **(CCINP PSI 2022)** *[Indication] [Solution]*

1. Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes suivant $\mathscr{P}(\lambda)$ et $\mathscr{P}(\mu)$. On pose $Z = X + Y$.

a) Déterminer la loi de Z.

b) Déterminer la loi de X sachant $(Z = n)$.

2. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ non nul tel que $f^3 + f = 0$.

a) Montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker(f) \oplus \ker(f^2 + id)$ et $\ker(f^2 + id) \neq \{0\}$

b) Soit $x \in \ker(f^2 + id)$ non nul, montrer que $(x, f(x))$ est libre

c) Déterminer les dimensions de $\ker(f^2 + id)$ et $\ker(f)$.

d) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

e) Trouver les $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f = u^2$?

Exercice 30 **(CCINP PSI 2022)** *[Indication] [Solution]*

1. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une variable aléatoire discrète X sur $[\![0, n]\!]$ telle que $P(X = k) = \dfrac{a}{k+1}\dbinom{n}{k}$.

a) Trouver α, dépendant de k et n, tel que $\dbinom{n}{k} = \alpha\dbinom{n-1}{k-1}$.

b) En déduire la valeur de a pour laquelle on peut définir une telle variable aléatoire discrète X.

c) Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

2. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ avec $n \geqslant 1$

a) Montrer que si u est diagonalisable alors u^2 est diagonalisable

b) Montrer que la réciproque est fausse

c) Pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$, montrer $\ker(u^2 - \lambda^2 id) = \ker(u - \lambda id) \oplus \ker(u + \lambda id)$

d) Montrer que la réciproque de a) est vraie si u est bijectif ou si $\ker(u) = \ker(u^2)$.

Exercice 31 **(CCINP PSI 2022)** *[Indication] [Solution]*

1. Soient $u_n(x) = \dfrac{\ln(1 + n^2x^2)}{n^2\ln(1+n)}$ et $S(x) = \displaystyle\sum_{n \geqslant 1} u_n(x)$.

a) Trouver le domaine de définition D de S.

b) Montrer que S est continue sur D.

c) À l'aide d'une comparaison série-intégrale, montrer que $\sum u_n'(x)$ converge uniformément sur D.

d) Montrer que S est $\mathcal{C}^1$ sur D.

2. Soient $a_0, \dots, a_n$ des réels et $\varphi(P, Q) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k)$ pour $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$.

a) Donner une CNS pour que φ soit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$; on suppose cette condition réalisée par la suite.

b) Trouver $F^\perp$ où $F = \left\{P \in \mathbb{R}_n[X], \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(a_k) = 0\right\}$

c) Calculer la distance de X^n à F.

Exercice 32 **(CCINP PSI 2022)** *[Indication] [Solution]*

1. Soit $u_n = \dfrac{1}{1 + \frac{1}{1+\dots}}$, c'est-à-dire $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{1 + u_n}$

a) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie puis converge et déterminer sa limite

b) Justifier qu'il existe $(p_n, q_n) \in \mathbb{N}^2$ tels que $u_n = \dfrac{p_n}{q_n}$

c) Déterminer p_n et q_n puis la valeur de u_n.

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $0 < u_0 \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ et $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

a) Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et déterminer sa limite.

b) En calculant $u_{n+1} - u_n$, montrer que $\sum u_n^3$ converge.

c) Étudier la série de terme général u_n^2.

Exercice 33 **(CCINP PSI 2022)** *[Indication] [Solution]*

1. Soient $a_0, \dots, a_n$ des réels et $\varphi(P, Q) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k)$ pour $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$.

a) Donner une CNS pour que φ soit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$; on suppose cette condition réalisée par la suite.

b) Trouver $F^\perp$ où $F = \left\{P \in \mathbb{R}_n[X], \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(a_k) = 0\right\}$

c) Calculer la distance de X^n à F.

2. Soient $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ et φ définie sur E par $\varphi(f) : x \in [0,1] \longmapsto \begin{cases} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t & \text{si } x \in]0,1] \\ f(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$

a) Montrer que φ est un endomorphisme de E.

b) Montrer que $0 \notin \mathrm{Sp}(\varphi)$

c) Montrer que $1 \in \mathrm{Sp}(\varphi)$ et déterminer $E_1(\varphi)$.

d) Déterminer les autres valeurs propres et sous-espaces propres de φ.

Exercice 34 **(CCINP PSI 2022)** *[Indication] [Solution]*

1. Soient E un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^{p-1} \neq 0$ et $f^p = 0$ pour un entier $p \geqslant 1$.

a) Existe-t-il $k \leqslant p$ tel que $f^k = 0$?

b) Montrer qu'il existe un vecteur $x_0 \in E$ tel que $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ soit libre. En déduire $p \leqslant n$.

c) On suppose qu'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f = g^2$, montrer que $2p - 1 \leqslant n$

2. Soit $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ telle que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \partial_1 g(x, y) + \partial_2 g(x, y) = 0$. On pose $h(u,v) = f(\alpha u + \beta v, \beta u - \alpha v)$ avec $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$.

a) Calculer $\partial_1 h(u, v)$

b) Trouver (α, β) tels que $h(u, v) = \varphi(v)$ avec $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$

c) Déterminer g

Exercice 35 **(CCINP PSI 2022)** *[Indication] [Solution]*

1. Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $p \in]0,1[$ tels que

$$P(X = k, Y = n) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^n}\dbinom{n}{k}p(1-p)^n & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a) Déterminer la loi de Y.

b) Montrer que $\dfrac{1}{(1-x)^{k+1}} = \displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}x^{n-k}$ pour $|x| < 1$ et en déduire la loi de X

c) X et Y sont-elles indépendantes ?

2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}$

a) Déterminer le rang de B en fonction du rang de A.

b) Déterminer $\mathcal{X}_B$ en fonction de $\mathcal{X}_A$. Que peut-on en déduire sur les valeurs propres de A et B ?

c) Montrer que si A est inversible et admet n valeurs propres distinctes alors B est diagonalisable.

d) B est-elle diagonalisable si A n'est plus supposée inversible ?

e) Si B est diagonalisable, montrer que A l'est aussi.

f) Si A est diagonalisable, montrer que B est diagonalisable si et seulement si A est inversible.

Exercice 36 **(CCINP PSI 2022)** *[Indication] [Solution]*

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

a) Déterminer les valeurs propres de A.

b) A est-elle diagonalisable ?

c) Trigonaliser A.

2. Pour $x \neq 0$, on pose $f_n(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sh}(nx)}$ et $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ lorsque la série converge.

a) Déterminer le domaine de définition D de f.

b) Montrer que f est continue sur D

c) Étudier les variations de f

d) Montrer que, si $x > 0$, $f_n(x) \leqslant \dfrac{e^{-(n-1)x}}{\operatorname{sh} x}$ et en déduire $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\operatorname{sh} x}$

Exercice 37 **(CCINP PSI 2022)** *[Indication] [Solution]*

1. On note $a_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{1+k^2}$.

a) Prouver l'existence de a_n.

b) Montrer que $a_n \sim \dfrac{1}{n}$.

c) Déterminer le domaine de convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$.

2. Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathcal{E} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), BM = MA\}$

a) Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel

b) Déterminer les espaces propres de B. B est-elle diagonalisable ?

c) i. Montrer que B et A^T ont une valeur propre commune

ii. En déduire $M \neq 0$ dans $\mathcal{E}$

iii. Montrer que $\dim(\mathcal{E}) \geqslant 2$

d) Calculer $\dim(\mathcal{E})$.

Exercice 38 **(CCINP PSI 2022)** *[Indication] [Solution]*

1. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une variable aléatoire discrète X sur $[\![0, n]\!]$ telle que $P(X = k) = \dfrac{a}{k+1}\dbinom{n}{k}$.

a) Trouver α, dépendant de k et n, tel que $\dbinom{n}{k} = \alpha\dbinom{n-1}{k-1}$.

b) En déduire la valeur de a pour laquelle on peut définir une telle variable aléatoire discrète X.

c) Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

2. On considère $\mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire $(P|Q) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_k$ si $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k X^k$

a) Donner un vecteur normal à $H_0 = \{P \in \mathbb{R}_n[X], P(1) = 0\}$

b) Calculer $\displaystyle\inf_{P\in H_1} \|P\|$ où $H_1 = \{P \in \mathbb{R}_n[X], P(1) = 1\}$

Exercice 39 **(CCINP PSI 2022)** *[Indication] [Solution]*

1. Soient $(\mathcal{E}) : x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 0$ et f une solution de $(\mathcal{E})$ DSE sur $]-r, r[$ telle que $f(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ si $|x| < r$.

a) Justifier que f est $\mathcal{C}^2$ sur $]-r, r[$ et écrire f' et f'' sous forme de séries entières.

b) Montrer qu'il existe $(b_n)_{n\geqslant 1}$ telle que $x^2(1-x)f''(x) - x(1+x)f'(x) + f(x) = a_0 + \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} b_n(a_n - a_{n-1})x^n$.

c) Déterminer a_0 et une relation entre a_n et a_{n-1}.

d) En déduire une expression simple de f.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 2 & & & \\ \vdots & & (0) & \\ n & & & \end{pmatrix}$

a) Déterminer $\mathrm{rg}(A)$ et $\dim(\ker(A))$

b) Justifier que A est DZ

c) Montrer que A possède 3 valeurs propres : 0, λ et $1-\lambda$ avec $\lambda > 1$.

d) Déterminer un polynôme annulateur de A de degré 3.

Exercice 40 **(CCINP PSI 2022)** *[Indication] [Solution]*

1. Dans une urne avec N boules numérotées de 1 à N, on effectue n tirages avec remise. On note X_i le numéro de la $i^{\text{ème}}$ boule tirée et $M_n = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} X_i$

a) Calculer $P(M_n \leqslant k)$ et en déduire la loi de M_n.

b) i. En utilisant $P(M_n = k) = P(M_n > k-1) - P(M_n > k)$, montrer que $E(M_n) = \sum\limits_{k=0}^{N-1} P(M_n > k)$.

ii. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} E(M_n)$ et interprétez.

c) i. Montrer que $E(M_n(M_n-1)) = 2\sum\limits_{k=1}^{N-1} kP(M_n > k)$ et calculer $V(M_n)$.

ii. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} V(M_n)$ et interprétez.

2. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\mathcal{X}_A = \mathcal{X}_B$

a) On suppose que $\mathcal{X}_A$ possède n racines distinctes ; montrer que A et B sont semblables

b) Donner deux matrices ayant le même polynôme caractéristique qui ne sont pas semblables

Exercice 41 **(CCINP PSI 2022)** *[Indication] [Solution]*

1. Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes suivant $\mathscr{P}(\lambda)$ et $\mathscr{P}(\mu)$. On pose $Z = X + Y$.

a) Déterminer la loi de Z.

b) Déterminer la loi de X sachant $(Z = n)$.

2. Pour $f, g \in E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, on pose $(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$

a) Montrer que $(\,|\,)$ est un produit scalaire sur E.

b) Justifier l'existence et calculer $\int_0^1 t^n \ln(t)\,\mathrm{d}t$ pour $n \in \mathbb{N}$

c) Soit $F = \{f : x \in [0,1] \mapsto ax + b, (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$. Déterminer le projeté orthogonal de $g : x \mapsto x\ln(x)$ sur F.

d) Calculer $\inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (t\ln t - at - b)^2\,\mathrm{d}t$

Exercice 42 **(CCINP PSI 2022)** *[Indication] [Solution]*

1. Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $p \in]0,1[$ tels que

$$P(X = k, Y = n) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^n}\dbinom{n}{k} p(1-p)^n & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a) Déterminer la loi de Y.

b) Montrer que $\dfrac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum\limits_{n=k}^{+\infty} \dbinom{n}{k} x^{n-k}$ pour $|x| < 1$ et en déduire la loi de X

c) X et Y sont-elles indépendantes ?

2. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé.

a) Montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker(f^2) \oplus \ker(f - 2id)$.

b) Déterminer un vecteur de $\ker(f^2)$ qui n'appartient pas à $\ker(f)$.

c) Montrer que A est semblable à $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

d) Soit g tel que $g^2 = f$. Montrer que $\ker(f^2)$ est stable par g. Que peut-on en déduire ?

Exercice 43 **(CCINP PSI 2022)** *[Indication] [Solution]*

1. a) Montrer l'existence de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{\operatorname{sh} x}\,\mathrm{d}x$

b) Montrer que $I = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(2n+1)^2}$

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note u et v les endomorphismes de $\mathbb{R}^n$, canoniquement euclidien, canoniquement associés à A et A^T

a) Montrer que $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2, (u(x)|y) = (x|v(y))$

b) Si F est un sous espace de $\mathbb{R}^n$ stable par u, montrer que $F^\perp$ est stable par v.

c) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

i. A et A^T sont-elles diagonalisables ?

ii. Déterminer les sous espaces stables de $\mathbb{R}^3$ stables par u.

Exercice 44 **(CCINP PSI 2022)** *[Indication] [Solution]*

1. La secrétaire d'une société appelle les n clients de cette société. Elle joint chaque client, indépendamment les uns des autres avec une probabilité $p \in]0,1[$. On note X le nombre de clients joints lors de ce premier appel. Elle rappelle alors les $n - X$ clients qu'elle n'a pas pu joindre. Elle joint chacun d'entre eux avec la probabilité p et on note Y le nombre de clients joints lors de ce deuxième appel. On note Z le nombre de clients joints au cours des deux appels et $q = 1 - p$.

a) Quelle est la loi de X ? Donner $E(X)$ et $V(X)$

b) Quelles sont les valeurs prises par Z ?

c) Déterminer $P(Z = 0)$ et montrer que $P(Z = 1) = np(1 + q)q^{2n-2}$

d) Calculer $P(Y = h|X = k)$

e) Montrer que $\dbinom{n}{k}\dbinom{n-k}{j-k} = \dbinom{n}{j}\dbinom{j}{k}$ puis $P(Z = j) = \dbinom{n}{j} q^{2n-2j}(1 - q^2)^j$.
Quelle est la loi de Z ?

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & 5 & -2 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

a) A est-elle diagonalisable ?

b) Résoudre le système différentiel $X'(t) = AX(t)$ où $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$

Exercice 45 **(CCINP PSI 2022)** *[Indication] [Solution]*

1. Soit $(\mathcal{E}_0) : x^2y'' - 2y = 0$

a) Trouver une solution polynômiale u, non nulle, de $(\mathcal{E}_0)$

b) En posant $y(x) = u(x)z(x)$, trouver les solutions de $(\mathcal{E}_0)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$

c) En déduire les solutions sur $\mathbb{R}^{+*}$ puis sur $\mathbb{R}$ de $(\mathcal{E}) : x^2y'' - 2y = x^3$

2. Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

a) A est-elle diagonalisable ?

b) Déterminer les droites stables par a

c) Soient P un plan stable par a et a' l'endomorphisme de P induit par a

i. Montrer que $\mathcal{X}_{a'}$ divise $\mathcal{X}_a$

ii. En déduire $P \subset \ker(a - 3id)^2$

iii. Trouver les sous espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par a

Exercice 46 **(CCINP PSI 2022)** *[Indication] [Solution]*

1. Pour $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, on pose $M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix}$

a) Déterminer les valeur propres de $M(a,b,c)$.

b) Déterminer le noyau de $M(a,0,a)$ et $M(a,b,a)$ (pour a et b non nuls)

c) Calculer $\det(M(a,b,c))$ et déterminer le noyau et l'image de $M(a,b,c)$ lorsqu'elle n'est pas inversible.

d) Justifier que $M(a,b,c)$ est diagonalisable et la diagonaliser (trouver P et P^{-1})

2. Soient $I = [-a,a]$ et φ continue sur I pour laquelle il existe $C > 0$ tel que $\forall x \in I, |\varphi(x)| \leqslant C|x|$. On chercher les fonctions f, définies sur I, continues en 0 et telles que $\begin{cases} f(x) - f\left(\dfrac{x}{2}\right) = \varphi(x) & \text{pour } x \in I \\ f(0) = 0 \end{cases}$

a) Montrer que $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \varphi\left(\frac{x}{2^n}\right)$ est définie et continue sur I.

b) Montrer que S est solution du problème posé

c) Montrer que la différence de 2 solutions du problème est nulle ; que peut on en déduire sur l'ensemble des solutions ?

d) On suppose φ de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, montrer que f est aussi $\mathcal{C}^1$ sur I.

Exercice 47 **(CCINP PSI 2022)** *[Indication] [Solution]*

1. Soit $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} \sin(xt)\,\mathrm{d}t$

a) Montrer que φ est définie sur $\mathbb{R}$

b) Montrer que φ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$

c) Calculer φ' puis φ à l'aide de fonctions usuelles.

2. Une urne contient 3 jetons numérotés 1, 2 et 3 que l'on tire avec remise. On note Y le nombre de tirages nécessaires pour obtenir 2 jetons différents et Z celui pour tirer les 3 jetons.

a) Déterminer la loi de Y.

b) Reconnaître $Y - 1$ et en déduire $E(Y)$ et $V(Y)$

c) Déterminer la loi du couple (Y,Z).

d) Déterminer la loi et l'espérance de Z

Exercice 48 **(CCINP PSI 2022)** *[Indication] [Solution]*

1. a) Montrer que $(X|Y) = X^TY$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

b) Montrer que $(\operatorname{Im} A)^\perp = \ker(A^T)$

c) Pour $Y \in \mathbb{R}^n$, on pose $f(X) = \|AX - Y\|$ avec $Y \in \mathbb{R}^n$ fixé. Montrer que $f(X_0) = \inf\limits_{X\in\mathbb{R}^n} f(X)$ si et seulement si ${}^tA(AX_0 - Y) = 0$ et l'existence d'un tel X_0.

2. Soient $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ et $S(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$

a) Rappeler la définition du rayon de convergence d'une série entière et déterminer celui de $\sum u_n x^n$.

b) Trouver a,b,c tels que $\dfrac{1}{(1+t^2)(1-xt)} = \dfrac{at+b}{1+t^2} + \dfrac{c}{1-xt}$ pour $t \in [0,1]$ et $|x| < R$.

c) Déterminer $S(x)$

d) Montrer que S est définie en -1 et calculer $S(-1)$

Exercice 49 **(CCINP PSI 2022)** *[Indication] [Solution]*

1. Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2}$

a) Donner le domaine de définition D de f

b) Montrer que f est dérivable sur D

c) Déterminer un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 1 ; on pourra faire une comparaison série/intégrale et utiliser $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

2. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $f_A : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longmapsto AM$

a) Montrer que f_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

b) On suppose $A^2 = A$; montrer que f_A est un projecteur

c) Montrer que A est diagonalisable si et seulement si f_A est diagonalisable

d) Construire une vecteur propre de f_A à partir d'un vecteur propre de A.

e) Montrer que A et f_A ont les mêmes valeurs propres

Mines-Télécom

Exercice 50 **(Mines-Télécom PSI 2022)** *[Indication] [Solution]*

1. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

a) Montrer que, pour $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(B) = \begin{pmatrix} P(A) & P(A) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + P(0) \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$.

b) Déterminer $\mathrm{rg}(B)$ en fonction de $\mathrm{rg}(A)$.

c) On suppose A diagonalisable. Montrer que B est diagonalisable.

d) Étudier la réciproque.

2. Soit $f(x) = (\arcsin x)^2$.

a) Montrer que f est DSE sur $]-1, 1[$

b) Montrer que f' est solution sur $]-1, 1[$ de $(1-x^2)y' - xy = 1$

c) Déterminer les coefficients du DSE de f

Exercice 51 **(Mines-Télécom PSI 2022)** *[Indication] [Solution]*

1. Soit $a \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1 + a^2 \sin^2 x} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1 + a^2 \sin^2 x}$ puis montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1 + a^2 \sin^2 x} = \frac{\pi}{\sqrt{1 + a^2}}$

b) Montrer que le série de terme général $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^3 \sin^2 x}$ converge.

c) $x \mapsto \dfrac{1}{1 + x^3 \sin^2 x}$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}^+$?

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - A^2 - 4A + 4I_n = 0$

a) Montrer que $\mathrm{Sp}(A) \subset \{1, -2, 2\}$

b) Justifier que A est inversible

c) Calculer A^{-1}

Exercice 52 **(Mines-Télécom PSI 2022)** *[Indication] [Solution]*

1. Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} \cos(xt)\,\mathrm{d}t$

a) Déterminer le domaine de définition D de f et montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur D

b) Calculer f' puis f

2. Soient $a_0, \ldots, a_n$ des réels deux à deux distincts et $\varphi(P, Q) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k)$ pour $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$.

a) Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$

b) Trouver $F^{\perp}$ où $F = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X], \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(a_k) = 0 \right\}$

c) Calculer la distance de X^n à F.

Exercice 53 **(Mines-Télécom PSI 2022)** *[Indication] [Solution]*

1. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; on dit que A vérifie (P) si $\mathcal{X}_A = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} (X - a_{i,i})$

a) Donner des exemples de matrices vérifiant (P)

b) X_1, X_2, X_3 sont trois variables aléatoires discrètes indépendantes suivant $\mathscr{G}(p)$.

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & X_1 - X_2 & X_2 - X_3 \\ X_1 - X_2 & 0 & 0 \\ X_2 - X_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Quelle est la probabilité que A vérifie (P) ?

2. Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{1/x} \frac{\mathrm{d}t}{x + \sin^2 t}$

a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$

b) Étudier la monotonie de f

c) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et 0.

Exercice 54 **(Mines-Télécom PSI 2022)** *[Indication] [Solution]*

1. Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes et $S = X + Y$

a) Donner la fonction génératrice G_S de S en fonction de G_X et G_Y

b) Si $X \sim \mathscr{B}(n, p)$ et $Y \sim \mathscr{B}(m, p)$, donner la loi de S

c) Même question avec $X \sim Y \sim \mathscr{G}(p)$

2. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t$

a) Justifier l'existence de I_n et déterminer sa valeur

b) Montrer que $(P|Q) = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$

c) On pose $L_n = \dfrac{e^x}{n!} \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(e^{-x}x^n\right)$. Montrer que L_n est un polynôme de degré n et de coefficient dominant $\dfrac{(-1)^n}{n!}$

d) Montrer que $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormale

e) Montrer que L_n est scindé à racines simples dans $\mathbb{R}^+$.

Exercice 55 **(Mines-Télécom PSI 2022)** *[Indication] [Solution]*

1. On lance une pièce qui donne pile avec la probabilité $p \in]0, 1[$. On fait deux lancers : si on fait PP, on a gagné ; si on fait FF, on a perdu ; sinon on recommence.

a) Quelle est la probabilité de gagner ?

b) Est-on presque sûr que le jeu se termine ?

2. Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1 + t^2}\,\mathrm{d}t$

a) Montrer que f est définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$.

b) Montrer que f est solution sur $\mathbb{R}^{+*}$ de $y'' + y = \dfrac{1}{x}$

c) Montrer que f est l'unique solution sur $\mathbb{R}^{+*}$ de cette équation différentielle, telle que $\lim\limits_{+\infty} y = 0$

Exercice 56 **(Mines-Télécom PSI 2022)** *[Indication] [Solution]*

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 + M + I_n = 0$

a) Existe-t-il un polynôme de degré 2 dont les valeurs propres de M sont racines ?

b) M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$? Dans $M_n(\mathbb{C})$?

c) Montrer que n est pair. Calculer $\mathrm{Tr}(M)$ et $\det(M)$

2. Soient $\alpha > 0$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$ et $w_n = \dfrac{u_n}{S_n^\alpha}$.

a) On suppose que $\sum u_n$ converge. Quelle est la nature de $\sum w_n$?

b) On suppose $u_n = n$. Nature de $\sum w_n$?

c) On suppose $u_n = \dfrac{1}{n}$. Nature de $\sum w_n$?

Exercice 57 **(Mines-Télécom PSI 2022)** *[Indication] [Solution]*

1. Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs croissante qui tend vers $+\infty$.

a) Montrer que $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n e^{-\lambda_n x}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$

b) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} S(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n}$

2. On considère $\mathbb{R}^3$ canoniquement euclidien. Soient x, y, z trois vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^3$. Montrer qu'un des angles (x, y), (y, z) ou (z, x) a une mesure $\leqslant \dfrac{2\pi}{3}$ (en valeur absolue).

Exercice 58 **(Mines-Télécom PSI 2022)** *[Indication] [Solution]*

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + I_n$.

a) Montrer que A est inversible

b) Montrer que $\det(A) > 0$

2. Soient $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de variables aléatoires discrètes indépendantes telle que $X_i(\Omega) = \{-1, 1\}$, $P(X_i = -1) = p$ et $P(X_i = 1) = 1 - p$ avec $p \in]0, 1[$. On pose $Z_n = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} X_i$

a) Calculer $E(Z_n)$

b) En déduire la loi de Z_n

c) À quelle condition sur p, Z_1 et Z_2 sont-elles indépendantes ?

Autres

Exercice 59 **(Navale PSI 2022)** *[Indication] [Solution]*

1. Soit (a_n) définie par $a_0 = a_1 = 1$ et $a_{n+1} = a_n + \dfrac{2}{n+1} a_{n-1}$ pour $n \geqslant 1$.

a) Montrer que $1 \leqslant a_n \leqslant n^2$.

b) Quel est le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$? On note $f(x)$ la somme.

c) Trouver une équation différentielle vérifiée par f et en déduire $f(x)$.

2. Trouver les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M^5 = M^2$ et $\mathrm{Tr}(M) = n$

Exercice 60 **(Mines-Télécom série 2 PSI 2022)** *[Indication] [Solution]*

1. a) Donner la définition d'une valeur propre et du polynôme caractéristique, le lien entre les deux . Existe-t-il toujours une valeur propre ?

b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(A) = 0$. Montrer que les valeurs propres de A sont racines de P

c) On suppose $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + A + I_n = 0$. Que dire de $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$?

2. Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1-t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

a) Montrer que F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(x)$

b) Exprimer F à l'aide de fonctions usuelles

c) Déterminer le développement en série entière de F.

d) Justifier l'existence et calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$

Indications

Exercice 1 *[sujet]* **2.** Calculer $(BA)^3$ puis distinguer $n \leqslant 2$ et $n \geqslant 3$.

Exercice 2 *[sujet]*

Exercice 3 *[sujet]* **2.** c) c'est sur $f'(x)$ qu'il faut faire ces chgt de variable

Exercice 4 *[sujet]*

Exercice 5 *[sujet]*

Exercice 6 *[sujet]* **2.** c) on peut utiliser $\dfrac{1}{k^2} = -\displaystyle\int_0^1 t^{k-1} \ln t \, \mathrm{d}t$ par exemple

Exercice 7 *[sujet]* **1.** c) Distinguer si $g(n+2) = n+2$ où $g(n+2) \in [\![1, n+1]\!]$
2. a) raisonner par récurrence sur n

Exercice 8 *[sujet]*

Exercice 9 *[sujet]* **3.** Commencer par $M \in B$ si et seulement si $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix}$ avec $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

Exercice 10 *[sujet]*

Exercice 11 *[sujet]* **1.** b) Calculer $|T(\omega)|^2$

Exercice 12 *[sujet]*

Exercice 13 *[sujet]* **1.** construire les vecteurs de la base par récurrence

Exercice 14 *[sujet]* **2.** penser au théorème du rang
3. Montrer qu'un sev est stable si et seulement si il est engendré par des vecteurs propres de f

Exercice 15 *[sujet]* **3.** montrer que si $f \in S_\alpha$ alors f est DSE en trouvant la valeur de $f^{(n)}$ en fonction de f

Exercice 16 *[sujet]*

Exercice 17 *[sujet]* **2.** distinguer $k \leqslant n-1$ et $k = n$
3. utiliser 1)

Exercice 18 *[sujet]*

Exercice 19 *[sujet]*

Exercice 20 *[sujet]*

Exercice 21 *[sujet]* **1.** Utiliser C-Ham appliqué à $B = M + I_n$.
3. résoudre $N = f(M)$ et calculer M en fct de N

Exercice 22 *[sujet]* **2.** Posez vous la question de l'utilité de l'hypothèse de liberté
b) Cauchy-Schwarz

Exercice 23 *[sujet]*

Exercice 24 *[sujet]*

Exercice 25 *[sujet]*

Exercice 26 *[sujet]* **1.** b) Écrire e avec une série dont R_n est le reste et comparer $\sin(2n!\pi e)$ et $\sin(2\pi n! R_n)$
c) Réécrire $(n+1)!R_n$ en isolant les deux premiers termes de R_n
2. d) Raisonner par l'absurde et s'intéresser à $\mathrm{Sp}(f)$

Exercice 27 *[sujet]* **2.** b) on peut remarquer $\mathrm{rg}(A) = 1$
c) écrire $A = CC^T$ avec C une colonne

Exercice 28 *[sujet]* **1.** c) étudier la monotonie de f_n'

e) Montrer que $1/f$ est DSE sur $\mathbb{R}$

Exercice 29 *[sujet]*

Exercice 30 *[sujet]*

Exercice 31 *[sujet]*

Exercice 32 *[sujet]* **1.** b) on peut trouver $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$

2. b) utiliser $\sum(u_{n+1} - u_n)$

c) utiliser $\sum(\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n))$

Exercice 33 *[sujet]* **2.** c) montrer qu'un vecteur propre est nécessairement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 1]$

Exercice 34 *[sujet]*

Exercice 35 *[sujet]* **1.** a) calculer $\mathcal{X}_B(\lambda)$ en supposant $\lambda \neq 0$ pour commencer et faire des manipulations par blocs sur le déterminant

Exercice 36 *[sujet]*

Exercice 37 *[sujet]* **2.** d) Montrer $P(B)M = MP(A)$ pour $P \in \mathbb{R}[X]$

Exercice 38 *[sujet]*

Exercice 39 *[sujet]*

Exercice 40 *[sujet]*

Exercice 41 *[sujet]*

Exercice 42 *[sujet]* **2.** d) Montrer que l'endomorphisme induit par g sur $\ker(f^2)$ est nilpotent ; il faut conclure qu'un tel g ne peut pas exister.

Exercice 43 *[sujet]*

Exercice 44 *[sujet]*

Exercice 45 *[sujet]*

Exercice 46 *[sujet]*

Exercice 47 *[sujet]* **2.** c) Calculer $P(Z = h|Y = k)$

Exercice 48 *[sujet]*

Exercice 49 *[sujet]*

Exercice 50 *[sujet]* **2.** c) Pour simplifier les calculs, remarquer que f' est impaire

Exercice 51 *[sujet]* **1.** a) Poser $u = \tan(x)$ pour la valeur finale

Exercice 52 *[sujet]* **1.** b) Pour trouver la constante d'intégration, on peut faire une IPP (en primitivant $\cos(xt)$)

Exercice 53 *[sujet]*

Exercice 54 *[sujet]* **2.** d) Calculer $(L_i|L_j)$ avec $i \leqslant j$ par IPP

e) Introduire les points où L_n change de signe sur $\mathbb{R}^+$ et raisonner par l'absurde en introduisant un polynôme simple qui change de signe en même temps que L_n sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 55 *[sujet]*

Exercice 56 *[sujet]*

Exercice 57 *[sujet]* **1.** b) Utiliser le TCD et les restes de la série

2. Calculer $\|x + y + z\|^2$

Exercice 58 *[sujet]*

Exercice 59 *[sujet]*

Exercice 60 *[sujet]*

Solutions

Exercice 1 *[sujet]* **1.** a) Tous calculs faits, on trouve $y(x) = \begin{cases} \alpha e^{3x} + \beta e^{-3x} - 3ax - b & \text{si } x \geqslant 0 \\ (\alpha - a)e^{3x} + (\beta + a)e^{-3x} + 3ax - b & \text{si } x < 0 \end{cases}$

b) Si y admet une asymptote en $+\infty$ alors on a un des deux cas suivants :
— soit y tend vers une limite finie en $+\infty$, ce qui n'arrive que si $\alpha = 0$ et $a = 0$. Dans ce cas, on vérifie que $y = b$ est asymptote en $+\infty$.
— soit y tend en $+\infty$ vers $\pm\infty$ et $\dfrac{y(x)}{x}$ tend vers une limite non nulle en $+\infty$, ce qui n'arrive cette fois que si $\alpha = 0$ (et $a \neq 0$). La droite d'équation $y = 3ax + b$ est alors asymptote en $+\infty$.
En faisant de même en $-\infty$, on obtient dans le cas $a = 0$ la fonction avec $\alpha = \beta = 0$ avec $y = b$ asymptote horizontale en $\pm\infty$. Et dans le cas $a \neq 0$, $\alpha = 0$ et $\beta = -a$ qui donne la droite $y = 3a + b$ asymptote en $+\infty$ et $y = -3ax + b$ en $-\infty$.

2. On a $(BA)^3 = 0$ donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(BA) = \{0\}$ (car non vide) donc $\mathcal{X}_{BA} = X^n$. Si $n \geqslant 2$, on a (C-Ham) $(BA)^2 = 0$. Par contre, si $n \geqslant 3$, on prend $A = E_{1,2} + E_{2,3}$ et $B = E_{1,1} + E_{1,2}$, on vérifie $(AB)^2 = E_{1,2}^2 = 0$ alors que $(BA)^2 = (E_{1,2} + E_{2,3})^2 = E_{1,3} \neq 0$.

Exercice 2 *[sujet]* **1.** a) $m = \min\{f(x), \|x\| \leqslant R\}$ existe par le th des bornes atteintes et si $\|x\| > R$, on a $f(x) > A = f(0) \geqslant m$ donc m est le min de f sur E entier

b) déjà fait

c) On pose $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $f : E \to \mathbb{R}$ telle que $f(P) = \|g - P\|_\infty$; f est continue (car 1 lipsch par inégalité triangulaire) et $f(P) \geqslant \|P\|_\infty - \|g\|_\infty \xrightarrow[\|P\|_\infty \to +\infty]{} +\infty$ donc avec la question précédente, f admet un minimum sur E (qui est de dimension finie)

d) ?

2. Exercice pas très intéressant si on connait les matrices compagnons !

a) On peut factoriser Q sur $\mathbb{C}$ (et le rendre unitaire en divisant par son coeff dominant) : $Q = \displaystyle\prod_{k=1}^{r} (X - \lambda_k)^{\alpha_k}$ on prend alors $M = \mathrm{diag}(M_1, \ldots, M_r)$ avec $M_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & & (1) \\ 0 & \ddots & \\ (0) & & \lambda_i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{\alpha_i}(\mathbb{C})$ (triangulaire supérieure)

b) De façon générale, si $P = X^n - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ alors $P = \mathcal{X}_M$ pour $M = \begin{pmatrix} 0 & & (0) & a_0 \\ 1 & \ddots & & a_1 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ (0) & & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$ (matrice compagnon de P)

Exercice 3 *[sujet]* **1.** On pose $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$

a) facile

b) $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} a - a' & -c' & b & 0 \\ -b' & a - d' & 0 & b \\ c & 0 & d - a' & -c' \\ 0 & c & -b' & d - d' \end{pmatrix}$

c) $M = 0$ si et seulement si $A = B \in \mathrm{Vect}\{I_2\}$

d) Si $A \notin \mathrm{Vect}\{I_2\}$ alors (C_2, C_3) libres ; si $A, B \in \mathrm{Vect}\{I_2\}$, $A \neq B$ alors (C_1, C_4) est libre donc $\mathrm{rg}(M) = 1$ est impossible

2. a) $|g(x,t)| \leqslant 1$ puis $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = \dfrac{\pi t}{(x+t)^2} \left|\sin\left(\dfrac{\pi t}{x+t}\right)\right| \leqslant \dfrac{\pi t}{(a+t)^2}$ si $x \in [a,b] \subset \mathbb{R}^{+*}$

b) $f(0) = -1$ et $\lim\limits_{+\infty} f = 1$ pat TCDPC (même domination que pour $\mathcal{C}^0$)

c) Tous calculs faits, on trouve $f'(x) = \displaystyle\int_{\frac{x\pi}{x+1}}^{\pi} \frac{\pi - v}{v} \sin(v)\,\mathrm{d}v$ et $\dfrac{\pi - v}{v}\sin(v) \xrightarrow[v \to 0]{} \pi$ donc $v \mapsto \dfrac{\pi - v}{v}\sin(v)$ est intégrable sur $]0, \pi]$ donc $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\pi - v}{v}\sin(v)\,\mathrm{d}v$ donc (cons. du TAF), f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 4 *[sujet]* **1.** a) $0 \leqslant \dfrac{H_n}{n!} \leqslant \dfrac{1}{(n-1)!}$ donc $R = +\infty$

b) $f'(x) - f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!} = \frac{e^x - 1}{x}$

c) On résout l'éq diff et on trouve (avec $f(0) = 0$) $f(x) = e^x \displaystyle\int_0^x \frac{1 - e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ (l'intégrale ne pose pas de pb car la fct est prolongeable par continuité en 0)

d) $\dfrac{1 - e^{-t}}{t} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} t^n$ donc $f(x) = e^x \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} \frac{x^{n+1}}{n+1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ puis prendre $x = 1$.

2. a) $\mathrm{Tr}(AA^T) = \|A^T\|^2 > 0$ si $A \neq 0$

b) $S = PDP^T = P\Delta^2 P^T$ (avec $\Delta = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$) et prendre $A = \Delta P^T$ qui est inversible car $\lambda_i > 0$ et P inversible.

c) $\mathrm{Tr}(SS') = \mathrm{Tr}(A^T A S') = \mathrm{Tr}(AS'A^T) > 0$ car $AS'A^T \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ car $(AS'A^T X|X) = (S'A^T X|A^T X) > 0$ si $X \neq 0$ car A^T est inversible. (on a même $\mathrm{Sp}(SS') \subset \mathbb{R}^{+*}$)

Exercice 5 *[sujet]* **1.** a) cours

b) cours : $\lim(H_{2n} - H_n) = \ln 2$

c) $\dfrac{1}{a_n} = \dfrac{6}{n(n+1)(2n+1)} = \dfrac{6}{n} + \dfrac{6}{n+1} - \dfrac{24}{2n+1}$; avec $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} = H_{2n} - \frac{1}{2} H_n - 1$, on trouve $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} = 24(H_n - H_{2n}) + \frac{6}{n+1} - \frac{24}{2n+1} + 18$ donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n} = 18 - 24 \ln 2$

2. a) Par récurrence sur n : si on pose $B_n = \displaystyle\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i$, on a $P(A_n \cap B_n) = P(A_n) + P(B_n) - P(A_n \cup B_n) \geqslant P(A_n) + P(B_n) - 1$ puis HR pour minorer $P(B_n)$

b) ?

Exercice 6 *[sujet]* **1.** a) linéaire : facile. Si $(v_n) = 0$ alors comme $u_{n+1} = (n+1)v_{n+1} - nv_n$, on a $(u_n) = 0$ donc injectif. Si $(v_n) \in E$, il suffit de définir (u_n) par $u_1 = v_1$ et $u_{n+1} = (n+1)v_{n+1} - nv_n$ pour trouver (u_n) telle que $\varphi(u) = v$ donc surjectif

b) Si $v_n = \lambda u_n$ alors on a $v_1 = u_1 = \lambda u_1$ donc $u_1 = 0$ si $\lambda \neq 1$ puis $u_{n+1} = (n+1)v_{n+1} - nv_n$ donne $[1 - \lambda(n+1)]u_{n+1} = n\lambda u_n$. Si $\lambda \notin \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$, on a $u_1 = 0$ puis par récurrence $u_n = 0$ donc $\lambda \notin \mathrm{Sp}(\varphi)$. Par contre, si $\lambda = \dfrac{1}{k}$ alors u_k est qlcque, $u_{k-1} = 0, \dots u_1 = 0$ donc $E_{\frac{1}{k}}(\varphi)$ est la droite engendrée par (u_n) définie par $u_1 = \cdots = u_{k-1} = 0$, $u_k = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{n/k}{1 - (n+1)/k} u_n$ pour $n \geqslant k$

2. a) $\displaystyle\sum \frac{(-1)^k}{k^2}$ est ACV

b) par CSSA, $|u_n| \leqslant \dfrac{1}{(n+1)^2}$

c) $u_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^{k+1} \int_0^1 t^{k-1} \ln t \,\mathrm{d}t \overset{\text{TITT}}{=} \int_0^1 (-1)^{n+1} \frac{t^{n-1} \ln t}{1+t} \,\mathrm{d}t$ puis,avec le TITT et (pour H4) $\displaystyle\int_0^1 \left| \frac{t^{n-1} \ln t}{1+t} \right| \mathrm{d}t \leqslant - \int_0^1 t^{n-1} \ln t \,\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}$, on trouve $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \int_0^1 \frac{\ln t}{(1+t)^2} \,\mathrm{d}t$ qu'on calcule par IPP sur $[x, 1] \subset]0, 1]$: $\displaystyle\int_x^1 \frac{\ln t}{(1+t)^2} \,\mathrm{d}t = \frac{\ln x}{x+1} + \int_x^1 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t} \right) \mathrm{d}t = -\ln 2 + \ln(x+1) - \frac{x \ln x}{x+1}$ donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = -\ln 2$.

Exercice 7 *[sujet]* **1.** a) $I(\{1\}) = \{id\}$ donc $t_1 = 1$; $I(\{1, 2\}) = \{id, (12)\}$ ((12) est l'appl qui échange 1 et 2) donc $t_2 = 2$ et $I(\{1, 2, 3\}) = \{id, (12), (13), (23)\}$ donc $t_3 = 4$

b) $I([\![1, n]\!]) \subset \mathcal{S}_n$ (ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$) donc $t_n \leqslant n!$

c) Si $g(n+2) = n+2$ alors $g_{|_{[\![1,n]\!]}} \in I([\![1, n]\!])$ donc il y a t_{n+1} applications de ce type. Sinon $g(n+2) = k \in [\![1, n+1]\!]$ (il y a $n+1$ choix pour k) puis $g(k) = n+2$ et $g_{|_{E_k}} \in I(E_{|_{E_k}})$ où $E_k = [\![1, n+1]\!] \setminus \{k\}$ donc il y a $(n+1)t_n$ applications de ce type

d) si $a_n = \dfrac{t_n}{n!}$, on a $a_{n+2} = \dfrac{1}{(n+2)!}(a_{n+1} + a_n)$ donc f est solution de $f'(x) = (1+x)f(x)$ avec $f(0) = t_0 = 1$ donc $f(x) = e^{x + x^2/2}$

2. a) on suppose le résultat vrai pour tout $G \subset \mathcal{GL}_k(\mathbb{C})$ avec $k \leqslant n$ et on choisit $G \subset \mathcal{GL}_{n+1}(\mathbb{C})$. Pour $A \in G$, on a $\mathrm{Sp}(A) \subset \{-1,1\}$ et A est DZ ; si pour tout $A \in G$, on a $\mathrm{Card}(\mathrm{Sp}(A)) = 1$ alors tous les éléments de G sont des homothéties (donc déjà diagonales). Sinon, on choisit $A \in G$ avec $\mathrm{Sp}(A) = \{-1,+1\}$, on a $\mathbb{C}^n = E_1(A) \oplus E_{-1}(A)$. Par commutativité, $E_1(A)$ et $E_{-1}(A)$ sont stables par $B \in G$ donc si $\mathcal{B}$ est une base de vp de A, pour tout $B \in G$, on a $Q^{-1}BQ = \mathrm{diag}(B_1, B_2)$ (diag par blocs et $Q = P(\mathcal{B}_c \to \mathcal{B})$). On vérifie que $G_1 = \{B_1, B \in G\}$ et $G_2 = \{B_2, B \in G\}$ satisfont les mêmes hypothèses que G (avec $k \leqslant n$) donc par HR, il existe P_1, P_2 telles que $P_1^{-1}B_1P_1 = D_1$ et $P_2^{-1}B_2P_2 = D_2$ sont diag pour tout (B_1, B_2). On pose alors $P = \mathrm{diag}(P_1, P_2)$, on vérifie $P^{-1} = \mathrm{diag}(P_1^{-1}, P_2^{-1})$ et $P^{-1}Q^{-1}BQP = \mathrm{diag}(D_1, D_2)$

b) On a $A = P^{-1}DP$ avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $\lambda_i \in \{-1,+1\}$ donc 2^n choix pour les λ_i au plus et P est fixée.

Exercice 8 *[sujet]* **1.** a) $u_{n+1} + (n+1) + 1 = 2(u_n + n1)$ donc $u_n = 2^n(u_0+1) - n - 1$

b) $u_n \sim (1+u_0)2^n$ donc $R = \dfrac{1}{2}$ et si $|x| < \dfrac{1}{2}$, $f(x) = (1+u_0)\dfrac{2}{2-x} - \dfrac{1}{(1-x)^2}$

c) $u_n\left(\pm\dfrac{1}{2}\right)^n$ ne tend pas vers 0

2. a) $\dfrac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}} \underset{t\to 1}{=} O\left(\dfrac{1}{(1-t)^{1/2}}\right)$ (idem en -1) donc $\phi(f,g)$ existe ; le reste est facile

b) $\|\arcsin\|^2 = \left[\dfrac{1}{3}\arcsin(t)^3\right]_{-1}^{1} = \dfrac{\pi^3}{24}$

c) C'est $d(\arcsin, \mathbb{R}_1[X])^2$ et $P_0 = \dfrac{1}{\pi}$, $P_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}X$ est une bon de $\mathbb{R}_1[X]$,...

Exercice 9 *[sujet]* **1.** a) $M \in A \Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & -\alpha \end{pmatrix}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ donc on vérifie (par $\mathbb{R}$-linéarité de la conjugaison) que A est un $\mathbb{R}$-ev puis (avec $\beta = a+ib$), on trouve $A = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\{E_{1,1} - E_{2,2}, E_{1,2} - E_{2,1}, iE1,2 + iE_{2,1}\}$ donc $\dim_{\mathbb{R}}(A) = 3$

b) $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in A$ mais $iM = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \notin A$

2. $M \in A \cap B \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 + |\beta|^2 = 1 \\ \alpha\overline{\beta} = 0 \\ -\alpha^2 + |\beta|^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = 0$ et $\beta = e^{i\theta}$ donc $A \cap B = \left\{\begin{pmatrix} 0 & e^{i\theta} \\ -e^{-i\theta} & 0 \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R}\right\}$

3. On vérifie $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in B \Leftrightarrow \begin{cases} |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \\ |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1 \\ \alpha\overline{\gamma} + \beta\overline{\delta} = 0 \\ \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \delta = \overline{\alpha} \\ \gamma = -\overline{\beta} \\ |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \end{cases}$ On a donc $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix}$ avec $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. On a alors $\mathcal{X}_M = X^2 - 2X\,\mathrm{Re}(\alpha) + 1$, $\Delta = 4(\mathrm{Re}(\alpha)^2 - 1)$ et comme $\mathrm{Re}(\alpha)^2 \leqslant |\alpha|^2 = 1 - |\beta|^2$, si $\beta \neq 0$, on a $\Delta \neq 0$ donc M est DZ. Reste les cas $\beta = 0$ qui sont évidents car M est déjà diagonale.

Exercice 10 *[sujet]* **1.** Par analyse, on trouve $a + b = f(1)$ et $a - b = -if(i)$; on pose donc $a = \dfrac{1}{2}(f(1) - if(i))$ et $b = \dfrac{1}{2}(f(1) + if(i))$ et on a $f(x+iy) = xf(1) + yf(i) = x(a+b) + iy(a-b) = az + b\overline{z}$. Réciproquement, une telle application est bien $\mathbb{R}$-linéaire.

Si $\mathcal{B} = (1, i)$ est une base de $\mathbb{C}$, $\mathrm{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(a+b) & -\mathrm{Im}(a-b) \\ \mathrm{Im}(a+b) & \mathrm{Re}(a-b) \end{pmatrix}$ donc $\det(f) = \mathrm{Re}(a+b)\,\mathrm{Re}(a-b) + \mathrm{Im}(a+b)\,\mathrm{Im}(a-b) = |a|^2 - |b|^2$ donc $f \in \mathcal{GL}(\mathbb{C})$ si et seulement si $|a| \neq |b|$.

2. H est un hyperplan : le noyau de $(z_1, \dots, z_p) \mapsto z_1 + \cdots + z_p$ (forme linéaire non nulle)

3. ?

Exercice 11 *[sujet]* **1.** a) $T(\omega) = \dfrac{1}{a}$ n'a pas de solution puis $T \circ T(\omega) = \omega$

b) $|T(\omega)|^2 = \dfrac{|\omega|^2 - 2a\,\mathrm{Re}(\omega) + a^2}{1 - 2a\,\mathrm{Re}(w) + a^2|\omega|^2}$ donc on en déduit $|T(\omega)| = 1 \Leftrightarrow |\omega| = 1$ $(T(\partial D) = \partial D)$, puis $|T(\omega)| < 1 \Leftrightarrow |\omega| < 1$ $(T(\overset{o}{D}) = \overset{o}{D})$ et $|T(\omega)| > 1 \Leftrightarrow |\omega| > 1$ $(T(D^c) = D^c)$

2. a) On a $P = \lambda(X - a)\displaystyle\prod_{k=2}^{n}(X - b_i)$ avec $b_i \in \{z_2, \dots, z_m\}$ et $\lambda \in \mathbb{C}^*$. On trouve $\widetilde{P}(x) = \lambda(1-a^2)x\displaystyle\prod_{k=2}^{n}((1-ab_i)x + (b_1 - a))$ donc $\widetilde{P}$ est un polynôme de degré n et $\widetilde{P}\left(\dfrac{1}{a}\right) = \lambda\left(\dfrac{1-a^2}{a}\right)^n$.

b) ?

Exercice 12 *[sujet]* **1.** a) $P(S_n = 1, T_n = 2) = 0$ alors que $P(S_n = 1) \neq 0$ et $P(T_n = 2) \neq 0$

b) $E(T_n) = \sum_{k=1}^{N} P(T_n \geqslant k)$ et $(T_n \geqslant k) = \bigcap_{i=1}^{n} (X_i \geqslant k)$ donc, par indép, $P(T_n \geqslant k) = \left(\frac{N-k+1}{N}\right)^n$ et

$$E(T_n) = \sum_{k=0}^{N-1} \left(1 - \frac{k}{N}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

c) Idem avec $P(S_n \geqslant k) = 1 - P(S_n \leqslant k-1) = 1 - \left(\frac{k-1}{N}\right)^n$ donc $E(S_n) = N - \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} N$.

2. ?

Exercice 13 *[sujet]* **1.** $(f + id)^2 = 0$ donc il existe une base de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = -I_2$ ou $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

2. $X^2 + 2X + \alpha$ n'a pas de racines réelles donc $\mathrm{Sp}(f) = \emptyset$ et n est pair

3. On prend $a \neq 0$ et $b = -\frac{1}{\alpha} f(a)$; (a, b) est libre car a ne peut pas être un vecteur propre de f (qui n'en a pas)

4. On construit la base par récurrence : on choisit $x_k \notin \mathrm{Vect}\{x_1, y_1, \dots, x_{k-1}, y_{k-1}\}$ et on pose $y_k = -\frac{1}{\alpha} f(x_k)$. Il suffit alors de vérifier que cette famille sera libre : si (1) : $\sum_{i=1}^{k} a_i x_i + b_i y_i = 0$ alors comme $f(y_i) = -\frac{1}{\alpha} f^2(x_i) = x_i - 2y_i$, en composant par f, on a (2) : $\sum_{i=1}^{k} a_i(-\alpha y_i) + b_i(x_i - 2y_i)$. On élimine y_k en faisant $(\alpha a_k + 2b_k)(1) + b_k(2)$; le coeff de x_k est alors $a_k(\alpha a_k + 2b_k) + b_k^2 = (a_k + b_k)^2 + (\alpha - 1)a_k^2$. Si a_k ou b_k est non nul, le coeff de x_k est non nul et on trouve $x_k \in \mathrm{Vect}\{x_1, y_1, \dots, x_{k-1}, y_{k-1}\}$ ce qui est absurde. On montre ainsi la liberté de cette famille pour tout k, avec $k = n/2$ on a la base souhaitée

Exercice 14 *[sujet]* **1.** $\{0\}$ et E sont stables. Si f est une rotation de $\mathbb{R}^2$ d'angle $\pi/2$, alors f n'a pas de valeur propre donc il n'existe pas de droite stable et $\{0\}$ et $\mathbb{R}^2$ sont les seuls sev stables

2. $\ker(f) \neq \{0\}$ et $\ker(f) \neq E$ (car $f \neq 0$) est aussi un sev stable.
Si n est impair alors f admet 4 espaces stables : $\{0\}$, $\ker(f)$, $\mathrm{Im}(f)$ et E. $\ker(f) = \mathrm{Im}(f)$ est impossible en dimension impaire avec le th du rang.
f associé à $E_{1,2}$ (nilpotent) possède 3 espaces stables : $\{0\}$, $\ker(f) = \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\{e_1\}$ et $\mathbb{R}^2$.

3. Si $\mathcal{X}_f$ est SARS, on vérifie qu'un sev est stable si et seulement si il est engendré par une famille de vecteurs propres de f : si F est stable alors g induit par f sur F est DZ donc $F = \mathrm{Vect}\{u_i\}$ avec u_i des vp de g, ie des vp de f qui appartiennent à F (récip facile). On a donc $\binom{n}{k}$ sev de dimension k stables par f.
Si λ est vp multiple de f alors toute droite incluse dans $E_\lambda(f)$ (il y en a une infinité) est stable par f.

Exercice 15 *[sujet]* **1.** Pour $\gamma = 1$, $f(x) = \alpha e^x$. Pour $\gamma = -1$ on a $f'(x) = f(-x)$ donc f' est $\mathcal{C}^1$ et on a $f'(0) = f(-0) = \alpha$ et $f''(x) = -f'(-x) = -f(x)$ donc $f(x) = \alpha(\cos(x) + \sin(x))$

2. $R = +\infty$ par d'Alembert par ex, vérification de $f'(x) = f(\gamma x)$ facile

3. si $f'(x) = f(\gamma x)$ alors par récurrence, f est $\mathcal{C}^\infty$ et $f^{(n)}(x) = \gamma^{n(n-1)/2} f(\gamma^n x)$. Sur $[-A, A]$, on a $|f^{(n)}(x)| \leqslant \|f\|_{\infty,[-A,A]}$ donc $\left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \|f\|_{\infty,[-A,A]} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc f est DSE sur $[-A, A]$ pour tout A donc sur $\mathbb{R}$. En posant $f(x) = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$, on trouve que f est alors la fonction de 2) donc S_α est un singleton composé de la fonction définie en 2)

Exercice 16 *[sujet]* **1.** $\frac{1 - \cos^n x}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{n}{2}$ et $\frac{1 - \cos^n x}{x^2} \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

2. on pose $x = \sqrt{\frac{2t}{n}}$

3. $\lim_0 \frac{\ln(\cos t)}{t^2} = -\frac{1}{2}$

4. on trouve la limite de (v_n) par TCD : si $f_n(t) = \frac{1 - \cos^n\left(\sqrt{\frac{2t}{n}}\right)}{t\sqrt{t}}$, on a $\lim_{n\to+\infty} f_n(t) = \frac{1 - e^{-t}}{t\sqrt{t}}$. Reste la domination : si $t \geqslant 1$ alors $|f_n(t)| \leqslant \frac{2}{t\sqrt{t}}$; si $t < 1$ alors $\sqrt{\frac{2t}{n}} \in \left[0, \sqrt{\frac{2}{n}}\right] \subset [0, \alpha]$ si $n \geqslant n_0$ (n_0 ne dépend pas de t) et

$\cos^n\left(\sqrt{\dfrac{2t}{n}}\right) = \exp\left[n\ln\cos\left(\sqrt{\dfrac{2t}{n}}\right)\right] \geqslant \exp\left[-2n\dfrac{2t}{n}\right] = e^{-4t}$. On a donc $|f_n(t)| = f_n(t) \leqslant \dfrac{1-e^{-4t}}{t\sqrt{t}}$ sur $]0,1]$ si $n \geqslant n_0$.

On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-x}}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \overset{\text{IPP}}{=} \frac{2}{3}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \overset{x=t^2}{=} \frac{2}{3}\sqrt{\pi}$. Au final, $u_n \sim \dfrac{\sqrt{\pi n}}{3\sqrt{2}}$

Exercice 17 *[sujet]* **1.** degrés étagés

2. $Q^{(k)} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i P_k(b_i) X^{b_i-k}$ donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i P_k(b_i) = Q^{(k)}(1) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \leqslant n-1 \\ n!P(1) & \text{si } k = n \text{ (Leibniz)}\end{cases}$

3. $(S_n)_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i b_i^{j-1}$ or $X^{j-1} \in \mathrm{Vect}\{P_0,\dots,P_{j-1}\}$ donc, avec 2), $(S_n)_j = 0$ pour $j \leqslant n$. De plus $X^n = P_n + R$ avec $R \in \mathrm{Vect}\{P_0,\dots,P_{n-1}\}$ donc $(S_n)_{n+1} = n!P(1)$ donc $S_n = n!P(1)E_{n+1}$ (dernier vecteur de $\mathcal{B}_c$ de $\mathbb{R}^{n+1}$)

4. $|S_n, B_1, \dots, B_n| = 0$ car $S_n \in \mathrm{Vect}\{B_1,\dots,B_n\}$ et $|S_n, B_1, \dots, B_n| = \begin{vmatrix} 0 & V(b_1,\dots,b_n) \\ n!P(1) & b_1^n \ \dots \ b_n^n \end{vmatrix} = (-1)^n n!P(1)V(b_1,\dots,b_n)$. Comme les b_i sont deux à deux distincts, on en déduit $P(1) = 0$.

Exercice 18 *[sujet]* **1.** $xy'(x) + \alpha y(x) - xy(x)^2 = \alpha a_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left[(n+\alpha)a_n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k a_{n-1-k}\right] x^n$ donc y est solution ssi $a_0 = 1$ et $a_n = \dfrac{1}{n+\alpha}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k a_{n-1-k}$ puis on vérifie par récurrence $0 \leqslant a_n \leqslant 1$ donc $R \geqslant 1$

2. on a $0 \leqslant a_n \leqslant 1$ donc, pour $0 \leqslant x < 1$, $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

3. a) avec T-Y, comme $f(1) = 1$, on a $f(t) \underset{1}{=} f'(1)(t-1) + o(t-1)$ donc $\varphi \times f$ est bornée au voisinage de 1

b) On a $I \geqslant 0$ et $I = \displaystyle\int_0^1 t^\alpha f(t)^2 + 2\int_0^1 t^\alpha \varphi(t) f'(t) f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0 p^1 t^\alpha f'(t)^2\,\mathrm{d}t$. On a $t^\alpha\varphi(t)f(t)^2 \underset{1}{=} O(1-t)$ donc $2\displaystyle\int_0^1 t^\alpha\varphi(t)f'(t)f(t)\,\mathrm{d}t \overset{\text{IPP}}{=} -\int_0^1 t^{\alpha-1}\left[t\varphi'(t) + \alpha\varphi(t)\right]\mathrm{d}t \overset{(\mathcal{E})}{=} -\int_0^1 t^{\alpha-1}\left[\alpha + t\varphi(t)^2\right] f(t)^2\,\mathrm{d}t$ donc on a $I = \displaystyle\int_0^1 t^\alpha f(t)^2\,\mathrm{d}t - \alpha\int_0^1 t^{\alpha-1} f'(t)^2\,\mathrm{d}t$.

Exercice 19 *[sujet]* **1.** cours

2. $S_{n,0}$ facile ; si $k \geqslant 1$, $k\dbinom{n}{k} = n\dbinom{n-1}{k-1}$ donc $S_{n,1}(x) = n\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^k(1-x)^{n-k} - nxS_{n,0}(x) \overset{j=k-1}{=} nx(x+1-x)^{n-1} - nx = 0$

3. on a $\left|f\left(\dfrac{k}{n}\right) - f(x) - \left(\dfrac{k}{n} - x\right)f'(x)\right| \leqslant \dfrac{M}{2}\left(\dfrac{k}{n} - x\right)^2$ avec $M = \max\limits_{[0,1]}|f''|$ (th des bornes atteintes) ; en sommant et avec l'inég triangulaire, on obtient $\left|B_n(f) - S_{n,0}(x)f(x) - \dfrac{1}{n}S_{n,1}(x)f'(x)\right| \leqslant \dfrac{M}{2n^2}S_{n,2}(x)$ qui donne le résultat. $x(1-x) \leqslant \dfrac{1}{4}$ donc $\|B_n(f) - f\|_\infty \leqslant \dfrac{M}{8n}$ donc $(B_n(f))$ CVU sur $[0,1]$ vers f.

Exercice 20 *[sujet]* **1.** $\varphi_\lambda(t) \underset{t\to1}{\sim} \dfrac{2^{\lambda-1/2}}{(1-t)^{1/2-\lambda}}$ et $\dfrac{1}{2} - \lambda < 1$.

2. $|g(x,t)| \leqslant \varphi_\lambda(t)$ puis $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -t\varphi_\lambda(t)\sin(xt)$ donc $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant t\varphi_\lambda(t) \underset{1}{\sim} \varphi_\lambda(t)$ et $\left|\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant t^2\varphi_\lambda(t)$ indép de x et intégrable sur $[0,1[$.

$I''_\lambda(x) = -\displaystyle\int_0^1 t\cos(xt) \times t\varphi_\lambda(t)\,\mathrm{d}t \overset{\text{IPP}}{=} -\int_0^1 [\cos(xt) - x\sin(xt)]\frac{(1-t^2)^{\lambda+1/2}}{2\lambda+1}\,\mathrm{d}t$ puis $\displaystyle\int_0^1 \sin(xt)(1-t^2)^{\lambda+1/2}\,\mathrm{d}t \overset{\text{IPP}}{=} \int_0^1 x\cos(xt)\frac{(1-t^2)^{\lambda+3/2}}{2\lambda+3}\,\mathrm{d}t$

3. pour $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,1[$, $\cos(xt)\varphi_\lambda(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}\varphi_\lambda(t)}{(2n)!}x^{2n}$ puis TITT, avec $x \in \mathbb{R}$ fixé, (H4) $\displaystyle\int_0^1 |f_n(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{x^{2n}}{(2n)!}\int_0^1 \varphi_\lambda(t)\,\mathrm{d}t$

Exercice 21 *[sujet]* **1.** si $B = M + I_n$ alors $\mathcal{X}_B(B) = 0$ et le coeff constant de $\mathcal{X}_B$ est (-1)' $\det(B) \neq 0$ donc on en déduit $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $B^{-1} = Q(B) = Q(I_n + M) = P(M)$ avec $P(X) = Q(1+X) \in \mathbb{R}[X]$

2. Soit X tel que $MX = \pm X$, on a $(MX|X) = \pm\|X\|^2$ et $(MX|X) = X^T M^T X = -X^T MX = -(X|MX)$ donc $\|X\|^2 = 0$

3. si $N = f(M)$ alors $NN^T = (I_n + M)(I_n - M)^{-1}(I_n - M)(I_n + M)^{-1} = I_n$ et $\det(N) = \dfrac{\det(I_n + M)}{\det(I_n - M)} = \dfrac{\det(I_n + M)}{\det(I_n + M)^T} = +1$ donc $N \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$. Si $NX = -X$ alors avec 1, $I_n + M$ et $(I_n - M)^{-1}$ commutent donc $(I_n - M)X = (I_n + M)X$ donc $X = 0$.
récip, si $N \in \{N \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R}), -1 \notin \mathrm{Sp}(N)\}$ on résout $f(M) = N$ dont la seule solution est $M = (I_n - M)(I_n + M)^{-1}$ (qui existe car $-1 \notin \mathrm{Sp}(M)$) et on vérifie $N^T = -N$ donc $N \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$

4. ?

Exercice 22 *[sujet]* **1.** a) Par IPP, $\displaystyle\int_\lambda^{+\infty} x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x = \lambda^n e^{-\lambda} + n\int_\lambda^{+\infty} x^{n-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x$ ce qui donne le résultat avec $P(X \leqslant n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$

b) Par continuité croissante, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(X \leqslant n) = P(X \in \mathbb{N}) = 1$ donc $\displaystyle\int_\lambda^{+\infty} x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x \sim n!$

c) $G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$ donc $G_X(1) = 1$ et $G_X(-1) = e^{-2\lambda}$

d) $G_X(1) + G_X(-1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}(1 + (-1)^k) = 2\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}$ donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} = \frac{1}{2}e^\lambda(G_X(1) + G_X(-1)) = \mathrm{ch}(2\lambda)$

e) $(XY \in 2\mathbb{N}) = (X \in \mathbb{N}, Y = 2) \cup (X \in 2\mathbb{N}, Y = 1)$ donc $P(XY \in 2\mathbb{N}) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}P(X \in 2\mathbb{N}) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} = \dfrac{1}{2}\left(1 + e^{-\lambda}\,\mathrm{ch}(2\lambda)\right)$

2. a) $\|e_i\|^2 - \|e_i\|^4 = \displaystyle\sum_{j\neq i}(e_j|e_i)^2 \geqslant 0$ donc $\|e_i\| \leqslant 1$.

b) La liberté donne l'existence d'un tel x : E est de dimension au moins égale à n (ou infinie). On a $1 = \|x\|^2 = (e_n|x)^2$ puis par C-Sch $1 = (e_n|x)^2 \leqslant \|e_n\|^2\|x\|^2 = \|e_n\|^2$ donc $\|e_n\| \geqslant 1$ puis $\|e_n\| = 1$.

c) On trouve de même $\|e_i\| = 1$ donc avec l'égalité de a), il reste $\displaystyle\sum_{j\neq i}(e_j|e_i)^2 = 0$ donc $(e_j|e_i) = 0$ (somme de termes positifs nulle) donc (e_i) est orthonormale puis une base car si $E \neq \mathrm{Vect}\{e_i\}$, on prend $x \in \mathrm{Vect}\{e_i\}^\perp \setminus \{0\}$ et on a $\|x\|^2 = 0$ ce qui est absurde.

Exercice 23 *[sujet]* **1.** a) $\displaystyle\lim_{t\to 0} f(x,t) = x$ et $f(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$; impaire facile

b) g est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ avec $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \dfrac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)} \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$

c) décomposition en éléments simples facile puis, si $x^2 \neq 1$, $g'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}\Big[\arctan(t) - x\arctan(xt)\Big]_{t=0}^{t=+\infty} \overset{x\geqslant 0}{=} \dfrac{1}{1-x^2}\dfrac{\pi}{2}(1-x) = \dfrac{\pi}{2}(1+x)$ qui est aussi valable en $x = 1$ par continuité de g'

d) facile avec $g(0) = 0$ pour la constante d'intégration

e) $I = 2g(1)$ par IPP

2. a)

3. a) φ est un endomorphisme (cf cours compléments d'algèbre linéaire)

b) la matrice dans la base canonique de φ est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\mathcal{X}_f = (X-1)^2(X+1)^2$; $E_1(f) = \mathrm{Vect}\{X^2 + 1, X^3 + X\}$ et $E_{-1}(f) = \mathrm{Vect}\{X^2 - 1, X^3 - X\}$ donc DZ.

c) $\mathrm{Tr}(\varphi) = 0$ et $\det(\varphi) = 1$.

Exercice 24 *[sujet]* **1.** a) $y_0(x) = \dfrac{\alpha}{x^\lambda}$

b) $y(x) = \dfrac{1}{x^\lambda}\left(\alpha + \displaystyle\int_1^x \frac{t^{\lambda-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t\right)$

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{\lambda-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$ converge donc la seule solution éventuellement bornée est pour $\alpha = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{\lambda-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$ donc $y(x) = \dfrac{1}{x^\lambda}\displaystyle\int_0^x \frac{t^{\lambda-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$ qui est bien bornée car $|y(x)| \leqslant \dfrac{1}{x^\lambda}\displaystyle\int_0^x t^{\lambda-1}\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{\lambda}$

2. a) facile avec $(x|y) = XY^T$ et $A^T = -A$

b) $\det(A) = \det(A^T) = \det(-A) = (-1)^n \det(A)$ donc $\det(A) = 0$ si n est impair

c) $\mathrm{Im}(f)$ est bien stable par f donc cet endomorphisme g induit existe. g reste antisymétrique avec a) et si $x \in \ker(g)$, on a $g(x) = f(x) = 0$ et $x = f(u)$ donc $\|x\|^2 = (x|f(u)) = -(f(x)|u) = 0$ donc g est injectif. Avec b), on en déduit $\dim(\mathrm{Im}(f))$ est paire.

d) i. 3 est impair donc f n'est pas injectif ; on prend $e_1 \neq 0$ dans $\ker(f)$ puis (e_2, e_3) une bon de $\mathrm{Vect}\{e_1\}^\perp$. $D = \mathrm{Vect}\{e_1\}$ est stable par f donc, avec a), $D^\perp$ est aussi stable par f et la matrice de l'endomorphisme induit par f sur $D^\perp$ reste antisymétrique donc de la forme $\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$

ii. $\mathcal{X}_f = X(X^2 + a^2)$ donc A n'est pas DZ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ sauf pour $a = 0$ (ou A est nulle) par contre A est DZ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ car $\mathcal{X}_A$ est SARS dans $\mathbb{C}$ (si $a \neq 0$)

Exercice 25 *[sujet]* **1.** a) facile

b) cours

c) $E_\lambda(u)$ est une droite. Si e est un vp de u alors $D = \mathrm{Vect}\{e\}$ est une droite stable par v donc e est aussi un vp de v

d) toute base de vp de u convient ; Z_u est donc isomorphe (se placer dans une telle base) à l'ensemble des matrices diagonales donc $\dim(Z_u) = n$

2. a) $f(t) \underset{0}{\sim} \ln(t)$

b) $f(t) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{t^n}{n!}\ln(t)$ si $t \in]0,1]$ puis TITT (avec $f_n \leqslant 0$ pour la val abs) avec $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{(n+1)(n+1)!}$ puis chgt d'indice

Exercice 26 *[sujet]* **1.** a) $\displaystyle\sum \frac{1}{k!}$ CV

b) On a $e = \displaystyle\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + R_n$ donc $2n!\pi e = 2\pi \displaystyle\sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} + 2n!\pi R_n$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} \in \mathbb{N}$ donc $\sin(2n!\pi e) = \sin(2n!\pi R_n) \sim \dfrac{2\pi}{n+1}$ (SATP) donc $\sum \sin(2n!\pi e)$ DV

c) $(n+1)!R_n = 1 + \dfrac{1}{n+2} + \displaystyle\sum_{k\geqslant n+3} \frac{(n+1)!}{k!}$ et $\displaystyle\sum_{k\geqslant n+3} \frac{(n+1)!}{k!} \leqslant \sum_{k\geqslant n+3} \frac{1}{k(k-1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (reste de série CV).

2. a) facile

b) $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(AB) - \mathrm{Tr}(BA) = 0$ puis $A^k = A^kB - A^{k-1}BA$ donne aussi $\mathrm{Tr}(A^k) = 0$

c) récurrence

d) si A n'est pas nilpotente alors A^k est un vecteur propre de f associé à la valeur propre $k \in \mathbb{N}^*$ donc $\mathbb{N}^* \subset \mathrm{Sp}(f)$ qui est absurde car f a au plus n^2 vp

Exercice 27 *[sujet]* **1.** a) $f(t) = \dfrac{\sqrt{t}}{e^t - 1} \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ et $f(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$

b) $f(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{t}e^{-nt}$ puis TITT (chgt de variable pour le calcul des intégrales)

2. a) On peut remarquer $A = CC^T$ avec $C = \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix}$ donc $\mathrm{rg}(A) = 1$ et comme $\mathrm{Tr}(A) = 0$, on a $\mathcal{X}_A = X^3$ donc A n'est pas DZ (sinon elle serait semblable à 0 donc nulle)

b) Comme $A^2 = 0$, on a aussi $\varphi^2(X) = A^2XA^2 = 0$ donc $\varphi^2 = 0$ et $\mathrm{Sp}(\varphi) = \{0\}$ donc φ n'est pas DZ non plus

c) on a $f(X) = CC^TXCC^T = (C^TXC)CC^T$ car $C^TXC \in \mathbb{C}$ donc $f(X) \in \mathrm{Vect}\{A\}$ et $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\{A\}$ (car $f \neq 0$)

Exercice 28 *[sujet]* **1.** a) $\lim\limits_0 f = 1$ et par convexité de sh sur $\mathbb{R}^+$, on a $\mathrm{sh}(x) \geqslant x \geqslant 0$ donc $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ sur $\mathbb{R}^+$ donc sur $\mathbb{R}$ par parité.

b) $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

c) On applique le théorème de dérivation avec $|f_n'(x)| = \dfrac{2n\,\mathrm{ch}(nx)}{\mathrm{sh}^3\, nx}$ qui décroit (redériver) donc $\|f_n'\|_{\infty,[a,b]} = \dfrac{2n\,\mathrm{ch}(na)}{\mathrm{sh}^3\, na} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ si $[a,b] \subset \mathbb{R}^{+*}$

d) $f_n(x) = \dfrac{f(nx)^2}{n^2x^2}$ donc $S(x) = \dfrac{1}{x^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{f(nx)^2}{n^2}$ et par double limite, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{f(nx)^2}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2}$ car $\left|\dfrac{f(nx)^2}{n^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{n^2}$ donc CVN sur $]0,1]$

e) $\dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{\mathrm{sh}\, x}{x}$ est $\mathcal{C}^\infty$ car DSE sur $\mathbb{R}$ (utiliser le DSE de sh) et ne s'annule pas car $f(0) = 1$ donc f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$

2. a) cours

b) $X^3 - X^2 + X - 1 = (X-1)(X^2+1)$ donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \{1, i, -i\}$ avec (A réelle) $m_i(A) = m_{-i}(A)$ donc $\det(A) = 1^{m_1} \times |i|^{2m_i} = 1$

c) $\mathrm{Tr}(A) = m_1 + m_i(i - i) = m_1 = n - 2m_i$ donc, en particulier, $\mathrm{Tr}(A) \in [\![0, n]\!]$

Exercice 29 *[sujet]* **1.** a) $X + Y \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda+\mu)$ (cours)

b) $P(X = k | Z = n) = \dfrac{P(X = k, Y = n-k)}{P(Z = n)}$ donc on trouve $X_{(Z=n)} \hookrightarrow \mathscr{B}\left(n, \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)$

2. a) Si $x = a + b$ avec $f(a) = f^2(b) + b = 0$ alors $a = f^2(x) + x$ et $b = x - a$ donc la décomposition est unique si elle existe et si on pose $a = x + f^2(x)$ et $b = x - a$, on a $x = a + b$, $f(a) = f(x) + f^3(x) = 0$ donc $a \in \ker(f)$ et $f^2(b) + b = f^2(x) + x - f^2(a) - a = f^2(x) + x - a = 0$ donc $b \in \ker(f^2 + id)$ et $\mathbb{R}^3 = \ker(f) \oplus \ker(f^2 + id)$. Si on avait $\ker(f^2 + id) = \{0\}$, on aurait $\mathbb{R}^3 = \ker(f)$ donc $f = 0$, absurde

b) comme $x \neq 0$, si $(x, f(x))$ est liée alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \lambda x$ donc $f^2(x) = \lambda^2 x$ et $0 = f^2(x) + x = (\lambda^2 + 1)x$ ce qui est absurde car $x \neq 0$ et $1 + \lambda^2 \neq 0$ ($\lambda \in \mathbb{R}$)

c) on vient de prouver $\dim(\ker(f^2 + id)) \geqslant 2$ et si on avait $\dim(\ker(f^2 + id)) = 3$ alors on aurait $f^2 + id = 0$ donc $f^2 = -id$ puis $\det(f)^2 = \det(-id) = (-1)^3 = -1$ ce qui est absurde. On a donc $\dim(\ker(f^2 + id)) = 2$ et $\dim(\ker(f)) = 1$

d) il suffit de prendre une base adaptée à la décomposition de la première question en prenant une base de $\ker(f^2 + id)$ de la forme $(x, f(x))$.

e) Si $f = u^2$ alors $u \circ f = f \circ u = u^3$ donc u et f commutent donc $\ker(f)$ et $\ker(f^2 + id)$ sont stables par u. Dans la base précédente, la matrice de u est donc de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\alpha^2 = 0$ donc $\alpha = 0$ et $A^2 = B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Comme A et B commutent, A est de la forme $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ puis $\left\{\begin{array}{l} a^2 = b^2 \\ 2ab = -1 \end{array}\right.$ donc $a = -b$ ($ab < 0$) et $2a^2 = 1$; on a donc deux solutions $\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, donc $u = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}(f - f^2)$

Exercice 30 *[sujet]* **1.** a) $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n}{k}\dbinom{n-1}{k-1}$

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(X = k) = \dfrac{a}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\dbinom{n+1}{k+1} = \dfrac{a}{n+1}(2^{n+1} - 1)$ donc $a = \dfrac{n+1}{2^{n+1} - 1}$

c) Le même calcul donne $G_X(t) = \dfrac{(1+t)^{n+1} - 1}{(2^{n+1} - 1)t}$ puis $E(X) = \dfrac{n2^{n+1} + 1}{2^{n+1} - 1}$ et $V(X) = \dots$

2. a) Si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = D$ alors $\mathrm{Mat}\,\mathcal{B}(u^2) = D^2$ reste diagonale

b) $E_{1,2}$ n'est pas DZ mais $E_{1,2}^2 = 0$ l'est

c) analyse : si $x = a + b \in \ker(u^2 - \lambda^2 id)$ alors $u(x) = \lambda(a - b)$ donc $a = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{1}{\lambda}u(x)\right)$ et $b = \dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{1}{\lambda}u(x)\right))$ donc la déc est unique si elle existe. Récip, pour un tel choix de a et b, on a $x = a + b$, $u(a) = \dfrac{1}{2}\left(u(x) + \dfrac{1}{\lambda}u^2(x)\right) = \dfrac{1}{2}(u(x) + \lambda x) = \lambda a$; de même $u(b) = -\lambda b$. On a donc $\ker(u^2 - \lambda^2 id) \subset \ker(u - \lambda id) \oplus \ker(u + \lambda id)$ (récip facile)

d) Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les vp distinctes de u^2. Il existe des complexes μ_i tels que $\mu_i^2 = \lambda_i$ et on a $\mathbb{C}^n = \displaystyle\bigoplus_{1\leqslant i\leqslant r} E_{\lambda_i}(u^2)$

— si u est bijectif alors $\lambda_i \neq 0$ donc $E_{\lambda_i}(u^2) = E_{\mu_i}(u) \oplus E_{-\mu_i}(u)$ donc $\mathbb{C}^n = \displaystyle\bigoplus_{1\leqslant i\leqslant r}(E_{\mu_i}(u) \oplus E_{-\mu_i}(u))$ et u est DZ

— sinon, on suppose $\lambda_1 = 0$ et on a $\mathbb{C}^n = \ker(u^2) \oplus \bigoplus_{2\leqslant i\leqslant r} E_{\lambda_i}(u^2)$; avec $\ker(u) = \ker(u^2)$ et ce qui précède, on a $\mathbb{C}^n = \ker(u) \oplus \bigoplus_{2\leqslant i\leqslant r} (E_{\mu_i}(u) \oplus E_{-\mu_i}(u))$ donc u est DZ

Exercice 31 *[sujet]* **1.** a) Si $x \neq 0$ alors $u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n^2}$ et $u_n(0) = 0$ donc $D = \mathbb{R}$ (et S est paire.

b) $\|u_n\|_{\infty,[-a,a]} = u_n(a)$ donc CN sur tout segment de $\mathbb{R}$.

c) Pour $x > 0$, $0 \leqslant u_n'(x) = \dfrac{2x}{\ln(1+n)(1+n^2x^2)} \leqslant \displaystyle\int_{n-1}^{n} \frac{2x}{\ln(1+t)(1+t^2x^2)}\,\mathrm{d}t$ donc $\sum u_n'(x)$ CS et $0 \leqslant R_n(x) \leqslant \displaystyle\int_{n}^{+\infty} \frac{2x}{\ln(1+t)(1+t^2x^2)}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{\ln(1+n)} \int_{n}^{+\infty} \frac{2x}{1+x^2t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\ln(1+n)}\Big[\arctan(xt)\Big]_{t=n}^{t=+\infty} \leqslant \frac{\pi}{\ln(1+n)}$ donc CVU sur $\mathbb{R}^+$ puis sur $\mathbb{R}$ par imparité.

d) Facile

2. a) seul défini positif pose pb : si les a_i sont 2 à 2 distincts et $\varphi(P,P) = 0$ alors P admet $n+1$ racines distinctes et $\deg(P) \leqslant n$ donc $P = 0$ et on a un produit scalaire. Si $a_0 = a_1$ par exemple et $P = \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(X - a_i) \in \mathbb{R}_n[X]$ alors $P \neq 0$ et $\varphi(P,P) = 0$ donc pas un produit scalaire.

b) $F^\perp = \mathrm{Vect}\{Q\}$ avec $Q = 1$

c) $d(X^n, F) = \|\pi_{F^\perp}(X^n)\| = \dfrac{|\varphi(X^n,Q)|}{\sqrt{n+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k^n$

Exercice 32 *[sujet]* **1.** a) on a $u_n > 0$ donc (u_n) existe puis $u_n < 1$, puis $u_n > \dfrac{1}{2}$ et $|u_{n+1} - u_n| = \dfrac{|u_n - u_{n-1}|}{(1+u_n)(1+u_{n-1})} \leqslant \dfrac{4}{9}|u_n - u_{n-1}|$ ce qui donne $|u_{n+1} - u_n| \leqslant C\left(\dfrac{4}{9}\right)^n$ donc $\sum(u_{n+1} - u_n)$ est ACV. La limite vérifie $\ell \geqslant 0$ et $\ell = \dfrac{1}{1+\ell}$ donc $\ell = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

b) si $u_n = \dfrac{p_n}{q_n}$ alors $u_{n+1} = \dfrac{q_n}{p_n + q_n}$ donc on pose $p_{n+1} = q_n$ et $q_{n+1} = p_n + q_n$ puis $X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$ et on a $X_{n+1} = AX_n$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Puis $A^n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] A + \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right] I_2$ et $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $X_n = \dots$ puis $u_n = \dots$

2. a) Sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on a $0 \leqslant \sin x \leqslant x$ donc $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$; la suite (u_n) est donc CV vers l tel que $l = \sin(l)$ (car sin est $\mathcal{C}^0$) donc $l = 0$ (étudier $x \mapsto x - \sin x$).

b) $\sum u_{n+1} - u_n$ CV (télescopique) et comme u_n tend vers 0, on a $u_{n+1} - u_n \sim -\dfrac{1}{6}u_n^3$ (négatif) donc $\sum u_n^3$ CV.

c) $\ln \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$ est une série télescopique DV puisque $(\ln(u_n))$ DV vers $-\infty$. Comme (u_n) tend vers 0, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{u_n^2}{6} + o(u_n^2)$ donc $\ln \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \sim -\dfrac{1}{6}u_n^2$ négatif donc $\sum u_n^2$ DV aussi.

Exercice 33 *[sujet]* **1.** a) seul défini positif pose pb : si les a_i sont 2 à 2 distincts et $\varphi(P,P) = 0$ alors P admet $n+1$ racines distinctes et $\deg(P) \leqslant n$ donc $P = 0$ et on a un produit scalaire. Si $a_0 = a_1$ par exemple et $P = \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(X - a_i) \in \mathbb{R}_n[X]$ alors $P \neq 0$ et $\varphi(P,P) = 0$ donc pas un produit scalaire.

b) $F^\perp = \mathrm{Vect}\{Q\}$ avec $Q = 1$

c) $d(X^n, F) = \|\pi_{F^\perp}(X^n)\| = \dfrac{|\varphi(X^n,Q)|}{\sqrt{n+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k^n$

2. a) $\varphi(f)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$ et f étant continue en 0, on a (T-Y) $f(t) \underset{0}{=} f(0) + o(1)$ puis, en intégrant, $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \underset{0}{=} 0 + f(0)x + o(x)$ et $\lim\limits_{0} \varphi(f) = f(0)$ donc $\varphi(f)$ est continue en 0 donc dans E. La linéarité est évidente.

b) Si $\varphi(f) = 0$ alors $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ pour $x \in]0,1]$; en dérivant on obtient $f(x) = 0$ sur $]0,1]$ donc sur $[0,1]$ par continuité en 0.

c) $\varphi(f)=f$ si et seulement si $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = xf(x)$ pour $x\in]0,1]$ (l'égalité est évidente en $x=0$) ; comme $\varphi(f)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$, $f=\varphi(f)$ est forcément $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$. En dérivant, on a $f(x)=f(x)+xf'(x)$ pour $x\in]0,1]$ donc f est constante sur $]0,1]$ donc sur $[0,1]$ par continuité en 0. On a donc $1\in\mathrm{Sp}(\varphi)$ et $E_1(\varphi)=\mathrm{Vect}\{1\}$ (ensemble des fonctions constantes)

d) On fait de même avec $\lambda\notin\{0,1\}$, on a $\varphi(f)=\lambda f$ si et seulement si $f(0)=\lambda f(0)$ (donc $f(0)=0$) et $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \lambda xf(x)$ si $x\in]0,1]$. On prouve comme précédemment que f est $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$ et on a $f(x)=\lambda(f(x)+xf'(x))$ donc f est solution sur $]0,1]$ de $y'(x)=\left(\dfrac{1}{\lambda}-1\right)xy(x)$ dont les solutions sont $y(x)=\alpha x^{1/\lambda-1}$. De telles fonctions se prolongent en 0 avec $y(0)=0$ si et seulement si $\dfrac{1}{\lambda}-1>0\Leftrightarrow\lambda\in]0,1[$. Au final $\mathrm{Sp}(\varphi)=]0,1]$ et $E_\lambda(\varphi)=\mathrm{Vect}\left\{x\mapsto x^{1/\lambda-1}\right\}$ (dte)

Exercice 34 *[sujet]* **1.** a) non

b) fait plusieurs fois

c) si $f=g^2$ alors $g^{2p}=0$ donc g est nilp et $g^{2p-2}=f^{p-1}\neq 0$ donc $2p-2\leqslant n-1$

2. a) $\partial_1 h(u,v)=\alpha\partial_1 g(\alpha u+\beta v,\beta u-\alpha v)+\beta\partial_2 g(\alpha u+\beta v,\beta u-\alpha v)$

b) Si $\alpha=\beta=1$, on a $\partial_1 h(u,v)=0$ donc $h(u,v)=\varphi(v)$

c) $(u,v)\mapsto(u+v,u-v)$ est bien bijectif ; $v=\dfrac{x-y}{2}$ donc $g(x,y)=\psi(x-y)$ avec $\psi\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

Exercice 35 *[sujet]* **1.** a) $P(Y=n)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}P(X=k,Y=n)=p(1-p)^n$ donc $1+Y\sim\mathscr{G}(p)$

b) dériver k fois le DSE de $\dfrac{1}{1-x}$ puis $P(X=k)=\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty}P(X=k,Y=n)=\dfrac{2p}{1+p}\left(\dfrac{1-p}{1+p}\right)^k$ donc $1+X\sim\mathscr{G}\left(\dfrac{2p}{1+p}\right)$

c) $P(X=1,Y=0)=0$ mais $P(X=1)P(Y=0)\neq 0$

2. a) $\mathrm{rg}(B)=n+\mathrm{rg}(A)$

b) Par $C_2\leftarrow C_2+\dfrac{1}{\lambda}C_1$ (par blocs), on trouve $\mathcal{X}_B(\lambda)=\lambda^n\det\left(\lambda I_n-\dfrac{1}{\lambda}A\right)=\mathcal{X}_A(\lambda^2)$ donc $\mathcal{X}_B(X)$ et $\mathcal{X}_A(X^2)$ sont deux polynômes qui coïncident sur $\mathbb{C}^*$ donc sont égaux. Les vp de B sont les racines carrées des vp de A.

c) Si $\mathcal{X}_A=\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(X-\alpha_i)$ SARS alors $\mathcal{X}_B=\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(X-\beta_i)(X+\beta_i)$ avec $\pm\beta_i$ les racines carrées complexes des α_i donc $\mathcal{X}_B$ reste SARS

d) Avec $n=1$ et $A=0$, on a $\mathcal{X}_A$ SARS mais B n'est plus DZ (nilpotente non nulle)

e) On a $B^2=\begin{pmatrix}A&0\\0&A\end{pmatrix}$ donc si B est DZ alors B^2 aussi dans A aussi

f) Si B est DZ alors $m_0(B)=2m_0(A)$ et $\dim(E_0(B))=\dim(E_0(A))$ (avec le th du rg et la première question) ; comme A est DZ, on a $\dim(E_0(A))=m_0(A)$; on en déduit $m_0(A)=0$ donc A est inversible.
Réciproquement si A est DZ et inversible alors $\alpha_i\neq 0$ donc $m_{\alpha_i}(A)=m_{\beta_i}(B)$ et on vérifie $\dim(E_{\alpha_i}(A))=\dim(E_{\beta_i}(B))$ car $\mathrm{rg}(B-\beta_i I_{2n})=n+\mathrm{rg}(A-\alpha_i I_n)$ (faire $C_2\leftarrow C_2+\beta_i iC_1$ puis $L_2\leftarrow L_2+\beta_i I_n$)

Exercice 36 *[sujet]* **1.** a) $\mathcal{X}_A=(X-2)^3$

b) Non car sinon elle serait semblable à $2I_3$ et $P2I_3P^{-1}=2I_3\neq A$.

c) avec $u=(1,2,0)$ et $v=(0,3,-1)$ 2 vp associés à 2 et $w=(0,0,1)$ par ex, $A=P\begin{pmatrix}2&0&3\\0&2&-3\\0&0&2\end{pmatrix}$ si $P=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&3&0\\0&1&1\end{pmatrix}$

2. a) f_n est impaire et, si $x>0$, $f_n(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}2e^{-nx}$ et $0<e^{-x}<1$ donc $D=\mathbb{R}^*$

b) CVNTS de $\mathbb{R}^{+*}$ avec $|f_n(x)|\leqslant f_n(a)$ si $x\in[a,b]\subset\mathbb{R}^{+*}$

c) f_n décroit sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc f aussi

d) $\dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} nx} = e^{-(n-1)x}\dfrac{1-e^{-2x}}{1-e^{-2nx}} \leqslant e^{-(n-1)x}$. On a alors $0 \leqslant f(x) - \dfrac{1}{\operatorname{sh} x} = \dfrac{1}{\operatorname{sh} 2x} + \displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} f_n(x) \leqslant \dfrac{1}{\operatorname{sh} 2x} + \displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} e^{-(n-1)x} = \dfrac{1}{\operatorname{sh} 2x} + \dfrac{e^{-2x}}{1-e^{-x}} \underset{+\infty}{=} o\left(e^{-x}\right)$ et $\dfrac{1}{\operatorname{sh} x} \underset{+\infty}{\sim} 2e^{-x}$

Exercice 37 *[sujet]* **1.** a) $\displaystyle\sum \frac{1}{1+k^2}$ CV

b) $\displaystyle\int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \leqslant a_n \leqslant \int_{n-1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ donc $a_n \sim \dfrac{\pi}{2} - \arctan(n) = \arctan\left(\dfrac{1}{n}\right) \sim \dfrac{1}{n}$

c) $R = 1$ par équivalent, $\sum a_n$ DV et $\sum an(-1)^n$ CV par CSSA ((a_n) est bien décroissante et tend vers 0) donc $D = [-1, 1[$

2. a) facile

b) $\mathcal{X}_B = X(X-2)^2$ puis $E_0(B) = \operatorname{Vect}\{(1,0,1)\}$ et $E_2(B) = \operatorname{Vect}\{(1,1,0),(1,0,-1)\}$ donc B est DZ

c) i. $\mathcal{X}_A = (X-2)(X^2+2X-1)$ (SARS)

ii. Si X est un vp de B et Y un vp de A^T associés à 2, on pose $M = XY^T \neq 0$ (à vérifier) et on a $M \in \mathcal{E}$

iii. Avec $X_1 = (1,1,0)$ et $Y = (0,1,1)$ puis $X_2 = (1,0,-1)$ et Y on a deux matrices de $\mathcal{E}$ linéairement indépendantes

d) par récurrence $B^kM = MA^k$ puis $P(B)M = MP(A)$. Avec $P = \mathcal{X}_A$ et C-Ham, on a $\mathcal{X}_A(B)M = 0$ donc comme B^2+2B-I_3 est inversible, on a $(B-2I_3)M = 0$ puis $\operatorname{Im}(M) \subset E_2(B)$. On fait de même avec $P = \mathcal{X}_B$: on arrive à $M(A-2I_3)^2 = 0$, ie $(A^T-2I_3)^2M^T = 0$; comme A est DZ, on a $\ker(A^T-2I_3)^2 = \ker(A^T-2I_3) = \operatorname{Vect}\{Y\}$ puis $\operatorname{Im} M^T \subset \ker(A^T-2I_3)$. On en déduit que M^T est de rang 1 donc peut s'écrire $M^T = YC^T$ avec $C \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On revient à $M = CY^T$ qui donne $C \in \operatorname{Im}(M)$ donc $C \in \operatorname{Vect}\{X_1, X_2\}$. Toutes les matrices de cette forme ($M = \alpha X_1Y^T + \beta X_2Y^T$) conviennent comme on l'a vu avant donc $\dim(\mathcal{E}) = 2$.

Exercice 38 *[sujet]* **1.** a) $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n}{k}\dbinom{n-1}{k-1}$

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(X=k) = \frac{a}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1} = \frac{a}{n+1}(2^{n+1}-1)$ donc $a = \dfrac{n+1}{2^{n+1}-1}$

c) Le même calcul donne $G_X(t) = \dfrac{(1+t)^{n+1}-1}{(2^{n+1}-1)t}$ puis $E(X) = \dfrac{n2^{n+1}+1}{2^{n+1}-1}$ et $V(X) = \dots$

2. a) $P(1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$ donc $H_0 = \{1+X+\cdots+X^n\}^\perp$ (hyperplan)

b) $P \in H_1$ si et seulement si $P = 1-Q$ avec $Q \in H_0$. On demande donc $d(1, H_0) = \|\pi_{H_0^\perp}(1)\| = \dfrac{|(1|1+\cdots+X^n)|}{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$

Exercice 39 *[sujet]* **1.** a) Cours

b) $x^2(1-x)f''(x) - x(1+x)f'(x) + f(x) = a_0 + \displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(n-1)^2(a_n - a_{n-1})x^n$

c) $a_0 = 0$ et $(n-1)^2(a_n - a_{n-1}) = 0$ si $n \geqslant 1$ donc $a_n = a_{n-1}$ si $n \geqslant 2$.

d) $R = 1$ (si $a_1 \neq 0$) et $f(x) = a_1\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} x^n = a_1\frac{x}{1-x}$ pour $|x| < 1$.

2. a) $\operatorname{rg}(A) = 2$ donc $\dim(\ker(A)) = n-2$

b) symétrique réelle

c) 0 est vp de mult $n-2 = \dim(E_0(A))$ (car DZ) ; il reste 2 vp telles que $\lambda + \mu = \operatorname{Tr}(A) = 1$ et $\lambda^2 + \mu^2 = \operatorname{Tr}(A^n) = 1 + 2\displaystyle\sum_{k=2}^{n} k^2 = 2s_n - 1$ si $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. On trouve alors $\lambda\mu = 1 - s_n$ donc une vp est > 0, l'autre < 0 ; comme $\lambda + \mu = 1$, si λ est la vp positive, on a $\lambda = 1 - \mu > 1$.

d) $X(X-\lambda)(X-1+\lambda) = X(X^2 - X + 1 - s_n)$ car A est DZ

Exercice 40 *[sujet]* **1.** a) $P(M_n \leqslant k) = P\left(\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n}(X_i \leqslant k)\right) \overset{\text{indép}}{=} \displaystyle\prod_{i=1}^{n} P(X_i \leqslant k) = \left(\frac{k}{N}\right)^n$ puis $P(M_n = k) = P(M_n \leqslant k) - P(M_n \leqslant k-1) = \left(\dfrac{k}{N}\right)^n - \left(\dfrac{k-1}{N}\right)^n$

b) i. $E(M_n)=\sum_{k=1}^{N}k(P(M_n>k-1)-P(M_n>k))=\sum_{j=0}^{N-1}(j+1)P(M_n>j)-\sum_{k=0}^{N}kP(M_n>k)=\sum_{k=0}^{N-1}P(M_n>k)$ (le dernier terme de la somme de droite est nul). $P(M_n>k)=1-\left(\frac{k}{N}\right)^n$ donc $E(M_n)=N-\sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{k}{N}\right)^n$

ii. $\lim E(M_n)=N$: plus on fait de tirages, plus on augmente les chances d'avoir la boule N

c) i. $E(M_n(M_n-1))\overset{\text{transf}}{=}\sum_{k=1}^{N}k(k-1)(P(M_n>k-1)-P(M_n>k))=\sum_{j=0}^{N-1}j(j+1)P(M_n>j)-\sum_{k=1}^{N}k(k-1)P(M_n>k)=2\sum_{k=1}^{N-1}P(M_n>k)$ puis $V(M_n)=E(M_n(M_n-1))+E(M_n)-E(M_n)^2=N(N-1)-2\sum_{k=1}^{N-1}k\left(\frac{k}{N}\right)^k+E(M_n)-E(M_n)^2$

ii. $\lim V_n=N(N-1)+N-N^2=0$: la dispersion des résultats tend vers 0 puisqu'on a presque toujours la même valeur

2. a) A et B sont DZ et semblables à la même matrice diagonale

b) 0 et une matrice nilpotente non nulle ($E_{1,n}$ par exemple)

Exercice 41 *[sujet]* **1.** a) $X+Y\hookrightarrow\mathscr{P}(\lambda+\mu)$ (cours)

b) $P(X=k|Z=n)=\dfrac{P(X=k,Y=n-k)}{P(Z=n)}$ donc on trouve $X_{(Z=n)}\hookrightarrow\mathscr{B}\left(n,\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)$

2. a) facile

b) attention au cas $n=0$: $t^n\ln t\underset{0}{=}o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ et $I_n\overset{\text{IPP}}{=}\dfrac{-1}{(n+1)^2}$

c) facile : trouver une bon (f_0,f_1) de F puis $\pi_F(g)=(f_0|g)f_0+(f_1|g)f_1$

d) c'est $d(g,F)^2=\|g\|^2-(f_0-g)^2-(f_1|g)^2$

Exercice 42 *[sujet]* **1.** a) $P(Y=n)=\sum_{k=0}^{n}P(X=k,Y=n)=p(1-p)^n$ donc $1+Y\sim\mathscr{G}(p)$

b) dériver k fois le DSE de $\dfrac{1}{1-x}$ puis $P(X=k)=\sum_{n=k}^{+\infty}P(X=k,Y=n)=\dfrac{2p}{1+p}\left(\dfrac{1-p}{1+p}\right)^k$ donc $1+X\sim\mathscr{G}\left(\dfrac{2p}{1+p}\right)$

c) $P(X=1,Y=0)=0$ mais $P(X=1)P(Y=0)\neq0$

2. a) $\ker(f^2)=\mathrm{Vect}\{(1,-1,0),(1,0,1)\}$ et $\ker(f-2id)=\mathrm{Vect}\{(1,1,0)\}$ puis on vérifie que les 3 vecteurs sont libres

b) $(1,-1,0)$ convient

c) on pose $u_1=(0,1,1)$ et $u_3=(1,1,0)$; on cherche u_2 tel que $f(u_2)=u_1$; $u_2=\frac{1}{4}(-1,1,0)$ convient et on vérifie que l'on a une base ; on peut aussi prendre $\mathcal{B}=(f(v),v,u_3)$ avec $v=(1,-1,0)$

d) f^2 est un polynôme en g donc g et f^2 commutent. Si h est l'endomorphisme de $\ker(f^2)$ induit par g, on a $h^4(x)=g^4(x)=f^2(x)=0$ donc h est nilpotent ; $\dim(\ker(f^2))=2$ donc $\mathcal{X}_h=X^2$ et (C-Ham) $h^2=0$. On devrait donc avoir $f(x)=h^2(x)=0$ pour tout vecteur de $\ker(f^2)$, ie $\ker(f)=\ker(f^2)$ ce qui est absurde donc un tel g n'existe pas.

Exercice 43 *[sujet]* **1.** a) $\dfrac{x}{\operatorname{sh}x}\xrightarrow[x\to0]{}1$ et $\dfrac{x}{\operatorname{sh}x}\underset{+\infty}{\sim}2xe^{-x}=o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

b) $\dfrac{x}{\operatorname{sh}x}=\dfrac{2xe^{-x}}{1-e^{-2x}}\overset{x\geq0}{=}2\sum_{n=0}^{+\infty}xe^{-(2n+1)x}\,\mathrm{d}x$ puis TITT (H4) $\int_0^{+\infty}|f_n(x)|\,\mathrm{d}x\overset{\text{IPP}}{=}\dfrac{2}{(2n+1)^2}$

2. a) $(u(x)|y)=(AX)^TY=X^T(A^TY)=(x|v(y))$

b) si $x\in F^\perp$ et $y\in F$ alors $(v(x)|y)=(x|u(y))=0$ car $u(y)\in u(F)\subset F$

c) i. $\mathcal{X}_A=(X-1)^3$ et $E_1(A)=\mathrm{Vect}\{(1,0,0)\}$ donc pas DZ

ii. Une seule droite stable $E_1(A)$; si P est un plan stable alors $P^\perp$ est une droite stable par v donc $P^\perp=E_1(A^T)=\mathrm{Vect}\{(0,1,0)\}$ qui est bien le seul plan stable.

Exercice 44 *[sujet]* **1.** a) $X\sim\mathscr{B}(n,p)$ puis cours

b) $Z(\Omega) = [\![0, n]\!]$

c) $(Z=0)$ est l'événement « avoir 2 échecs consécutifs » donc $P(Z=0) = q^{2n}$.
$(Z=1) \overset{\text{incomp}}{=} (X=1, Y=0) \cup (X=0, Y=1)$ puis $P(X=1, Y=0) = npq^{n-1} \times q^{n-1}$ et $P(X=0, Y=1) = q^n \times npq^{n-1}$

d) $P(Y=h|X=k) = \binom{n-k}{h} p^h q^{n-k-h}$ pour $0 \leqslant h \leqslant n-k$

e) relation facile puis $P(Z=j) = \sum_{k=0}^{j} P(Y=j-k|X=k)P(X=k) \overset{\text{rel}}{=} \binom{n}{j} p^j \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} q^{2n-j-k} = \binom{n}{j} [p(1+q)]^j (1-q^2)^j$ donc $Z \sim \mathscr{B}(n, q^2)$

2. a) $\mathcal{X}_A = (X-1)(X-2)(X-3)$ SARS

b) Si $A = P\text{diag}(1,2,3)P^{-1}$ alors $X(t) = P \begin{pmatrix} \alpha e^t \\ \beta e^{2t} \\ \gamma e^{3t} \end{pmatrix}$

Exercice 45 *[sujet]* **1.** a) $u(x) = x^2$

b) z est solution de $xz'' + 4z' = 0$ donc $y_0(x) = \alpha x^2 + \dfrac{\beta}{x}$

c) sur $\mathbb{R}^{+*}$ (ou $\mathbb{R}^{-*}$), $y(x) = \alpha x^2 + \dfrac{\beta}{x} + \dfrac{x^3}{4}$ puis sur $\mathbb{R}$, $y(x) = \alpha x^2 + \dfrac{x^3}{4}$

2. a) $\mathcal{X}_A = (X-3)^3$ et $\dim(E_3(A)) = 1$

b) Une seule droite stable : $E_3(A)$

c) i. cours

ii. $\deg(\mathcal{X}_{a'}) = \dim(P) = 2$ donc $\mathcal{X}_{a'} = (X-3)^2$ et avec C-Ham, $P = \ker(a' - 3id)^2 \subset \ker(a - 3id)^2$

iii. On vérifie que $\ker(a-3id)^2$ est bien un plan (donc $= P$) et c'est le seul plan stable.

Exercice 46 *[sujet]* **1.** a) $\mathcal{X}_M = (X-b)(X-a-c)(X-a+c)$

b) $\ker(M(a,0,a)) = \text{Vect}\{(1,0,-1),(0,1,0)\}$ et $\ker(M(a,b,a)) = \text{Vect}\{(1,0,-1)\}$

c) $det(M(a,b,c)) = b(a-c)(a+c)$. Si $b=0$ et $|a| \neq |c|$ $\ker(M(a,0,c)) = \text{Vect}\{(1,0,-1)\}$ et $\text{Im}(M(a,b,c)) = \text{Vect}\{(a,0,c),(c,0,a)\}$. Si $b=0$ et $a=c$, $\ker(M(a,0,a)) = \text{Vect}\{(1,0,-1),(0,1,0)\}$ et $\text{Im}(M(a,0,a)) = \text{Vect}\{(1,0,1)\}$. Si $b=0$ et $a=-c$, $\ker(M(a,0,-a)) = \text{Vect}\{(1,0,1),(0,1,0)\}$ et $\text{Im}(M(a,0,a)) = \text{Vect}\{(1,0,-1)\}$. Si $b \neq 0$ et $a=c$, $\ker(M(a,b,a)) = \text{Vect}\{(1,0,-1)\}$ et $\text{Im}(M(a,b,a)) = \text{Vect}\{(1,0,1),(0,1,0)\}$. Si $b \neq 0$ et $a=-c$, $\ker(M(a,b,-a)) = \text{Vect}\{(1,0,1)\}$ et $\text{Im}(M(a,b,a)) = \text{Vect}\{(1,0,-1),(0,1,0)\}$.

d) $M(a,b,c)$ est DZ car symétrique réelle et $M(a,b,c) = P\text{diag}(b, a+c, a-c)P^{-1}$ avec $P = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ donc $P^{-1} = {}^tP$

2. a) $\left|\varphi\left(\dfrac{x}{2^n}\right)\right| \leqslant C\dfrac{a}{2^n}$ donc CVN sur I

b) facile

c) si f et g sont solutions et $u = f - g$, on a $u(x) = u\left(\dfrac{x}{2}\right) \overset{\text{rec}}{=} u\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$ et, comme u est continue en 0, en faisant tendre n vers $+\infty$, on trouve $u(x) = u(0) = 0$ donc u est nulle. Il y a donc une unique solution (qui est S)

d) si $u_n(x) = \varphi\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$ alors $|u_n'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2^n}\|\varphi'\|_\infty$ car φ' est continue donc bornée sur le segment I. $\sum u_n'$ CVN sur I donc S est $\mathcal{C}^1$.

Exercice 47 *[sujet]* **1.** a) $f(x,t) \xrightarrow[t\to 0]{} x$ et $f(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$

b) $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant e^{-t}$

c) $\varphi'(x) = \text{Re}\left(\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-(1-ix)t}\,\text{d}t\right) = \dfrac{1}{1+x^2}$ et $\varphi(0) = 0$ donc $\varphi(x) = \arctan(x)$

2. a) $Y(\Omega) \subset [2, +\infty[\cap \mathbb{N}$ et pour $k \geqslant 2$, $(Y=k)$ si on tire le même jeton qu'au premier tirage (proba 1/3) aux tirages $2, \ldots, k-1$ et un autre jeton (proba 2/3) au tirage k. Par indépendance mutuelle des tirages, on a $P(Y=k) = \dfrac{1}{3^{k-2}}\dfrac{2}{3}$

b) $Y - 1 \hookrightarrow \mathscr{G}\left(\dfrac{2}{3}\right)$ donc $E(Y) = 1 + \dfrac{3}{2} = \dfrac{5}{2}$ et $V(Y) = \dfrac{1-2/3}{(2/3)^2} = \dfrac{3}{4}$

c) si $k > h$, $P(Y = k, Z = h) = P(Z = h|Y = k)P(Y = k)$ et si $(Y = k)$ est réalisé, on aura $(Z = h)$ si et seulement si on tire un des deux jetons tirés au cours des tirages $k+1, \dots, h-1$ (proba $2/3$) et le dernier jeton (proba $1/3$) au tirage k donc $P(Z = h|Y = k) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{h-k-1} \dfrac{1}{3}$ puis $P(Y = k, Z = h) = \dfrac{1}{3^{k-1}} \left(\dfrac{2}{3}\right)^{h-k}$

d) pour $h \geqslant 3$, on a $P(Z = h) = \displaystyle\sum_{k=2}^{h-1} P(Y = k, Z = h) = \dfrac{2^{h-1} - 2}{3^{h-1}}$ puis $E(Z) = \dfrac{11}{2}$

Exercice 48 *[sujet]* **1.** a) cours

b) fait en cours

c) $\displaystyle\inf_{X\in\mathbb{R}^n} (f(X)) = d(Y, \mathrm{Im}(A))$ est atteinte en un unique point $Y_0 = \pi_{\mathrm{Im}(A)}(Y)$ donc $f(X_0) = d(Y, \mathrm{Im}(A))$ si et seulement si $AX_0 = Y_0$. Par définition du projeté orthogonal, on a $AX_0 = Y_0$ si et seulement si $AX_0 \in \mathrm{Im}(A)$ (évident) et $Y - AX_0 \in \mathrm{Im}(A)^\perp = \ker({}^tA)$ donc si et seulement si ${}^tA(Y - AX_0) = 0$.

2. a) $\dfrac{1}{2}t^n \leqslant \dfrac{t^n}{1+t^2} \leqslant t^n$ donc $\dfrac{1}{2(n+1)} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ et $R = 1$

b) $\dfrac{1}{(1+t^2)(1-xt)} = \dfrac{1}{1+x^2}\left(\dfrac{xt+1}{1+t^2} + \dfrac{x^2}{1-xt}\right)$

c) Si $|x| < 1$, $S(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1-xt)}$ par TITT avec $\displaystyle\int_0^1 \left|\frac{(xt)^n}{1+t^2}\right| \mathrm{d}t \leqslant \frac{|x|^n}{n+1}$; on trouve, pour tout $|x| < 1$, $S(x) = \dfrac{1}{1+x^2}\left(\dfrac{x}{2}\ln(2) + \dfrac{\pi}{4} - x\ln(1-x)\right)$

d) $S(-1)$ existe par CSSA : $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ donc $\lim u_n = 0$ (le reste est facile). Pour la valeur de $S(-1)$, on vérifie la continuité de S en -1 : sur $[-1, 0]$, $\sum u_n x^n$ est alterné et vérifie le CSSA donc $|R_n(x)| \leqslant u_{n+1}|x|^{n+1} \leqslant u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc la série entière CVU sur $[-1, 0]$ et S est donc continue sur $[-1, 0]$.

Exercice 49 *[sujet]* **1.** a) si $|x| < 1$, $x^{n^2} = o(x^n)$ et si $|x| \geqslant 1$, DVG

b) c'est une série entière (lacunaire) donc f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$

c) $t \mapsto \exp t^2\ln(x)$ décroît sur $\mathbb{R}^+$ si $x \in [0, 1[$; on trouve $\displaystyle\int_1^{+\infty} \exp(t^2\ln(x))\,\mathrm{d}t \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \exp(t^2\ln(x))\,\mathrm{d}t$ donc (poser $u = t\sqrt{-\ln x}$) puis $f(x) \underset{1^-}{\sim} \dfrac{\sqrt{-\pi\ln x}}{2}$

2. a) facile

b) $f_A^2(M) = A^2M$

c) $P(f_A)(M) = P(A)M$ donc A et f_A ont les mêmes polynômes annulateurs, donc un polynôme annulateur SARS en même temps

d) si $X \in \mathbb{R}^n$ non nul vérifie $AX = \lambda X$ alors $M = XX^T \neq 0$ et $f_A(M) = AXX^T = \lambda M$

e) récip : si $f_A(M) = AM = \lambda M$ et $M \neq 0$ alors M possède une colonne $C \neq 0$ et $AC = \lambda C$

Exercice 50 *[sujet]* **1.** a) On vérifie par récurrence sur $k \geqslant 1$ que $B^k = \begin{pmatrix} A^k & A^k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et on fait attention ensuite à $B^0 = I_{2n}$ (donc au terme constant dans $P(B)$)

b) $\mathrm{rg}(B = \mathrm{rg}(A)$

c) Si A est DZ, on introduit $Q = \displaystyle\prod_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)} (X - \lambda)$ SARS et annulateur de A. On distingue ensuite si $Q(0) = 0$ (ie $0 \in \mathrm{Sp}(A)$) ou non : si $Q(0) = 0$ alors Q annule B et est SARS donc B est DZ ; si $Q(0) \neq 0$ alors $P = XQ$ reste SARS et annule B donc B est DZ aussi.

d) Si B est DZ alors il existe P SARS annulateur de B, donc de A et A est DZ.

2. a) $\arcsin'(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$ est DSE sur $]-1, 1[$ donc arcsin aussi par primitive puis f par produit

b) facile

c) par C-Lip (les fct $\dfrac{x}{1-x^2}$ et $\dfrac{1}{1-x^2}$ sont continues sur $]-1, 1[$) f' est la seule solution de l'éq diff telle que $y(0) = 0$; si $y(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n x^{2n+1}$ (f' est impaire donc on peut se limiter à chercher les sol DSE impaires) on a $(1 - x^2)y'(x) + xy(x) = a_0 + \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} [(2n+1)a_n - 2(n-1)a_{n-1}]x^{2n}$ donc $a_n = \dfrac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$ puis $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2^n n!)^2}{(2n+2)!} x^{2n+2}$

Exercice 51 *[sujet]* **1.** a) Poser $t = \pi - x$ sur la partie $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ puis on trouve $I = \dfrac{\pi}{\sqrt{1+a^2}}$ puis poser $u = \tan(x)$

b) On pose $x = n\pi + u$ puis en utilisant $n\pi + u \geqslant n\pi$, on obtient $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{\pi}{\sqrt{1+(n\pi)^3}}$ (avec $a = (n\pi)^{3/2}$) ; on en déduit $u_n = O\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$ donc $\sum u_n$ est ACV

c) f est $\mathcal{CM}^0$ et positive sur $\mathbb{R}^+$ et $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{(\lfloor x\rfloor+1)\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\lfloor x\rfloor} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ donc f est intégrable

2. a) $X^3 - X^2 - 4X + 4 = (X-1)(X-2)(X+2)$

b) $0 \notin \mathrm{Sp}(A)$

c) $A^{-1} = \dfrac{1}{4}(4I_n + A - A^2)$

Exercice 52 *[sujet]* **1.** a) $D = \mathbb{R}$ car $g(x,t) \xrightarrow[t\to 0]{} 1$ et $g(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ puis $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = |(e^{-2t} - e^{-t})\sin(xt)| \leqslant e^{-t} + e^{-2t}$

b) $f'(x) = \mathrm{Im}\left(\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2t+ixt} - e^{-t+ixt}\,\mathrm{d}t\right) = \dfrac{x}{4+x^2} - \dfrac{x}{1+x^2}$ donc $f(x) = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{4+x^2}{1+x^2} + C$.

Si $\varphi(t) = \dfrac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}$ alors φ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ (car DSE par ex) puis, par IPP, $|f(x)| = \dfrac{1}{x}\left|\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi'(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{+\infty} |\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t$ (vérifier que φ' est intégrable sur $\mathbb{R}^+$) donc $\lim\limits_{+\infty} f = 0$ et $C = 0$.

2. a) facile ($n+1$ racines distinctes si $\varphi(P,P) = 0$)

b) $F^\perp = \mathrm{Vect}\{Q\}$ avec $Q = 1$

c) $d(X^n, F) = \|\pi_{F^\perp}(X^n)\| = \dfrac{|\varphi(X^n, Q)|}{\sqrt{n+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k^n$

Exercice 53 *[sujet]* **1.** a) Les matrices triangulaires

b) $\mathcal{X}_A = X^3 + X[(X_2 - X_1)^2 + (X_3 - X_2)^2]$ donc A vérifie (P) si et seulement si $X_1 = X_2$ et $X_2 = X_3$. La probabilité que A vérifie (P) est donc $P(X_1 = X_2 = X_3) \overset{\text{indep}}{=} \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P(X_1 = k)P(X_2 = k)P(X_3 = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} p^3(1-p)^{3(k-1)} = \dfrac{p^3}{1-(1-p)^3}$

2. a) $t \mapsto \dfrac{1}{x + \sin^2 t}$ est continue sur $[0, 1/x]$ si $x > 0$

b) si $0 < x < y$, $f(y) - f(x) = \displaystyle\int_0^{1/y} \frac{\mathrm{d}t}{y + \sin^2 t} - \int_0^{1/x} \frac{\mathrm{d}t}{x + \sin^2 t} \leqslant \int_0^{1/y}\left(\frac{1}{y + \sin^2 t} - \frac{1}{x + \sin^2 t}\right)\mathrm{d}t \leqslant 0$ donc f décroit.

c) $0 \leqslant f(x) \leqslant \displaystyle\int_0^{1/x} \frac{\mathrm{d}t}{x} = \frac{1}{x^2}$ donc $\lim\limits_{+\infty} f = 0$

$f(x) \geqslant \displaystyle\int_0^{1/x} \frac{\mathrm{d}t}{x + t^2} = \frac{1}{\sqrt{x}}\arctan\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right) \underset{0^+}{\sim} \frac{\pi}{2\sqrt{x}}$ donc $\lim\limits_{0^+} f = +\infty$.

Exercice 54 *[sujet]* **1.** a) cours : $G_S = G_X G_Y$ par indep

b) $G_S(t) = (p + (1-p)t)^n (p + (1-p)t)^m = (p + (1-p)t)^{n+m}$ donc $S \sim \mathscr{B}(n+m, p)$

c) $G_S(t) = \left(\dfrac{pt}{1-(1-p)t}\right)^2 = p^2 t^2 \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n(1-p)^{n-1} t^{n-1}$ si $|t| < \dfrac{1}{1-p}$ donc $P(S = n) = (n-1)p^2(1-p)^{n-2}$ pour $n \geqslant 2$

2. a) $t_n e^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ puis $I_n = n!$ par IPP (c'est $\Gamma(n+1)$)

b) facile (penser à l'intégrabilité

c) Avec Leibniz : $L_n(x) = \dfrac{e^x}{n!}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{-x}(-1)^{n-k}\frac{n!}{k!}x^k$

d) Si $i \leqslant j$, par IPP, $(L_i|L_j) = \dfrac{1}{j!}\displaystyle\int_0^{+\infty} L_i(t)\dfrac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}x^j}\left(e^{-x}x^j\right)(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{-1}{j!}\displaystyle\int_0^{+\infty} L_i'(t)\dfrac{\mathrm{d}^{j-1}}{\mathrm{d}x^{j-1}}\left(e^{-x}x^j\right)(t)\,\mathrm{d}t = \cdots = \dfrac{(-1)^i}{j!}\displaystyle\int_0^{+\infty} L_i^{(i)}(t)\dfrac{\mathrm{d}^{j-i}}{\mathrm{d}x^{j-i}}\left(e^{-x}x^j\right)(t)\,\mathrm{d}t$. Si $i < j$ alors $\displaystyle\int_0^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}^{j-i}}{\mathrm{d}x^{j-i}}\left(e^{-x}x^j\right)(t)\,\mathrm{d}t = 0$ et (si $i = j$), on a $\|L_i\|^2 = \dfrac{(-1)^i}{i!}\displaystyle\int_0^{+\infty}\dfrac{(-1)^i}{i!} \times i!e^{-t}t^i\,\mathrm{d}t = 1$.

e) $L_n \in \mathrm{Vect}\{L_0,\dots,L_{n-1}\}^{\perp} = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ donc si on suppose que L_n change de signe en $x_1 < \cdots < x_p$ sur $\mathbb{R}^+$ et que $p < n$, on introduit $Q = \displaystyle\prod_{i=1}^{p}(X - x_i)$ (qui change de signe en même temps que L_n sur $\mathbb{R}^+$, on a $\deg(Q) = p \leqslant n-1$ donc $(Q|L_n) = 0$, ce qui est absurde car $(Q|L_n) = \displaystyle\int_0^{+\infty} Q(t=)L_n(t)e^{-}\,\mathrm{d}t$ et $t \mapsto Q(t)L_n(t)e^{-t}$ est de signe fixe, continue et non nulle sur $\mathbb{R}^+$. On a donc $p \geqslant n$. Comme $\deg(L_n) = n$, L_n a au plus n racines donc $p = n$ et toutes ces racines sont simples.

Exercice 55 *[sujet]* **1.** Il suffit de grouper les lancers par 2 (proba de gagner p^2, de perdre $(1-p)^2$, sinon on recommence)

a) On gagne au rang n (donc après le lancer $2n$) si on finit par PP et si avant on n'a fait ni PP, ni FF donc $P(G_n) = p^2(2p(1-p))^{n-1}$ et $P(G) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(G_n) = \dfrac{p^2}{1-2p(1-p)}$

b) De même pour perdre, on trouve $P(D) = \dfrac{(1-p)^2}{1-2p(1-p)}$ et comme $P(G) + P(D) = 1$, le jeu termine presque surement

2. a) $|g(x,t)| \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$, puis $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ si $x > 0$ et $\left|\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\right| = \dfrac{t^2}{1+t^2}e^{-xt} \leqslant e^{-at}$ si $x \in [a,b] \subset \mathbb{R}^{+*}$.

b) facile avec f''

c) Les solutions de $(\mathcal{E})$ sont $y(x) = \alpha\cos(x) + \beta\sin(x) + f(x)$. On vérifie que $\lim\limits_{+\infty} f = 0$ car $0 \leqslant f(x) \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{x}$ (ou TCDPC) donc si y tend vers 0 alors $y(x) - f(x)$ aussi mais $y - f$ est périodique donc si elle tend vers 0, on a $(y-f)(x) = (y-f)(x+2n\pi) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $y = f$.

Exercice 56 *[sujet]* **1.** a) $P = X^2 + X + 1$ (à justifier)

b) $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M) = \emptyset$ donc M n'est pas DZ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ mais P est SARS dans $\mathbb{C}$ donc M est DZ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

c) $m_j(M) = m_{j^2}(M)$ car M est réelle et $n = m_j(M) + m_{j^2}(M)$ est pair. $\mathrm{Tr}(M) = m_j(M)j + m_{j^2}(M)j^2 = \dfrac{n}{2}(j + j^2) = -\dfrac{n}{2}$ et $\det(M) = j^{n/2}(j^2)^{n/2} = 1$.

2. a) Si on pose $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k > 0$ (car $u_n > 0$), on a $w_n \sim S^{-\alpha}u_n$ (SATP) donc $\sum w_n$ CV

b) $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ donc $w_n \sim \dfrac{2^\alpha}{n^{2\alpha-1}}$ (SATP) donc $\sum w_n$ CV ssi $\alpha > 1$

c) $S_n \sim \ln(n)$ donc $w_n \sim \dfrac{1}{n\ln(n)^\alpha}$ (SATP) donc $\sum w_n$ CV ssi $\alpha > 1$ (Bertrand ; comp série/int)

Exercice 57 *[sujet]* **1.** a) par CSSA, on a $|R_n(x)| \leqslant e^{-\lambda_{n+1}a} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ si $x \in [a,b] \subset \mathbb{R}^{+*}$ donc CVUTS et S est continue. De plus $|S(x)| \leqslant e^{-\lambda_0 x}$ et $\lambda_0 > 0$ donc S est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$

b) On applique le TCD à $S_n(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k e^{-\lambda_k t}$ avec $|S_n(t)| = |S(t) - R_n(t)| \leqslant |S(t)| + |R_n(t)| \leqslant e^{-\lambda_0 t} + e^{-\lambda_{n+1}t} \leqslant 2e^{-\lambda_0 t}$

2. $(u|v) = \|u\|\|v\|\cos(u,v)$ donc on cherche à prouver $(x|y) \geqslant \dfrac{-1}{2}$ (par exemple). On pose $s = (x|y) + (y|z) + (z|x)$ et on cherche à prouver $s > \dfrac{-3}{2}$. On a $\|x+y+z\|^2 = 3 + 2s$ donc $s \geqslant \dfrac{-3}{2}$ et on aura $s > \dfrac{-3}{2}$ si $x + y + z \neq 0$. Reste à traiter le cas où $z = -(x+y)$: on a alors $1 = \|z\|^2 = \|x+y\|^2 = 2 + 2(x|y)$ donc $(x|y) = 0$.

Exercice 58 *[sujet]* **1.** a) $A(A^2 - I_n) = I_n$ donc $A^{-1} = A^2 - I_n$

b) $P = X^3 - X - 1$ possède une seule racine réelle $\lambda > 0$ (étude de fct) donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \{\lambda, \mu, \overline{\mu}\}$ avec $\mu \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ et comme A est réelle $m_\mu = m_{\overline{\mu}}$ puis $\det(A) = \lambda^{m_\lambda}|\mu|^{2m_\mu} > 0$

2. a) $E(X_i) = -p + (1-p) = 1 - 2p$ et par indep, $E(Z_n) = (1-2p)^n$

b) Si $Y_n = \frac{1}{2}(1+Z_n)$ alors $Y_n(\omega) = \{0,1\}$ donc $Y_n \sim \mathscr{B}(q)$ avec $q = E(Y_n) = \frac{1}{2}(1+E(Z_n))$ puis $P(Z_n = 1) = P(Y_n = 1) = q = \dots$

c) Si Z_1 et Z_2 sont indép alors $P(Z_1 = 1, Z_2 = 1) = P(Z_1 = 1)P(Z_2 = 1)$; $(Z_1 = 1, Z_2 = 1) = (X_1 = 1, X_2 = 1)$ donc $P(Z_1 = 1, Z_2 = 1) = (1-p)^2$ puis $P(Z_1 = 1) = 1-p$ et $P(Z_2 = 1) = P(X_1 = 1, X_2 = 1) + P(X_1 = -1, X_2 = -1) = (1-p)^2 + p^2$. On doit donc avoir $(1-p)^2 = (1-p)[(1-p)^2 + p^2]$ donc $p = \frac{1}{2}$. Pour $p = \frac{1}{2}$, on vérifie bien l'indépendance (4 cas à vérifier)

Exercice 59 *[sujet]* **1.** a) Par récurrence

b) Avec l'encadrement précédent, on trouve $R = 1$.

c) Si $|x| < 1$, $f(x) = 1 + x + \sum_{n \geqslant 1} \left(a_n + \frac{2}{n+1} a_{n-1}\right) x^{n+1} = 1 + x + x(f(x) - 1) + 2 \sum_{n \geqslant 1} \frac{a_{n-1}}{n+1} x^{n+1}$ donc $f'(x) = 1 + f(x) - 1 + xf'(x) + 2xf(x)$ puis $(1-x)f'(x) = (1+2x)f(x)$ et $f(x) = \frac{e^{-2x}}{(1-x)^3}$ car $f(0) = 1$.

2. $X^5 - X^2 = X^2(X-1)(X-j)(X-j^2)$ donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \subset \{0, 1, j, j^2\}$; A est réelle donc $m_j = m_{j^2}$ puis $\mathrm{Tr}(M) = m_1 + m_j(j + j^2) - m_1 - m_j$ donc $m_1 = n$, $m_0 = m_j = 0$ (ie $\chi_M = (X-1)^n$). On a ensuite $M^2(M - jI_n)(M - j^2 I_n)(M - I_n) = 0$ et M, $M_j I_n$, $M - j^2 I_n$ sont inversibles donc $M = I_n$ (récip évidente)

Exercice 60 *[sujet]* **1.** a) cours

b) cours

c) $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{j, j^2\}$ (car non vide et A est réelle)

2. a) $t \mapsto \frac{1-t}{1+t^2} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ donc $F'(x) = \frac{1-x}{1+x^2}$

b) $F(x) = \arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$

c) si $|x| < 1$, $F'(x) = (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$ donc $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+2} x^{2n+2}$

d) On vérifie la CVN de la série $\sum_{n \geqslant 0} (-1)^2 \left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{x^{2n+2}}{2n+2}\right]$ sur $[0,1]$ (étude de fct par ex) donc $S = f(1)$