Exercices d'oraux 2021

Mines-Ponts

Exercice 1 **(Mines-Ponts PSI 2021)** *[Indication] [Solution]*

1. On admet $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n)+\gamma+o(1)$ avec γ une constante. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=1$ et $u_{n+1}=\dfrac{2n+2}{2n+5}u_n$

a) Montrer qu'il existe une suite (w_n) convergente telle que $\ln(u_n)=w_n-\dfrac{3}{2}\ln(n)$.

b) En déduire que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}u_n$ converge.

c) Montrer, pour $n\geqslant 1$, $\displaystyle 2\sum_{k=1}^{n+1}ku_k+3\sum_{k=1}^{n+1}u_k=2\sum_{k=0}^{n}ku_k+2\sum_{k=0}^{n}u_k$ et en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$.

2. Soient $J=\begin{pmatrix}1 & \dots & 1\\ \vdots & (1) & \vdots\\ 1 & \dots & 1\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2+M=J$

a) Trouver un polynôme annulateur de J et diagonaliser J.

b) Trouver un polynôme annulateur de M et montrer que M est diagonalisable.

c) Montrer que les vecteurs propres de M sont aussi des vecteurs propres de J.

d) Déterminer M.

Exercice 2 **(Mines-Ponts PSI 2021)** *[Indication] [Solution]*

1. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $I_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-x}\,\mathrm{d}x$

a) Justifier l'existence de I_n, pour $n\geqslant 1$.

b) Montrer que $I_n=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

2. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E, espace de dimension finie.

a) Montrer qu'il existe $u\in\mathcal{L}(E)$ tel que $\ker(u)=G$ et $\mathrm{Im}(u)=F$ si et seulement si $\dim(F)+\dim(G)=\dim(E)$.

b) Trouver un tel endomorphisme u lorsque $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, x+y+z=0\}$ et $G=\mathrm{Vect}\{(1,-1,0)\}$

Exercice 3 **(Mines-Ponts PSI 2021)** *[Indication] [Solution]*

1. Soit $f(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-t^2}}{1+x^2t^2}$

a) Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que si $u\geqslant 0$, $0\leqslant 1-u+u^2-\dfrac{1}{1+u}\leqslant u^3$

c) Montrer que f admet un $\mathrm{DL}_5(0)$

2. Soit $J_n\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

a) Montrer que J_n est diagonalisable et qu'il existe P_n orthogonale telle que $J_n=P_n\mathrm{diag}(0,\dots,0,n)P_n^{-1}$.

b) Déterminer P_2 et P_3

c) Montrer que l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec J_3 est un espace vectoriel de dimension 5.

Exercice 4 **(Mines-Ponts PSI 2021)** *[Indication] [Solution]*

1. a) Soit $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ pour laquelle il existe $a\in\mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(a)>0$ et $\displaystyle\lim_{+\infty}f'+af=0$. Montrer que $\displaystyle\lim_{+\infty}f=0$

b) Soit $g\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ telle que $\displaystyle\lim_{+\infty}g''+g'+g=0$. Déterminer la limite de g en $+\infty$.

2. Soient $a,b,c\in\mathbb{C}$, $bc\neq 0$, $b\neq c$ et $M=\begin{pmatrix}a & & (c)\\ & \ddots & \\ (b) & & a\end{pmatrix}$

a) Calculer $\Delta(t) = \begin{vmatrix} a+t & & (c+t) \\ & \ddots & \\ (b+t) & & a+t \end{vmatrix}$ et en déduire $\mathcal{X}_M$.

b) M est-elle diagonalisable ?

Exercice 5 **(Mines-Ponts PSI 2021)** *[Indication] [Solution]*

1. Soit $x > 0$; on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^1 t^{t^x}\,\mathrm{d}t$. Montrer que $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(xn+1)^{n+1}}$

2. Soit $(U, V) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^2$ tel que $\forall X \in \mathbb{R}^n, (UX|X) \geqslant 0$ et $(VX|X) \geqslant 0$, $(\,|\,)$ désignant le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\det(U + V) \geqslant \det(U) + \det(V)$. On pourra commencer par le cas où U et V ne sont pas inversibles, puis $V = I_n$ et enfin $V \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ quelconque.

Exercice 6 **(Mines-Ponts PSI 2021)** *[Indication] [Solution]*

1. a) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable et $B = A^3 + A + I_n$. Exprimer A comme un polynôme en B.

b) Est ce toujours vrai dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et T-périodique. Montrer qu'il existe un unique réel λ pour lequel l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t) - \lambda}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente

a) dans le cas où $f = \sin$

b) dans le cas général

Exercice 7 **(Mines-Ponts PSI 2021)** *[Indication] [Solution]*

1. Soient E un espace euclidien orienté de dimension 3, $r \neq id$ une rotation au tour de D et s une symétrie orthogonale par rapport à un plan P.

a) On suppose $D \perp P$, montrer que $r \circ s = s \circ r$

b) On suppose $r \circ s = s \circ r$; que peut-on dire.

2. Soit $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^3 + x}}$

a) Justifier l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$

b) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$

c) Rappeler le DSE de $\dfrac{1}{\sqrt{1+u^2}}$ et en déduire une expression de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ sous la forme de la somme d'une série.

Centrale maths 1

Exercice 8 **(Centrale PSI 2021)** *[Indication] [Solution]*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = \displaystyle\int_n^{+\infty} \frac{\operatorname{th}(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$

1. Justifier l'existence de a_n. Déterminer le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n x^n$ et le domaine de définition de sa somme S.

2. S est-elle continue en -1.

3. Déterminer un équivalent de S en 1.

Exercice 9 **(Centrale PSI 2021)** *[Indication] [Solution]*

On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^x t\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer le domaine de définition D de f.

2. Montrer que f est décroissante sur D.

3. On pose $\varphi(x) = f(x)f(x+1)$. Montrer que $\varphi(x+1) = \dfrac{x+1}{x+2}\varphi(x)$ pour $x > -1$.

4. En déduire la valeur de $\varphi(n)$, pour $n \in \mathbb{N}^*$

5. En déduire un équivalent de f en $+\infty$.

Exercice 10 **(Centrale PSI 2021)** *[Indication] [Solution]*

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes suivant $\mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right)$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

1. Justifier l'existence et calculer $E\left(e^{x\left(S_n-\frac{n}{2}\right)}\right)$, où $x \in \mathbb{R}^+$.

2. a) Soient $\alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ et $f(x) = \alpha x - \ln \operatorname{ch}\left(\frac{x}{2}\right)$. Justifier que f admet sur $\mathbb{R}^{+*}$ un maximum $M_\alpha > 0$.

b) Montrer que $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geqslant \alpha\right) \leqslant 2e^{-nM_\alpha}$

Exercice 11 **(Centrale PSI 2021)** *[Indication] [Solution]*

1. Soient $u_j : P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto a_k$. Montrer que $(u_j)_{0\leqslant j\leqslant n-1}$ est une base de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_{n-1}[X], \mathbb{R})$.
En déduire que $(v_j)_{0\leqslant j\leqslant n-1}$ est aussi une base de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_{n-1}[X], \mathbb{R})$ avec $v_j(P) = P(\alpha_j)$ où $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}$ sont n réels deux à deux distincts.

2. Montrer qu'il existe une unique suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de coefficient dominant > 0 tels que $\deg(P_n) = n$ et $\int_0^1 \frac{P_n(t)P_m(t)}{\sqrt{t(1-t)}}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ 1 & \text{si } n = m \end{cases}$

3. ?

Exercice 12 **(Centrale PSI 2021)** *[Indication] [Solution]*

1. Justifier l'existence de $I = \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-x}}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ puis déterminer sa valeur ; on donne $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$.

2. Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos^n x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ et $v_n = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos^n\left(\sqrt{\frac{2t}{n}}\right)}{t\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$. Justifier l'existence de u_n et v_n si $n \geqslant 1$.

3. Déterminer un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 13 **(Centrale PSI 2021)** *[Indication] [Solution]*

1. Calculer $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} t\,\mathrm{d}t$

2. Déterminer les fonctions f DSE paires solutions de $x(x^2-1)y'' + 3x^2y' + xy = 0$

3. Comparer f et $g : x \mapsto \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1 - x^2\sin^2 t}$

Exercice 14 **(Centrale PSI 2021)** *[Indication] [Solution]*

1. Rappeler la valeurs des racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité

2. Soient $\omega_0, \ldots, \omega_{n-1}$ des complexes 2 à 2 distincts et $(z_0, \ldots, z_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{C}_n[X]$ tel que $\forall k \in [\![0, n-1]\!]\,, P(\omega_k) = z_k$

3. ?

Exercice 15 **(Centrale PSI 2021)** *[Indication] [Solution]*

On admet l'existence de $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ et on pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t\sin(xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$

2. Montrer que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = I$ et déterminer la limite en $+\infty$ de f.

3. a) Montrer que $I = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u+k\pi}\,\mathrm{d}u$

b) Montrer que f n'est pas continue en 0

Exercice 16 **(Centrale PSI 2021)** *[Indication] [Solution]*

Soit $\phi(x) = e^{-x^2}$

1. Montrer que ϕ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et qu'il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\phi^{(n)} = P_n \times \phi$.
   Quel est le degré de P_n ?
2. Montrer que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale pour le produit scalaire $(P|Q) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)\phi(t)\,\mathrm{d}t$
3. Montrer que P_n est scindé à racines simples

Centrale maths 2

Exercice 17 **(Centrale 2 PSI 2021)** *[Indication] [Solution]*
Une élection se déroule entre A et B avec $m \geqslant 2$ votants. Initialement, a votants ont l'intention de voter pour A et $m-a$ pour B. Chaque jour, deux personnes (choisies aléatoirement) se rencontrent et, si elles ont des intentions de vote différentes, la première convainc la seconde de voter comme elle.
On note X_n le nombre d'intentions de votes pour A le jour n. On a donc $X_0 = a$.

1. Écrire une fonction qui renvoie la valeur de X_n. La tester pour n assez grand. Que remarque-t-on ?
2. On note $\pi_{n,k} = P(X_n = k)$.
   Montrer que $P(X_{n+1} = k+1|X_n = k) = P(X_{n+1} = k-1|X_n = k) = \dfrac{k(m-k)}{m(m-1)}$ puis $P(X_{n+1} = k|X_n = k) = 1 - 2\dfrac{k(m-k)}{m(m-1)}$
3. Montrer que $P(X_{n+1} = k) = \left(1 - 2\dfrac{k(m-k)}{m(m-1)}\right)\pi_{n,k} + \dfrac{(k+1)(m-k-1)}{m(m-1)}\pi_{n,k+1} + \dfrac{(k-1)(m-k+1)}{m(m-1)}\pi_{n,k-1}$
   Montrer que $\pi_{n,k} \leqslant \left(1 - \dfrac{2}{m(m-1)}\right)^n$ si $k \in [\![1, m-1]\!]$
4. On note V_A l'événement « tout le monde vote pour A au bout d'un certain nombre de jours ». Montrer que $P(V_A) = \lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = m)$.
5. Écrire une fonction qui renvoie 1 si tout le monde vote pour A au bout d'un grand nombre de jours, 0 sinon puis calculer la moyenne de cette fonction sur 100 itérations.
6. Déterminer $P(V_A)$ en fonction de a.

Exercice 18 **(Centrale 2 PSI 2021)** *[Indication] [Solution]*
Soit $(X_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes telles que $X_i(\Omega) = \{-1, 1\}$, $P(X_i = 1) = \dfrac{1}{2}$ et $P(X_i = -1) = -\dfrac{1}{2}$. Pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose $R(x) = x_1X_1 + \cdots + x_nX_n$. On souhaite démontrer $P(R(x) = 0) \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

1. a) Écrire une fonction qui renvoie $R(x)$ pour un vecteur x de $\mathbb{R}^n$.
   b) Écrire une fonction `simulR(x,p)` qui renvoie la probabilité que $R(x) = 0$, calculée sur `p` itérations
2. On se place dans le cas particulier $x = (1, \ldots, 1)$
   a) Calculer $\sqrt{n}$`simulR(x,1000)` pour $n \in \{2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256\}$ et commenter.
   b) Calculer $P(R(x) = 0)$; on pourra distinguer les cas n pair et n impair.
   c) Conclure
3. On reprend le cas général où $x \in \mathbb{R}^n$
   a) Montrer que $R(x)$ possède la même loi que $R(|x|)$, où $|x| = (|x_1|, \ldots, |x_n|)$
   b) ? ? ?

Exercice 19 **(Centrale 2 PSI 2021)** *[Indication] [Solution]*
On lance, les unes après les autres, n boules sur une planche avec N trous ; chaque boule a une probabilité $\dfrac{1}{N}$ d'entrer dans un des N trous (indépendamment les unes des autres). On note T_n la variable aléatoire discrète qui donne le nombre de trous non vides.

1. Écrire une fonction `remplir(n,N)` qui renvoie le nombre de boules dans chaque trou après n lancers.
2. Écrire une fonction `nombre(n,N)` qui renvoie le nombre de trous non vides. La tester avec $N = 10$ et n grand. Que remarque-t-on ?
3. Déterminer les valeurs possibles de T_n en fonction de n et N.
4. Donner les lois de T_1 et T_2.
5. On suppose $n \geqslant 2$. Calculer $P(T_n = 1)$, $P(T_n = 2)$ et $P(T_n = n)$; on distinguera les cas $n \leqslant N$ et $n > N$.

6. Avec la formule des probabilités totales, montrer que $P(T_{n+1}=k)=\dfrac{k}{N}P(T_n=k)+\dfrac{N-k+1}{N}P(T_n=k-1)$ pour $k\in[\![1,N]\!]$.

7. a) En déduire la relation $G_{n+1}(x)=xG_n(x)+\dfrac{1}{N}x(1-x)G_n'(x)$, où $G_n(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{N}P(T_n=k)x^k$.

b) En déduire $E(T_n)$

c) Le vérifier numériquement.

Exercice 20 **(Centrale 2 PSI 2021)** *[Indication] [Solution]*
Soient $f(x,y)=\dfrac{\mathrm{ch}(2y)-\cos(2x)}{2}$ et $g_r(\theta)=f(r\cos\theta,r\sin\theta)$ pour $r\in\mathbb{R}^+$.

1. Tracer le graphe de g_r sur $[-2\pi,2\pi]$ et $r\in\{1,2,5,10\}$; conjecturer la périodicité, la parité de g_r, ses variations et son maximum sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

2. Montrer que f admet un minimum en $(0,0)$.

3. Soient $B_r=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\sqrt{x^2+y^2}\leqslant r\right\}$, $\Omega=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\sqrt{x^2+y^2}<r\right\}$ et $C_r=B_r\setminus\Omega_r$.
Préciser si ces trois ensembles sont ouverts ou fermés.

4. Montrer que f admet un maximum M_r dans B_r.

5. On définit $F_r(x,y)=\begin{cases} f(x,y) & \text{si } (x,y)\in B_r \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

a) Montrer que M_r est un maximum de F_r sur $[-r,r]^2$.

b) Écrire une fonction `F(r,x,y)` qui renvoie $F_r(x,y)$.

c) Donner une estimation de $M(r)$; on pourra prendre le maximum des $F_r(x_i,y_j)$ avec $x_k=y_k=r-\dfrac{2k}{100}r$ avec $k\in[\![0,100]\!]$.

d) Tracer le graphe de $r\mapsto M_r$ sur $[1,4]$ par pas de 0.01

e) Tracer sur le même graphe $r\mapsto \mathrm{sh}^2(r)$.

6. a) Montrer $\sin(t)\leqslant t\leqslant \mathrm{sh}(t)$ si $t>0$

b) Justifier les conjectures précédentes.

Exercice 21 **(Centrale 2 PSI 2021)** *[Indication] [Solution]*
Soit $A=\begin{pmatrix}13&7&4\\7&13&4\\4&4&16\end{pmatrix}$; on cherche à résoudre l'équation $(\mathcal{E})$, $Ax=b$, avec $b\in\mathbb{R}^3$.

1. Justifier qu'il existe une unique solution à $(\mathcal{E})$ et la déterminer à l'aide de l'ordinateur.

2. Écrire une fonction de paramètres x_0, α et n et qui renvoie la liste $[x_0,\dots,x_n]$, où $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $x_{n+1}=x_n+\alpha(b-Ax_n)$ où $\alpha\in\mathbb{R}^*$.

3. Tracer les graphes de $x_n^{(1)}$, $x_n^{(2)}$ et $x_n^{(3)}$ (les trois coordonnées de x_n) pour $\alpha\in]0,1]$.

4. Montrer que A est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres

5. Trouver la limite de (x_n), en supposant qu'elle converge.

6. Montrer que (x_n) converge pour tout $x_0\in\mathbb{R}^3$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty}(I_3-\alpha A)^n=0$.

7. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur α pour que $\lim\limits_{n\to+\infty}(I_3-\alpha A)^n=0$.

8. ? (qqch avec un produit scalaire)

Exercice 22 **(Centrale 2 PSI 2021)** *[Indication] [Solution]*
On considère l'expérience aléatoire suivante : on dispose de deux jetons J_1 et J_2, J_1 possède une face numérotée 0 et une face numérotée 1 alors que J_2 possède deux faces numérotées 2 ; on choisit un jeton au hasard et on le lance une infinité de fois. On note E l'événement « on choisit J_1 », U_k « on obtient 1 au lancer k », X le numéro du premier lancer où on obtient 1 et Y le numéro du premier lancer où on obtient 0. On note $S=\max(X,Y)$.

1. Écrire une fonction `simulXY()` qui renvoie les valeurs de X et Y. L'appliquer 10000 fois et en déduire l'espérance, la variance de X et Y puis la covariance de (X,Y).

2. Écrire une fonction `simulS()` qui renvoie S et déterminer l'espérance et la variance de S.

3. Les (U_k) sont-ils mutuellement indépendants pour

a) la probabilité conditionnelle P_E ?

b) la probabilité conditionnelle $P_{\overline{E}}$?

c) la probabilité P ?

4. a) On note A_n « obtenir n fois 1 au cours de n lancers ». Calculer $P(A_n)$

b) On suppose avoir obtenu n fois 1 au cours de n lancers, calculer la probabilité d'avoir choisi le jeton J_1.

5. ?

Exercice 23 (Centrale 2 PSI 2021) *[Indication] [Solution]*
On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni du repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. On considère f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = (x^2 - y)(3x^2 - y)$ et S la surface d'équation $z = f(x, y)$.

1. Tracer les courbes de niveau de f

2. Soient $\vec{\ell}$ un vecteur unitaire de $\text{Vect}\{\vec{i}, \vec{j}\}$, U le plan dont $\left(O, \vec{\ell}, \vec{k}\right)$ est un repère orthonormé.

a) Justifier qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{\ell} = \cos\theta \vec{i} + \sin\theta \vec{j}$

b) Soit g_θ la restriction de f à la droite dirigée par $\vec{\ell}$. Montrer que g admet un minimum local en O

c) Donner l'équation de $U \cap S$

3. ?

4. Trouver les extrema locaux de f

5. ?

Exercice 24 (Centrale 2 PSI 2021) *[Indication] [Solution]*
Soit F définie par $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t}\,\mathrm{d}t$

1. Tracer le graphe de F puis conjecturer son domaine de définition, son signe, sa monotonie et sa limite en $+\infty$

2. Démontrer ces conjectures

3. Montrer que F est solution d'une équation différentielle du premier ordre et en déduire que $F(x) = e^x \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$

4. ?

CCINP

Exercice 25 (CCINP PSI 2021) *[Indication] [Solution]*

1. Soient $a_0, \ldots, a_n$ des réels deux à deux distincts

a) Montrer que $(P|Q) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Soit $F = \left\{P \in \mathbb{R}_n[X], \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(a_k) = 0\right\}$.
Montrer rapidement que F est un sous-espace vectoriel, déterminer son orthogonal, sa dimension puis calculer $d(1, F)$

2. On considère n lancers indépendants d'un dé équilibré. On note X_n la valeur obtenue au $n^{\text{ème}}$ lancer.

a) Trouver la loi de X_n et sa fonction de répartition F.

b) On note $M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$. Déterminer la loi et la fonction de répartition F_n de M_n en fonction de F.

c) Étudier la convergence uniforme de (F_n).

d) Mêmes questions avec $m_n = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$.

Exercice 26 (CCINP PSI 2021) *[Indication] [Solution]*

1. Soient $A, B, U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, telles que $U \neq 0$ et $AU = UB$

a) Soit P annulateur de A ; montrer que les valeurs propres de A sont des racines de P

b) Montrer que $P(A)U = UP(B)$

c) Montrer que $\text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B) \neq \emptyset$

2. Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(xt^2)e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que F est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

c) Calculer $F^{(n)}(0)$. F est-elle DSE ?

Exercice 27 (CCINP PSI 2021) *[Indication] [Solution]*

1. Soit $f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^x(1+t)}$.

a) Déterminer le domaine de définition D de f.

b) Montrer que f est continue sur D.

c) Montrer que si $x\in D$ alors $1-x\in D$ et $f(x)=f(1-x)$

d) Déterminer la limite de f aux bornes de D.

2. Soient $M=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$ et $R=\begin{pmatrix}a&b&b\\b&a&b\\b&b&a\end{pmatrix}$, avec $(a,b)\in\mathbb{C}^2$.

a) Montrer que M est diagonalisable.

b) Exprimer R en fonction de M et I_3. Montrer que R est diagonalisable.

c) On pose $u_n=\mathrm{Tr}\,(M^n)$. Montrer que (u_n) est à valeurs entières et que (u_n) diverge.

d) On pose $v_n=\mathrm{Tr}\,(R^n)$. Déterminer les valeurs de (a,b) pour lesquelles (v_n) converge.

Exercice 28 **(CCINP PSI 2021)** *[Indication] [Solution]*

1. Soit $f(x)=\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{x}{n^{x+1}}$

a) Déterminer le domaine de définition D de f.

b) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$

c) Étudier la continuité de f en 0.

d) Déterminer la limite de $f(x)-x$ en $+\infty$.

2. Soient E un espace euclidien, f une isométrie vectorielle de E et $s=f-id_E$.

a) Montrer que $\ker(s)\perp\mathrm{Im}(s)$; sont-ils supplémentaires ?

b) Soient $x\in E$ et $u_n=\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f^k(x)$. Étudier la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Exercice 29 **(CCINP PSI 2021)** *[Indication] [Solution]*

1. Pour $x>0$ et $n\geqslant 2$, on pose $u_n(x)=\dfrac{\ln(x)}{x^n\ln(n)}$

a) Déterminer le domaine de convergence D de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}u_n$; on note S la somme de cette série.

b) Montrer que $\sum u_n$ ne converge pas normalement sur D.

c) i. Montrer que $\left|\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}u_k(x)\right|\leqslant\frac{1}{\ln(n+1)}$.

ii. En déduire que S est continue sur D.

d) S est-elle intégrable sur D ?

2. Soit $A=\begin{pmatrix}0&1&3\\2&1&-3\\-2&1&5\end{pmatrix}$

a) Déterminer les valeurs propres de A.

b) A est-elle diagonalisable ?

c) Déterminer u et v, deux vecteurs propres de A et w tel que (u,v,w) soit une base de $\mathbb{R}^3$.

d) Trigonaliser A.

Exercice 30 **(CCINP PSI 2021)** *[Indication] [Solution]*

1. Soient $(\mathcal{E}) : x^2(1-x)y''-x(1+x)y'+y=0$ et f une solution de $(\mathcal{E})$ DSE sur $]-r,r[$ telle que $f(x)=\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}a_nx^n$ si $|x|<r$.

a) Justifier que f est $\mathcal{C}^2$ sur $]-r,r[$ et écrire f' et f'' sous forme de séries entières.

b) Montrer qu'il existe $(b_n)_{n\geqslant 1}$ telle que $x^2(1-x)f''(x)-x(1+x)f'(x)+f(x)=a_0+\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}b_n(a_n-a_{n-1})x^n$.

c) Déterminer a_0 et une relation entre a_n et a_{n-1}.

d) En déduire une expression simple de f.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + 9A = 0$, $n \geqslant 3$.

a) Montrer que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \{0, 3i, -3i\}$

b) A est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$? Dans $\mathbb{C}$?

c) Montrer que si n est impair alors A n'est pas inversible.

d) Montrer que si A est symétrique réelle et non nulle alors A ne peut pas vérifier $A^3 + 9A = 0$

Exercice 31 **(CCINP PSI 2021)** *[Indication] [Solution]*

1. Soient $p \in]0,1[$ et $p_k = p^2 k(1-p)^{k-1}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer qu'il existe une variable aléatoire discrète X telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $P(X = k) = p_k$

b) Montrer l'existence et calculer la valeur de $E(X-1)$ et $E((X-1)(X-2))$

c) Montrer l'existence et calculer la valeur de $E(X)$ et $V(X)$.

2. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \emptyset$

a) Montrer que, si P annule A, alors les valeurs propres de A sont des racines de P.

b) Montrer que $\mathcal{X}_A(B)$ est inversible.

c) Montrer, pour $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $AX = XB \Leftrightarrow X = 0$.

d) Montrer que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \exists! X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), AX - XB = M$.

Exercice 32 **(CCINP PSI 2021)** *[Indication] [Solution]*

1. Soit $F(x) = -\displaystyle\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t$

a) Déterminer le domaine de définition de F.

b) Montrer que $F(x) = \displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{x^n}{n^2}$ si $x \in [0,1]$.

c) Montrer que si $x \in]0,1[$, $F(x) + F(1-x) = F(1) - \ln(x)\ln(1-x)$

2. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$

a) Calculer $\mathrm{rg}(B)$ en fonction de $\mathrm{rg}(A)$

b) Calculer $\mathcal{X}_B$ en fonction de $\mathcal{X}_A$

c) Montrer que si A admet n valeurs propres distinctes et est inversible alors B est diagonalisable.

d) Qu'en est-il si on suppose seulement A diagonalisable ?

Exercice 33 **(CCINP PSI 2021)** *[Indication] [Solution]*

1. Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{1+n^4x^3}\,\mathrm{d}x$, pour $n \geqslant 1$.

a) Justifier l'existence de I_n.

b) Montrer que $I_n = \dfrac{1}{n^{5/3}} J_n$ avec $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{n^{1/3}\sin\left(\frac{t}{n^{1/3}}\right)}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$.

c) Montrer que $\displaystyle\lim_{+\infty} J_n = K = \int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$

d) Montrer, par changement de variable que $K = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$.

e) En déduire $2K = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1+t}{1+t^3}\,\mathrm{d}t = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$

f) Conclure $I_n \sim \dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}n^{5/3}}$

2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $f(P) = (X-a)P' + P - P(a)$, où $a \in \mathbb{R}$ est fixé.

a) Déterminer $\ker(f)$

b) Déterminer $\mathrm{Im}(f)$

c) Déterminer les valeurs propres de f.

Exercice 34 **(CCINP PSI 2021)** *[Indication] [Solution]*

1. Soit $f(x) = \dfrac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$

a) Sur quel domaine f est-elle $\mathcal{C}^1$? Calculer $f'(x)$ et trouver a, b et c polynômiales telles que $a(x)f'(x)+b(x)f(x) = c(x)$.

b) f est-elle DSE ?

c) Déterminer les coefficients du DSE de f.

2. Pour $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, on pose $M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix}$

a) Déterminer les valeur propres de $M(a,b,c)$.

b) Déterminer le noyau de $M(a,0,a)$ et $M(a,b,a)$ (pour a et b non nuls)

c) Calculer $\det(M(a,b,c))$ et déterminer le noyau et l'image de $M(a,b,c)$ lorsqu'elle n'est pas inversible.

d) Justifier que $M(a,b,c)$ est diagonalisable et la diagonaliser (trouver P et P^{-1})

Exercice 35 (CCINP PSI 2021) *[Indication] [Solution]*

1. Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$

a) Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que f est dérivable et vérifie une équation différentielle du premier ordre sur $\mathbb{R}$.

c) Résoudre cette équation et en déduire une expression simple de f ; on donne $f(0) = \dfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que A et ${}^tA$ commutent. On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique

a) Montrer que $\ker(A) = \ker({}^tA)$

b) Montrer que $\ker(A)$ et $\mathrm{Im}(A)$ sont supplémentaires orthogonaux

c) ? (on supp A nilp, mq $A = 0$?)

Exercice 36 (CCINP PSI 2021) *[Indication] [Solution]*

1. Soit $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $\dfrac{1}{3}(2M + I_n) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer que $(Mx|x) = \|x\|^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

b) Que peut-on en déduire pour M ?

2. Soient $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ et $S(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$

a) Rappeler la définition du rayon de convergence d'une série entière et déterminer celui de $\sum u_n x^n$.

b) Trouver a, b, c tels que $\dfrac{1}{(1+t^2)(1-xt)} = \dfrac{at+b}{1+t^2} + \dfrac{c}{1-xt}$ pour $t \in [0,1]$ et $|x| < R$.

c) Déterminer $S(x)$

d) Montrer que S est définie en -1 et calculer $S(-1)$

Exercice 37 (CCINP PSI 2021) *[Indication] [Solution]*

1. Soit f_n définie, pour $n \geqslant 0$ par $f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{nx^2}{1+nx} & \text{si } x \geqslant 0 \\ \dfrac{nx^3}{1+nx^2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

a) Montrer que (f_n) converge uniformément vers une fonction que l'on déterminera.

b) Montrer que (f_n') converge simplement sur $\mathbb{R}$ mais pas uniformément sur $[-1,1]$.

2. a) Énoncer le théorème de Cayley-Hamilton

b) Montrer que si A et B sont semblables alors $P(A)$ et $P(B)$ sont semblables.

c) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$; calculer M^k, pour $k \in \mathbb{N}$.

d) Calculer $P(M)$ pour $P \in \mathbb{R}[X]$, en fonction de $P(A)$ et $P'(A)$

e) Montrer que si M est diagonalisable alors A l'est aussi.

f) Montrer que si M est diagonalisable alors A est nulle

Exercice 38 (CCINP PSI 2021) *[Indication] [Solution]*

1. Soient $I = [-a,a]$ et φ continue sur I pour laquelle il existe $c > 0$ tel que $\forall x \in I, |\varphi(x)| \leqslant C|x|$. On chercher les fonctions f, définies sur I, continues en 0 et telles que $\begin{cases} f(x) - f\left(\dfrac{x}{2}\right) = \varphi(x) & \text{pour } x \in I \\ f(0) = 0 \end{cases}$

a) Montrer que $S : x \mapsto \sum_{n\geqslant 0} \varphi\left(\frac{x}{2^n}\right)$ est définie et continue sur I.

b) Montrer que S est solution du problème posé

c) Montrer que la différence de 2 solutions du problème est nulle ; que peut on en déduire sur l'ensemble des solutions ?

d) On suppose φ de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, montrer que f est aussi $\mathcal{C}^1$ sur I.

2. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ non nul tel que $f^3 + f = 0$.

a) Montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker(f) \oplus \ker(f^2 + id)$ et $\ker(f^2 + id) \neq \{0\}$

b) Soit $x \in \ker(f^2 + id)$ non nul, montrer que $(x, f(x))$ est libre

c) Déterminer les dimensions de $\ker(f^2 + id)$ et $\ker(f)$.

d) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

e) Trouver les $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f = u^2$?

Exercice 39 **(CCINP PSI 2021)** *[Indication] [Solution]*

1. a) Montrer, lorsque toutes les quantités existent que $\tan(2a) = \dfrac{2\tan(a)}{1 - \tan^2 a}$

b) Montrer que $\pi = 8 \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1} (\sqrt{2} - 1)^{2n+1}$

c) Montrer que $\left| \pi - 8 \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{2k+1} (\sqrt{2} - 1)^{2k+1} \right| \leqslant \dfrac{8}{2n+3}$

2. a) Montrer que si U et V sont semblables alors $R(U)$ et $R(V)$ sont semblables, si $R \in \mathbb{R}[X]$.

b) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$ et $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix}$; calculer $P(M)$ pour $P \in \mathbb{R}[X]$, en fonction de $P(A)$, $P'(A)$ et B

c) Montrer que si A est diagonalisable et $B = 0$ alors M est diagonalisable.

d) Montrer que si M est diagonalisable alors A est diagonalisable et B est nulle

Exercice 40 **(CCINP PSI 2021)** *[Indication] [Solution]*

1. Trois personnes A_1, A_2 et A_3 rentrent dans un bureau de poste. IL n'y a que deux guichets donc A_3 attend son tour. On est à l'instant $t = 0$ et le temps est compté en entiers. L'entier X_i, le temps de service de la personne A_i suit une loi géométrique de paramètre p. Y est la variable aléatoire discrète comptant l'instant où $A_3 2$ peut être servie.

a) Déterminer la fonction de répartition de Y ; on pourra travailler avec $P(Y > k)$.

b) Montrer que Y suit une loi usuelle.

c) Déterminer le temps moyen passé par A_3 au bureau de poste.

2. Soit $f \in \mathcal{GL}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f^3 = id$

a) Montrer que 1 est valeur propre de f.

b) Montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker(f - id) \oplus \ker(f^2 + f + id)$

c) ?

Exercice 41 **(CCINP PSI 2021)** *[Indication] [Solution]*

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

a) Déterminer les valeurs propres de A.

b) A est-elle diagonalisable ?

c) Trouver une base $\mathcal{B} = (u, v, w)$ de $\mathbb{R}^3$ pour laquelle u et v sont des vecteurs propres de A.

d) Trigonaliser A

2. Soit $(E_0) : x^2 y'' - 2y = 0$

a) Déterminer les solutions polynômiales de (E_0).

b) Résoudre (E_0) sur $\mathbb{R}^{+*}$ en posant $y(x) = x^2 z(x)$.

c) Résoudre (E_0) sur $\mathbb{R}^+$.

d) Résoudre $x^2y'' - 2y = x^3$

Exercice 42 **(CCINP PSI 2021)** *[Indication] [Solution]*

1. Soit $f(x) = \dfrac{1}{1+x^3}$ pour $x \in]-1-1[$.

a) Déterminer a, b, c tels que $f(x) = \dfrac{a}{1+x} + \dfrac{bx+c}{1-x+x^2}$ et déterminer une primitive de f.

b) Calculer $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} x^{3n+1}$

c) Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$

2. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tel que $u^3 + u^2 + u = 0$.

a) Identifier $\ker(u) \cap \ker(u^2 + u + id)$.

b) Montrer que $\mathrm{Im}(u) = \ker(u^2 + u + id)$ puis $\mathbb{R}^n = \ker(u) \oplus \ker(u^2 + u + id)$.

c) Soit v l'endomorphisme de $\mathrm{Im}(u)$ induit par u. Que vaut $\deg \mathcal{X}_v$?

d) Montrer que 0 n'est pas valeur propre de v.

e) Montrer que $\mathrm{rg}(u)$ est pair.

Exercice 43 **(CCINP PSI 2021)** *[Indication] [Solution]*

1. Pour $x > 0$ et $n \geqslant 2$, on pose $u_n(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^n \ln(n)}$

a) Déterminer le domaine de convergence D de $\displaystyle\sum_{n \geqslant 2} u_n$; on note S la somme de cette série.

b) Montrer que $\sum u_n$ ne converge pas normalement sur D.

c) i. Montrer que $\left| \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \right| \leqslant \dfrac{1}{\ln(n+1)}$.

ii. En déduire que S est continue sur D.

d) S est-elle intégrable sur D ?

2. Soient E un espace euclidien, $u_1, \dots, u_n$ des endomorphismes symétriques de E tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{rg}(u_k) = \dim(E)$ et

$\forall x \in E, \|x\|^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (u_k(x)|x)$

a) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k - id$ est diagonalisable.

b) En déduire $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k = id$

c) Montrer que $E = \displaystyle\overset{\perp}{\bigoplus_{1 \leqslant k \leqslant n}} \mathrm{Im}(u_k)$ et que les u_k sont des projecteurs orthogonaux tels que $u_i \circ u_j = 0$ si $i \neq j$.

Exercice 44 **(CCINP PSI 2021)** *[Indication] [Solution]*

1. Une urne contient 3 jetons numérotés 1, 2 et 3 que l'on tire avec remise. On note Y le nombre de tirages nécessaires pour obtenir 2 jetons différents et Z celui pour tirer les 3 jetons.

a) Déterminer la loi de Y.

b) Reconnaître $Y - 1$ et en déduire $E(Y)$ et $V(Y)$

c) Déterminer la loi du couple (Y, Z).

d) Déterminer la loi et l'espérance de Z

2. Soient $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $C = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre -1 et $M = \begin{pmatrix} 1 & {}^tC \\ C & A \end{pmatrix}$

a) Calculer $M\,{}^tM$ et en déduire $M \in \mathcal{GL}_{n+1}(\mathbb{R})$

b) Soit $N = M^{-1}\,{}^tM$. Montrer que $N \in \mathcal{O}_{n+1}(\mathbb{R})$.

Exercice 45 **(CCINP PSI 2021)** *[Indication] [Solution]*

1. Pour $x \geqslant 0$ et $n \geqslant 1$, on pose $u_n(x) = (-1)^n \dfrac{e^{-nx}}{n}$ et $S(x) = \sum\limits_{n \geqslant 1} u_n(x)$

a) Montrer que $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n(x)$ converge pour $x \geqslant 0$.

b) S est-elle continue sur $\mathbb{R}^+$?

c) Montrer que S est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

d) Calculer $S(x)$ pour $x \geqslant 0$.

2. Soit $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum\limits_{i=1}^{n} v_i = 1$. Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose $f(x) = x - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right) v$.

a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

b) Montrer que $y \in \mathrm{Im}(f) \Leftrightarrow f(y) = y$.

c) Montrer que $\mathbb{R}^n = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$

d) Déterminer les espaces propres de f

Exercice 46 **(CCINP PSI 2021)** *[Indication] [Solution]*

1. Soient $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $M = J - I_3$. On note A, B et C trois points du plan sur lesquels une puce peut se déplacer ; si elle est sur un point à un instant, elle saute de façon équiprobable sur l'un des deux autres à l'instant suivant. On note A_n l'événement « la puce est en A à l'instant n » (recip. B_n et C_n en B et en C) et $U_n = \begin{pmatrix} P(A_n) \\ P(B_n) \\ P(C_n) \end{pmatrix}$

a) Trouver une relation entre U_{n+1} et U_n.

b) Diagonaliser M et en déduire une expression de M^n

c) Trouver un polynôme annulateur de J et en déduire une autre expression de M^n.

d) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

2. Déterminer la nature des séries suivantes :

a) $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{n} \displaystyle\int_{n^2}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

b) $\sum\limits_{n \geqslant 0} (-1)^n \displaystyle\int_0^n e^{-t^2 n^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 47 **(CCINP PSI 2021)** *[Indication] [Solution]*

1. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle positive. On définit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 \in \mathbb{R}^+$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n + \sqrt{u_n^2 + a_n^2}}{2}$ pour $n \geqslant 0$

a) Montrer que $u_{n+1} - u_n \leqslant \dfrac{a_n}{2}$.

b) En déduire que si $\sum a_n$ converge alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

c) La réciproque est-elle vraie ? On pourra utiliser $u_n = \dfrac{n}{n+1}$

2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^2 + {}^tM = I_n$

a) Montrer que les valeurs propres de M sont racines de tout polynôme annulateur de M.

b) On suppose M symétrique ; montrer que M est diagonalisable et que $\det(M) \times \mathrm{Tr}(M) \neq 0$

c) Montrer que M est diagonalisable, même si M n'est pas symétrique.

d) Montrer que M est inversible si et seulement si $1 \notin \mathrm{Sp}(M)$

Exercice 48 **(CCINP PSI 2021)** *[Indication] [Solution]*

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M\left({}^tMM\right)^2 = I_n$.

a) À l'aide du déterminant, montrer que M est inversible.

b) En déduire que M est symétrique.

c) Conclure que $M = I_n$.

2. Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^x}$

a) Trouver le domaine de définition D de F.

b) Montrer que F est continue sur D.

c) Montrer que F est $\mathcal{C}^1$ sur un domaine à préciser et, à l'aide d'un changement de variable, que $F'(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)t^x}{(1+t^x)^2}\left(\frac{1}{t^2}-1\right)\mathrm{d}t$.
En déduire les variations de F.

d) Déterminer les limites de F en $+\infty$ et en 1.

Exercice 49 **(CCINP PSI 2021)** *[Indication] [Solution]*

1. Le nombre d'enfants d'une famille N suit une loi de Poisson de paramètre λ. Chaque enfant à la probabilité $p \in]0,1[$ d'être une fille, indépendamment des autres. On note X le nombre de filles.

a) Déterminer la loi conjointe de N et X

b) Donner la loi de X.

2. Soient E un espace de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$ dont les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont distinctes.

a) Montrer que $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \longmapsto (P(\lambda_i)) \in \mathbb{R}^n$ est un isomorphisme.

Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $g \circ f = f \circ g$

b) Montrer que tout vecteur propre de f est aussi un vecteur propre de g.

c) Montrer qu'il existe une base de E constituée de vecteurs propres communs à f et g.

d) Montrer l'existence et l'unicité de $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $g = P(f)$.

Exercice 50 **(CCINP PSI 2021)** *[Indication] [Solution]*

1. Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes et de même loi, qui admettent une variance et telles que $Z = X + Y + 1$ suive $\mathscr{G}(p)$

a) Déterminer l'espérance de X.

b) Déterminer la fonction génératrice de X.

c) Déterminer la loi de X

2. On note $\mathcal{D}_n$ les matrices $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour lesquelles on a $\mathcal{X}_M = \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(X - m_{i,i})$ (les valeurs propres sont exactement les coefficients diagonaux de M).

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 1 & 2 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & (1) & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont-elles dans $\mathcal{D}_n$?

b) $\mathcal{D}_n$ est-il un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

c) Soit $M \in \mathcal{D}_n$ symétrique. Calculer $\mathrm{Tr}(M^2)$ et montrer que M est diagonale.

Exercice 51 **(CCINP PSI 2021)** *[Indication] [Solution]*

1. Soient $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t$ et $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$. On rappelle que $S(1) = \dfrac{\pi^2}{6}$.

a) Déterminer le domaine de définition de F.

b) Montrer que si $x \in]-1,1[$ alors $F(x) = -S(x)$

c) Montrer que si $x \in]0,1[$, $F(x) + F(1-x) = \ln(x)\ln(1-x) - \dfrac{\pi^2}{6}$

2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}$

a) Déterminer le rang de B en fonction du rang de A. En déduire que A est inversible si et seulement si B est inversible.

b) Déterminer $\mathcal{X}_B$ en fonction de $\mathcal{X}_A$. Que peut-on en déduire sur les valeurs propres de A et B ?

c) Montrer que si A est inversible et admet n valeurs propres distinctes alors B est diagonalisable.

d) B est-elle diagonalisable si A n'est plus supposée inversible ?

e) Si B est diagonalisable, montrer que A l'est aussi.

f) Si A est diagonalisable, montrer que B est diagonalisable si et seulement si A est inversible.

Exercice 52 **(CCINP PSI 2021)** *[Indication] [Solution]*

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique et f canoniquement associé ; on munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique.

a) Montrer que $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2, (x|f(y)) = -(f(x)|y)$

b) Montrer que $\det(f) = (-1)^n \det(f)$. Qu'en déduit-on ?

c) Montrer que f induit sur $\mathrm{Im}(f)$ un endomorphisme injectif. Que peut-on en déduire sur $\dim(\mathrm{Im}(f))$?

d) On suppose $n = 3$. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$.

f est-il diagonalisable ?

2. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $I_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{ch}^n t}$

a) Montrer que la fonction I_n est bien définie sur $\mathbb{R}^+$.

b) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction à déterminer.

c) La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}^+$?

d) Trouver une relation entre I_n et I_{n+2}.

e) En déduire, pour $n \geqslant 1$, la valeur de $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{ch}^n t}$.

Exercice 53 **(CCINP PSI 2021)** *[Indication] [Solution]*

1. Soit $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$

b) Montrer que $f(x) = xf(x-1)$ si $x \geqslant 1$

Pour $n \geqslant 1$, on pose $v_n = \displaystyle\int_{n-1}^n \ln(f(u))\,\mathrm{d}u$. On souhaite étudier la nature de $\sum \frac{(-1)^n}{v_n}$. On pose, pour $x \geqslant 1$, $\varphi(x) = \displaystyle\int_{x-1}^x \ln(f(u))\,\mathrm{d}u$.

c) Montrer que φ est dérivable sur $[1, +\infty[$ et calculer $\varphi'(x)$

d) Conclure

2. Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ dont la matrice A est la même dans toutes les bases.

a) Soit $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $AP = PA$.

b) Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $B - \lambda I_n$ soit inversible. En déduire $AB = BA$.

c) Déterminer A. Comment appelle-t-on un tel endomorphisme f ?

Mines-Télécom

Exercice 54 **(Mines-Télécom PSI 2021)** *[Indication] [Solution]*

1. On pose $I = \displaystyle\int_0^1 x^x\,\mathrm{d}x$

a) Montrer que I existe.

b) Montrer que $I = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^n}$.

2. Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes suivant $\mathscr{G}(p)$. On pose $M(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega) \\ Y(\omega) & X(\omega) \end{pmatrix}$.

a) Montrer que $P(X = Y) = \dfrac{p}{2-p}$; en déduire la probabilité que M soit inversible.

b) On note λ_1 et λ_2 les valeurs propres de M. Déterminer la covariance de λ_1 et λ_2 ; sont-elles indépendantes ?

Exercice 55 **(Mines-Télécom PSI 2021)** *[Indication] [Solution]*

1. Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left[\sqrt{n+x} - \sqrt{n}\right]$ pour $x \geqslant 0$.

a) Montrer que f est bien définie

b) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$ et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$; étudier ses variations.

c) Montrer que $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.

2. Soient $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $< P|Q >= \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(\alpha)Q^{(k)}(\alpha)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

b) Montrer que $P \mapsto (X-\alpha)P'$ est un endomorphisme symétrique de E.

Exercice 56 **(Mines-Télécom PSI 2021)** *[Indication] [Solution]*

1. Soient E un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$, ℓ une forme linéaire non nulle sur E, $a \in E$ non nul et f définie par $f(x) = \ell(x)a - \ell(a)x$

a) Montrer que f est un endomorphisme de E qui s'annule en a.

b) Justifier que si $\ell(a) \neq 0$ et $f(x) = 0$ alors $x \in \mathrm{Vect}\{a\}$.

c) Calculer $f(x)$ si $\ell(x) = 0$

d) f est-il diagonalisable ?

e) Déterminer $\mathcal{X}_f$ et $\mathrm{Tr}(f)$.

2. Soient $f \in \mathcal{C}^1([0,1])$ et $u_n = \displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

b) Déterminer un équivalent de u_n si $f(1) \neq 0$.

Exercice 57 **(Mines-Télécom PSI 2021)** *[Indication] [Solution]*

1. a) Déterminer un équivalent quand n tend vers $+\infty$ de $u_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$

b) Déterminer la nature de $\sum \sin(2\pi n! e)$

2. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ -6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

a) u est-il diagonalisable ?

b) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ dans laquelle $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

c) Déterminer les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ qui commutent avec u

Exercice 58 **(Mines-Télécom PSI 2021)** *[Indication] [Solution]*

1. Soient p un projecteur de E et $\mathcal{H} = \{f \in \mathcal{L}(E), f \circ p = p \circ f\}$

a) Montrer que $\mathcal{H}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

b) Soit $f \in \mathcal{H}$. Montrer que $\ker(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont stables par f.

c) Montrer que si $\ker(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont stables par f alors $f \in \mathcal{H}$.

2. a) Déterminer le domaine de convergence de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ avec $u_n(x) = \dfrac{1}{n^2x+n}$.

b) Montrer que sa somme S est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

c) Montrer que, pour $x > 0$, on a $\left| S(x) - \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2 x} \right| \leqslant \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^3x^2}$ et en déduire un équivalent de S en $+\infty$.

Exercice 59 **(Mines-Télécom PSI 2021)** *[Indication] [Solution]*

1. Pour $n \geqslant 2$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(x^n)\,\mathrm{d}x$

a) Transformer I_n avec le changement de variable $t = x^n$.

b) En déduire que I_n existe.

2. Soient E un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.

a) Montrer qu'il existe $a \in E$ tel que $\mathcal{B} = (a, f(a), \ldots, f^{n-1}(a))$ soit une base de E.

b) Écrire la matrice de f dans $\mathcal{B}$. f est-il bijectif ?

c) Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M^3 = 0$ et $M^2 \neq 0$.

i. M est-elle semblable à $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$?

ii. ?

Exercice 60 **(Mines-Télécom PSI 2021)** *[Indication] [Solution]*

1. Soit la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $P_0 = 1$, $P_1 = X$ et $P_{n+1} = XP_n - P_{n-1}$

a) Montrer que $P_n(2\cos\theta) = \dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$

b) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ 1 & 0 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer le polynôme caractéristique de A et ses valeurs propres.

2. Étudier les convergences simple, normale et uniforme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n \frac{x}{(1+x^2)^n}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 61 **(Mines-Télécom PSI 2021)** *[Indication] [Solution]*

1. Soit $f : z \in \mathbb{C} \longmapsto iz + (1-i)\overline{z}$

a) Déterminer une $\mathbb{R}$-base de $\mathbb{C}$

b) Montrer que f est $\mathbb{R}$-linéaire et déterminer la matrice de f dans la base précédente.

c) Diagonaliser f

2. Soient $\alpha > 0$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^\alpha$. Pour quelles valeurs de α, la série $\displaystyle\sum \frac{1}{S_n}$ est-elle convergente ?

Exercice 62 **(Mines-Télécom PSI 2021)** *[Indication] [Solution]*

1. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

a) Montrer que A n'est pas diagonalisable mais trigonalisable

b) Déterminer les éléments propres de A.

c) Déterminer un vecteur propre u de A associé à la valeur propre 2 puis un vecteur v tel que $(A - 2I_3)v = u$. En déduire une matrice P inversible et T triangulaire supérieure telles que $A = PTP^{-1}$

d) Calculer T^k puis A^k

2. a) Montrer que $\arccos(1-h) \underset{h\to 0^+}{\sim} \sqrt{2h}$; on pourra poser $\theta = \arccos(1-h)$

b) Déterminer la nature de $\displaystyle\sum \arccos\left(\frac{1+n^3}{2+n^3}\right)$

Exercice 63 **(Mines-Télécom PSI 2021)** *[Indication] [Solution]*

1. Déterminer la distance dans $\mathbb{R}^3$ de $u = (1,1,1)$ au sous-espace $F = \{(x, y1z) \in \mathbb{R}^3 | x - y + 2z = 2x - 3y + z = 0\}$

2. Soient $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, R)$ et $\varphi(f) : x \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t$

a) Justifier que φ est un endomorphisme de E.

b) Est-il surjectif ? Injectif ?

c) Déterminer les éléments propres de φ

d) ?

Autres

Exercice 64 **(ENSEA PSI 2021)** *[Indication] [Solution]*

1. Déterminer les n-uplets réels $(x_1, \ldots, x_n)$ tels que $\begin{cases} x_1 + \cdots + x_n = n \\ x_1^2 + \cdots + x_n^2 = n \end{cases}$; on pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz

2. Soit $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3xy^3 - x^3y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

a) Montrer que f est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

b) Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

c) Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$; f est-elle $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 65 **(Petites Mines PSI 2021)** *[Indication] [Solution]*

1. a) Donner la définition d'une loi de Poisson

b) Donner l'espérance et la variance d'une loi de Poisson et le justifier

c) Montrer que si $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{P}(\mu)$ sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes alors $X+Y$ suit $\mathscr{P}(\lambda+\mu)$

2. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ de la forme $P = X^n \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$, on associe sa matrice compagnon $C_P = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & (0) & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

a) Montrer que C_P est inversible si et seulement si $P(0) \neq 0$

b) Déterminer le polynôme caractéristique de C_P.

c) Montrer que les espaces propres de C_P sont de dimension 1

d) Montrer que C_P est diagonalisable si et seulement si P est scindé à racines simples

Indications

Exercice 1 *[sujet]* **1.** Ne pas chercher forcément à utiliser la relation admise (qui n'a rien d'indispensable dans cet exercice)

Exercice 2 *[sujet]* **1.** b) Utiliser le DL de $\ln(1+u)$ et la formule de Taylor

Exercice 3 *[sujet]*

Exercice 4 *[sujet]* **1.** a) Poser $\varphi = f' + af$ et résoudre $y' + ay = \varphi$ de façon à trouver f en fonction de φ. Ensuite utiliser la définition de limite avec ε

b) appliquer la première question à $h = f' + bf$ avec b bien choisi

2. a) Montrer que $\Delta(t) \in \mathbb{R}_1[t]$ (sans chercher à le calculer complètement)

Exercice 5 *[sujet]* **2.** pour le premier cas, montrer $\forall X \in \mathbb{R}^n, (UX|X) \geqslant 0 \Leftrightarrow \mathrm{Sp}(U) \subset \mathbb{R}^+$; pour le dernier (si V inversible), montrer qu'il existe $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $V = {}^tMM$

Exercice 6 *[sujet]* **1.** a) Vérifier que B est aussi DZ et trouver les vp de B en fct de celles de A.

2. a) commencer par prouver la CV de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$

b) IPP en introduisant F une primitive de f et trouver λ tel que $F(t) - \lambda t = O(1)$

Exercice 7 *[sujet]* **1.** a) matrice dans une bon bien choisie

b) D est un espace propre de r qui est donc stable par s

Exercice 8 *[sujet]* **3.** Commencer par chercher un équivalent de a_n

Exercice 9 *[sujet]*

Exercice 10 *[sujet]*

Exercice 11 *[sujet]* **1.** Il est plus facile de prouver que la famille (u_j) est génératrice.
Puis chercher la matrice dans la base (u_j) des vecteurs (v_j).

Exercice 12 *[sujet]* **3.** chercher le lien entre u_n et v_n puis la limite de v_n ; pour cela commencer par vérifier qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\ln(1-u) \geqslant -\dfrac{3}{2}u$ sur $[0, \alpha]$

Exercice 13 *[sujet]* **1.** IPP pour trouver un lien entre I_n et I_{n-1}

Exercice 14 *[sujet]*

Exercice 15 *[sujet]* **1.** Poser $t = xu$ dans I puis considérer $f(x) - I$.

2. IPP pour la limite en $+\infty$.

Exercice 16 *[sujet]* **2.** IPP sur $(P_n|P_m)$ si $n < m$

3. vérifier que $P_n \perp \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et, en supposant que P_n possède au plus $n-1$ racines, considérer $(P_n|Q)$ avec Q qui change de signe en même temps que P_n.

Exercice 17 *[sujet]* **6.** Conditionner par la première rencontre

Exercice 18 *[sujet]*

Exercice 19 *[sujet]*

Exercice 20 *[sujet]*

Exercice 21 *[sujet]*

Exercice 22 *[sujet]*

Exercice 23 *[sujet]*

Exercice 24 *[sujet]*

Exercice 25 *[sujet]* **1.** d) Commencer par $P(m_n \geqslant k)$

Exercice 26 *[sujet]*

Exercice 27 *[sujet]*

Exercice 28 *[sujet]* **1.** c) Comparaison série/intégrale

Exercice 29 *[sujet]* **1.** d) Le plus simple est avec le TITT

Exercice 30 *[sujet]*

Exercice 31 *[sujet]*

Exercice 32 *[sujet]* **2.** b) Faire des manipulations par blocs sur $\mathcal{X}_B(\lambda)$, en supposant $\lambda \neq 0$

Exercice 33 *[sujet]* **2.** On peut tout faire avec une matrice (et la base canonique n'est pas celle qui donne les calculs les plus simples)

Exercice 34 *[sujet]* **1.** c) Utiliser l'éq diff et remarquer que f est impaire (pour simplifier les calculs)

Exercice 35 *[sujet]*

Exercice 36 *[sujet]* **1.** b) Montrer que $M + {}^tM = 2I_n$ puis qu'il existe A antisymétrique telle que $M = I_n + A$, puis $A^2 = 0$ et enfin $A = 0$.

2. d) Pour la valeur de $S(-1)$, prouver la CVU de $\sum u_n x^n$ sur $[-1, 0]$

Exercice 37 *[sujet]*

Exercice 38 *[sujet]*

Exercice 39 *[sujet]*

Exercice 40 *[sujet]*

Exercice 41 *[sujet]*

Exercice 42 *[sujet]*

Exercice 43 *[sujet]* **1.** d) Le plus simple est avec le TITT

2. b) montrer que $\mathrm{Sp}\left(\sum_{k=1}^{n} u_k - id\right) = \{0\}$

c) Commencer par la somme directe, puis projecteurs tels que $u_i \circ u_j = 0$ et finir par l'orthogonalité des images.

Exercice 44 *[sujet]* **1.** c) Calculer $P(Z = h|Y = k)$

2. a) vérifier que $\mathrm{rg}(C\,{}^tC) = 1$ puis que $\det(I_n + C\,{}^tC) \neq 0$

Exercice 45 *[sujet]* **2.** Si $u = (1, \ldots, 1)$ alors $\sum_{i=1}^{n} x_i = (u|x)$ pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 46 *[sujet]* **2.** b) Poser $x = nt$ et faire intervenir la première série

Exercice 47 *[sujet]*

Exercice 48 *[sujet]*

Exercice 49 *[sujet]*

Exercice 50 *[sujet]*

Exercice 51 *[sujet]* **2.** b) Faire des manipulations par blocs sur $\mathcal{X}_B(\lambda)$ et supposer (par ex) $\lambda \neq 0$ dans un premier temps.

Exercice 52 *[sujet]*

Exercice 53 *[sujet]*

Exercice 54 *[sujet]*

Exercice 55 *[sujet]* **1.** a) Raisonner par l'absurde et commencer par vérifier que $f(x) \geqslant S_{2n+1}(x)$ avant de séparer les termes pairs/impairs.

Exercice 56 *[sujet]* **2.** b) Commencer par une IPP

Exercice 57 *[sujet]* **1.** a) Utiliser Taylor reste intégral

Exercice 58 *[sujet]*

Exercice 59 *[sujet]*

Exercice 60 *[sujet]* **1.** a) $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$

Exercice 61 *[sujet]* **2.** Trouver un équivalent de S_n par comparaison série/intégrale

Exercice 62 *[sujet]* **2.** a) poser $f(h) = \arccos(1-h)$ et faire le chgt de variable proposé

Exercice 63 *[sujet]*

Exercice 64 *[sujet]*

Exercice 65 *[sujet]*

Solutions

Exercice 1 *[sujet]* **1.** a) $\ln(u_{n+1})+\dfrac{3}{2}\ln(n+1)-\ln(u_n)-\dfrac{3}{2}\ln(n)=\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)-\ln\left(1+\dfrac{5}{2n}\right)+\dfrac{3}{2}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc, si $w_n=\ln(u_n)+\dfrac{3}{2}\ln(n)$, on a bien (w_n) CV (lien suite/série)

b) Si on note $\ell=\lim w_n$, on a $\ln(u_n)=-\dfrac{3}{2}\ln(n)+\ell+o(1)$ donc $u_n\sim\dfrac{e^\ell}{n^{3/2}}$ (positif) donc $\sum u_n$ CV

c) Sommer la relation $2(k+1)u_{k+1}+3u_{k+1}=2ku_k+2u_k$

d) On pose $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^n u_k$ et $T_n=\displaystyle\sum_{k=0}^n ku_k$; on a $S_{n+1}=3+2(T_n-T_{n+1})+2(S_{n+1}-S_n)=3-2(n+1)u_{n+1}+2u_{n+1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}3$

2. a) $J^2=nJ$ puis $\mathrm{Sp}(J)=\{0,n\}$, $E_0(J)=\mathrm{Vect}\{e_1-e_i, i\geqslant 2\}$ (hyperplan) et $E_n(J)=\mathrm{Vect}\{(1,\dots,1)\}$ ($=E_0(J)^\perp$ par th spectral si besoin)

b) $P=(X^2+X)^2-n(X^2+X)=X(X+1)(X^2+X-n)$ est SARS

c) $MX=\lambda X\Rightarrow JX=(\lambda^2+\lambda)X$

d) On a $\mathrm{Sp}(M)\subset\{0,-1,\lambda_1,\lambda_2\}$ avec $\lambda_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+4n}}{2}$. $MJ=JM=M^3+M^2$ donc les espaces propres de J sont stables par M ; si $J=P\mathrm{diag}(0I_{n-1},n)P^{-1}$ alors $M=P\mathrm{diag}(N,\mu)P^{-1}$ (matrices diagonales par blocs) puis $N^2+N=0$ et $\mu^2+\mu=n$ donc $\mu=\lambda_{1,2}$; les solutions sont donc $M=P\mathrm{diag}(N,\lambda_{1,2})P^{-1}$ où $N\in\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ est DZ avec $\mathrm{Sp}(N)\subset\{-1,0\}$.

Exercice 2 *[sujet]* **1.** a) $\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)e^{-x}\underset{x\to+\infty}{=}o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

b) On a $\ln(1+u)\underset{0}{=}u-\dfrac{u^2}{2}+o(u^2)$ et on remarque que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x}{n}e^{-x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{2n^2}e^{-x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n^2}$; il suffit donc de prouver que $J_n=I_n-\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x}{n}e^{-x}\,\mathrm{d}x+\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{2n^2}e^{-x}\,\mathrm{d}x=o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $J_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)-\frac{x}{n}+\frac{x^2}{2n^2}\right]e^{-x}\,\mathrm{d}x$. Avec la formule de Taylor, on a $\left|\ln(1+u)-u+\dfrac{u^2}{2}\right|\leqslant\dfrac{u^3}{3}$ donc $|J_n|\leqslant\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^3}{3n^3}e^{-x}\,\mathrm{d}x=\frac{C}{n^3}$ donc $J_n=O\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$

2. a) Soient F' et G' des supplémentaires de F et G dans E puis $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ des bases adaptées à $E=F\oplus F'$ et $E=G\oplus G'$. Il suffit ensuite de prendre u tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2\to\mathcal{B}_1}=\begin{pmatrix}0&I_r\\0&0\end{pmatrix}$ où $r=\dim(F)=\dim(G')$ (donc le bloc en haut à droite est bien carré). Récip par le th du rang.

b) On a $G\subset F$; si on pose $u_1=(1,-1,0)$ puis $u_2=(1,0,-1)$, on a $F=\mathrm{Vect}\{u_1,u_2\}$. On complète avec $u_3=(0,0,1)$ de sorte que $\mathcal{B}=(u_1,u_2,u_3)$ soit une base de $\mathbb{R}^3$. Il suffit ensuite de prendre $u\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

Exercice 3 *[sujet]* **1.** a) $\left|\dfrac{e^{-t^2}}{1+x^2t^2}\right|\leqslant e^{-t^2}$ intégrable sur $\mathbb{R}$.

b) Étudier $u\mapsto 1-u+u^2-\dfrac{1}{1+u}$ et $u\mapsto u^3-u^2+u-1+\dfrac{1}{1+u}$

c) $0\leqslant\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}(1-x^2t^2+x^4t^4)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t-f(x)\leqslant x^6\int_{-\infty}^{+\infty}t^6e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ donc $f(x)=\displaystyle\int_{\mathbb{R}}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t-x^2\int_{\mathbb{R}}t^2e^{-t^2}\,\mathrm{d}t+x^4\int_{\mathbb{R}}t^4e^{-t^2}\,\mathrm{d}t+O(x^6)$

2. a) J_n est symétrique réelle et $J_n^2=nJ_n$ donc $\mathrm{Sp}(J_n)\subset\{0,n\}$ puis $\mathrm{Tr}(J_n)=n$ donc $\mathcal{X}_{J_n}=X^{n-1}(X-n)$

b) $P_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$ et $P_3=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}\sqrt{3}&1&\sqrt{2}\\-\sqrt{3}&1&\sqrt{2}\\0&-2&\sqrt{2}\end{pmatrix}$

c) $MJ_3=J_3M$ si et seulement si $M=P_3\begin{pmatrix}A&0\\0&b\end{pmatrix}P_3^{-1}$ avec $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donc $\mathcal{C}(J_3)$ est isomorphe à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\times\mathbb{R}$ donc de dimension $2^2+1=5$.

Exercice 4 *[sujet]* **1.** a) on a $f(x) = f(0)e^{-ax} + e^{-ax}\displaystyle\int_0^x e^{au}\varphi(u)\,\mathrm{d}u$ puis $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(0)e^{-ax} = 0$ et, si $\varepsilon > 0$, il existe $A > 0$ tel que $|\varphi| < \varepsilon$ si $x > A$; on écrit alors $\left|e^{-ax}\displaystyle\int_0^x e^{au}\varphi(u)\,\mathrm{d}u\right| \leqslant e^{-\operatorname{Re}(a)x}\displaystyle\int_0^A e^{\operatorname{Re}(a)u}|\varphi(u)|\,\mathrm{d}u + \varepsilon e^{-\operatorname{Re}(a)x}\displaystyle\int_A^x e^{\operatorname{Re}(a)u}\,\mathrm{d}u \leqslant e^{-\operatorname{Re}(a)x}\displaystyle\int_0^A e^{\operatorname{Re}(a)u}|\varphi(u)|\,\mathrm{d}u + \varepsilon$ et il existe $B > A$ tel que $e^{-\operatorname{Re}(a)x}\displaystyle\int_0^A e^{\operatorname{Re}(a)u}|\varphi(u)|\,\mathrm{d}u < \varepsilon$ pour $x > B$ (l'intégrale est une constante). Pour $x > B$, on a $\left|e^{-ax}\displaystyle\int_0^x e^{au}\varphi(u)\,\mathrm{d}u\right| < 2\varepsilon$

b) on a $h' + af = f'' + (a+b)f' + abf$ donc on cherche a, b tels que $\begin{cases} a+b=1 \\ ab=1\end{cases}$; on prend $a = -j$ et $b = -j^2$. Comme $\operatorname{Re}(b) = \dfrac{1}{2} > 0$, on déduit de la première question $\displaystyle\lim_{+\infty} h = 0$ puis, comme $\operatorname{Re}(a) = \dfrac{1}{2} > 0$, $\displaystyle\lim_{+\infty} f = 0$

2. a) On effectue $L_i \leftarrow L_i - L_1$ pour $i \geqslant 2$ (il n'y aura plus de t dans les autres lignes que L_1) et si on développe par rapport à L_1, Δ est affine. Il existe α, β tels que $\Delta(t) = \alpha t + \beta$; on a $\Delta(-c) = (a-c)^n$ et $\Delta(-b) = (a-b)^n$ donc $\begin{cases} -\alpha c + \beta = (a-c)^n \\ -\alpha b + \beta = (a-b)^n\end{cases}$ on trouve alors $\alpha = \dfrac{(a-b)^n - (a-c)^n}{b-c}$ et $\beta = \dfrac{b(a-c)^n - c(a-c)^n}{b-c}$ puis on en déduit $\mathcal{X}_M = \dfrac{-b(X-a+c)^n + c(X-a+b)^n}{-b+c}$

b) $\mathcal{X}_M(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{\lambda - a + b}{\lambda - a + c}\right)^n = \dfrac{b}{c}$, soit $\delta \in \mathbb{C}$ tel que $\delta^n = \dfrac{b}{c}$; on trouve alors $\lambda = \dfrac{a - b + (c-a)\delta_k}{1 - \delta_k}$ avec $\delta_k = \delta e^{\frac{2ik\pi}{n}} \neq 1$ car $\delta_k^n = \dfrac{b}{c} \neq 1$. On vérifie que ces valeurs de λ (pour $k \in [\![0, n-1]\!]$) sont 2 à 2 distinctes donc $\mathcal{X}_M$ est SARS et M est DZ

Exercice 5 *[sujet]* **1.** $t^{t^x} = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(t^x \ln t)^n}{n!}$ et on applique le TITT avec $\displaystyle\int_0^1 \frac{|t^x \ln t|^n}{n!}\,\mathrm{d}t = (-1)^n \int_0^1 \frac{(t^x \ln t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t \overset{\text{IPP}}{=} (-1)^{n+1}\frac{1}{(n-1)!(xn+1)}\int_0^1 t^{xn}(\ln t)^{n-1}\,\mathrm{d}t = \cdots = \frac{1}{(xn+1)^{n+1}}$

2. indications faites en cours. Si $\det(U) = \det(V) = 0$ alors $((U+V)X|X) = (UX|X) + (VX|X) \geqslant 0$ donc $\operatorname{Sp}(U+V) \subset \mathbb{R}^+$ et $\det(U+V) \geqslant 0$. Si $V = I_n$, $U = P\operatorname{diag}(\lambda_i)\,{}^tP$ donc $U + I_n = P(\operatorname{diag}(1+\lambda_i)\,{}^tP$ et $\det(U + I_n) = \displaystyle\prod_{i=1}^n (1+\lambda_i) \overset{\lambda_i \geqslant 0}{\geqslant} 1 + \prod_{i=1}^n \lambda_i = 1 + \det(U)$. Enfin, si $V = {}^tMM$, $U + V = {}^tM({}^tM^{-1}UM^{-1} + I_n)M$, on vérifie ${}^tM^{-1}UM^{-1} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $({}^tM^{-1}UM^{-1}X|X) = (UY|Y) \geqslant 0$ avec $Y = M^{-1}X$ donc on peut appliquer le cas $V = I_n$ et on a $\det(U+V) = \det(P)\det({}^tM^{-1}UM^{-1} + I_n)\det({}^tP) \overset{\det(P)=\pm 1}{=} \det({}^tM^{-1}UM^{-1} + I_n) \geqslant 1 + \det({}^tM^{-1}UM^{-1}) \overset{\det(P)=\pm 1}{=} \det(U) + \det(V)$

Exercice 6 *[sujet]* **1.** a) Si $A = PDP^{-1}$ avec $D = \operatorname{diag}(a_i I_{n_i})$ (vp distinctes) alors $B = P\Delta P^{-1}$ avec $\Delta = D^3 + D + I_n = \operatorname{diag}(b_i I_{n_i})$ et $b_i = a_i^3 + a_i + 1$. On aura $A = Q(B)$ si et seulement si $D = Q(\Delta)$ donc si et seulement si $a_i = Q(b_i)$ pour tout i (c'est donc un problème d'interpolation). Comme $x \mapsto x^3 + x + 1$ est injective sur $\mathbb{R}$ (car strictement croissante), les b_i sont deux à deux distinctes donc un tel polynôme Q existe.

b) Le problème est que dans $\mathbb{C}$, $x \mapsto x^3 + x + 1$ n'est plus injective ; si on prend $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i\end{pmatrix}$, on a $B = 0$ et il est impossible de trouver Q tel que $A = Q(B)$

2. a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ CV (cf cours) donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t) - \lambda}{t}\,dt$ CV si et seulement si $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\lambda}{t}\,\mathrm{d}t$ CV, ce qui n'arrive que pour $\lambda = 0$.

b) On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u$; il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $nT \leqslant x < (n+1)T$ (c'est $n = \left\lfloor \dfrac{x}{T}\right\rfloor$) et on a $F(x) = n\displaystyle\int_0^T f(u)\,\mathrm{d}u + \int_{nT}^x f(u)\,\mathrm{d}u$; comme f est continue et T-périodique, elle est bornée (et atteint ses bornes) sur le segment $[0, T]$ puis sur $\mathbb{R}$. On a donc $\left|\displaystyle\int_{nT}^x f(u)\,\mathrm{d}u\right| \leqslant T\|f\|_\infty$ (bornée) et donc avec $\lambda = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(u)\,\mathrm{d}u$ (valeur moyenne de f), on a $F(x) = \lambda x + O(1)$. On fait alors une IPP avec $u'(t) = f(t) - \lambda$ et $v(t) = \dfrac{1}{t}$: on a $u(t)v(t) = \dfrac{F(t) - \lambda t}{t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t) - \lambda}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{F(t) - \lambda t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ sont de même nature et la seconde converge car $\dfrac{F(t) - \lambda t}{t^2} = O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

Reste l'unicité : si l'intégrale CV aussi pour un $\mu \in \mathbb{R}$, par linéarité, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mu - \lambda}{t}\,\mathrm{d}t$ est CV donc $\lambda - \mu = 0$.

Exercice 7 *[sujet]* **1.** a) Si $D=\operatorname{Vect} u$ et $\mathcal{B}=(u,v,w)$ est une bond, on a $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(r)=\begin{pmatrix}1&0\\0&R(\theta)\end{pmatrix}$ et $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(s)=\begin{pmatrix}-1&0\\0&I_2\end{pmatrix}$ qui commutent.

b) $D=\operatorname{Vect} u$ est une droite stable par s donc elle est engendré par un vecteur propre de s. On a donc deux possibilité : soit $u\in E_{-1}(s)$ est on est ramené à la question précédente, soit $u\in E_1(u)$ et on peut compléter en une bond $\mathcal{B}$ telle que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(r)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&-\sin\theta\\0&\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$ et $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(s)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ qui ne commutent que si $\sin\theta=0$ donc si r est un demi-tour.

2. a) $f(x)\underset{0}{\sim}\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ et $f(x)\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{1}{x^{3/2}}$

b) poser $u=\dfrac{1}{x}$

c) pour $|u|<1$, $\dfrac{1}{\sqrt{1+u^2}}=\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}u^{2n}$ donc (TITT) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{1}{2n+1/2}$ car $\dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\dfrac{1}{2n+1/2}\sim\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}n^{3/2}}$ par Stirling.

Exercice 8 *[sujet]* **1.** $\dfrac{\operatorname{th}(t)}{t^2}\underset{t\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{t^2}$ donc a_n existe (si $n\geqslant 1$) puis si $t\geqslant n$, $\dfrac{\operatorname{th}(n)}{t^2}\leqslant\dfrac{\operatorname{th}(t)}{t^2}\leqslant\dfrac{1}{t^2}$ donc $\dfrac{\operatorname{th}(n)}{n}\leqslant a_n\leqslant\dfrac{1}{n}$. On en déduit $a_n\sim\dfrac{1}{n}$ donc $R=1$ puis $\sum a_n$ DV et $\sum(-1)^n a_n$ CV par CSSA ($\lim a_n=0$ car c'est le reste d'une intégrale convergente) donc $D_S=[-1,1[$.

2. Si $x\in[-1,0]$, le CSSA est vérifié donc $|R_n(x)|\leqslant a_{n+1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ donc CVU sur $[-1,0]$ et S est continue en -1.

3. $a_n\sim\dfrac{1}{n}=\displaystyle\int_n^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ puis $S(x)-\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{x^n}{n}=\sum_{n\geqslant 1}\int_n^{+\infty}\frac{\operatorname{th}(t)-1}{t^2}\,\mathrm{d}t x^n$. On a ensuite $1-\operatorname{th}(t)=\dfrac{2e^{-2t}}{1+e^{-2t}}\leqslant 2e^{-2t}$ donc $\left|a_n-\dfrac{1}{n}\right|\leqslant\displaystyle\int_n^{+\infty}\frac{2e^{-2t}}{t^2}\,\mathrm{d}t\leqslant 2e^{-2n}\int_n^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}=\frac{2e^{-2n}}{n}$. On en déduit la CVN sur $[0,1]$ de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(a_n-\frac{1}{n}\right)x^n$ donc $\displaystyle\lim_{x\to 1}\sum_{n\geqslant 1}\left(a_n-\frac{1}{n}\right)x^n=\ell$ est finie. On a $S(x)\underset{x\to 1}{=}\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{x^n}{n}+\ell+o(1)=-\ln(1-x)+\ell+o(1)$ donc $S(x)\underset{x\to 1}{\sim}-\ln(1-x)$.

Exercice 9 *[sujet]* Ce sont les mêmes questions que dans l'étude des intégrales de Wallis

1. $\sin^x t\underset{t\to 0}{\sim}\dfrac{1}{t^{-x}}$ donc $f(x)$ existe si et seulement si $-x<1\Leftrightarrow x>-1$.

2. Si $x<y$, $\sin^x t\geqslant\sin^y t$

3. $f(x+1)=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin(t)\times\sin^x t\,\mathrm{d}t\overset{\text{IPP}}{=}x\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\sin^{x-1}t\,\mathrm{d}t=x\int_0^{\pi/2}(1-\sin^2 t)\sin^{x-1}t\,\mathrm{d}t=x(f(x-1)-f(x+1)$ donc $f(x+1)=\dfrac{x}{x+1}f(x-1)$

4. La fonction $x\mapsto(x+1)\varphi(x)$ est donc 1-périodique donc $(n+1)\varphi(n)=\varphi(0)=f(0)f(1)=\dfrac{\pi}{2}$ et $\varphi(n)=\dfrac{\pi}{2(n+1)}$

5. f est décroissante et positive donc φ aussi donc $\dfrac{\pi}{2(\lfloor x\rfloor+2)}\leqslant\varphi(\lfloor x\rfloor+1)\leqslant\varphi(x)\leqslant\varphi(\lfloor x\rfloor)=\dfrac{\pi}{2(\lfloor x\rfloor+1)}$. On en déduit, par encadrement $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}x\varphi(x)=\frac{\pi}{2}$. Comme $f(x)\geqslant f(x+1)\geqslant f(x+2)=\dfrac{x+1}{x+2}f(x)$, on a $f(x+1)\underset{x\to+\infty}{\sim}f(x)$ donc $\varphi(x)\sim f(x)^2$ et $f(x)\sim\sqrt{\dfrac{\pi}{2x}}$

En fait, comme $x\mapsto(x+1)f(x)f(x+1)$ est 1-périodique et tend vers $\dfrac{\pi}{2}$, elle est même constante égale à $\dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 10 *[sujet]* **1.** $S_n\hookrightarrow\mathscr{B}\left(n,\dfrac{1}{2}\right)$ donc $E\left(e^{x\left(S_n-\frac{n}{2}\right)}\right)\overset{\text{transf}}{=}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{xk}\frac{e^{-nx/2}}{2^n}=\frac{e^{-nx/2}}{2^n}(1+e^x)^n=\left(\operatorname{ch}\frac{x}{2}\right)^n$

2. a) On a $f'(x)=\alpha-\dfrac{1}{2}\operatorname{th}\left(\dfrac{x}{2}\right)$ donc f est maximale en $x\in\mathbb{R}^+$ tel que $\operatorname{th}\dfrac{x}{2}=2\alpha$ (unique car th est bijective de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$)

b) On commence par $P\left(\dfrac{S_n}{n}-\dfrac{1}{2}\geqslant\alpha\right)=P\left(e^{x(S_n-n/2)}\geqslant e^{n\alpha x}\right)\overset{\text{Markov}}{\leqslant}\dfrac{\left(\operatorname{ch}\frac{x}{2}\right)^n}{e^{n\alpha x}}=e^{-nf(x)}$ et on choisit le x pour lequel f est maximale.

On fait de même pour $P\left(\frac{S_n}{n}-\frac{1}{2}\leqslant -\alpha\right)=P\left(e^{x(n/2-S_n)}\geqslant e^{n\alpha x}\right)\leqslant e^{-n\alpha x}E\left(e^{x(n/2-S_n)}\right)=e^{-nf(x)}$ puis on ajoute les 2 puisque $P\left(\left|\frac{S_n}{n}-\frac{1}{2}\right|\geqslant\alpha\right)=P\left(\frac{S_n}{n}-\frac{1}{2}\geqslant\alpha\right)+P\left(\frac{S_n}{n}-\frac{1}{2}\leqslant-\alpha\right)$

Exercice 11 *[sujet]* **1.** Si $\varphi\in\mathcal{L}(\mathbb{R}_{n-1}[X],\mathbb{R})$ alors $\varphi(P)=\sum_{k=0}^{n-1}a_k\varphi(X^k)=\sum_{k=0}^{n-1}\varphi(X^k)u_k(P)$ donc $\varphi=\sum_{k=0}^{n-1}\varphi(X^k)u_k\in$ $\mathrm{Vect}\{u_0,\dots,u_{n-1}\}$ et comme $\dim(\mathcal{L}(\mathbb{R}_{n-1}[X],\mathbb{R})=\dim(\mathbb{R}_{n-1}[X])\times 1=n$, la famille génératrice $(u_j)_{0\leqslant j\leqslant n-1}$ est bien une base de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_{n-1}[X],\mathbb{R})$.

On a $v_j(P)=\sum_{k=0}^{n-1}a_k\alpha_j^k=\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_j^k u_k(P)$ donc $v_j=\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_j^k u_k$ et, si on note $\mathcal{B}=(u_0,\dots,u_{n-1})$ la base précédente, on a $\det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v_0,\dots,v_{n-1}))=V(\alpha_0,\dots,\alpha_{n-1})$ donc est inversible si les α_i sont 2 à 2 distincts.

2. Vérifier que $(P|Q)=\int_0^1\frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{t(1-t)}}\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ et orthonormaliser la base canonique.

Pour l'unicité : si (P_n) et (Q_n) sont deux telles familles, on a $Q_n\in\mathbb{R}_n[X]\cap\mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp$ (car $(Q_0,\dots,Q_{n-1})$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, degrés étagés), idem pour P_n ; comme $\mathbb{R}_n[X]\cap\mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp$ est une droite, on a $P_n=\lambda Q_n$ puis comme $\|P_n\|=\|Q_n\|=1$, on a $|\lambda|=1$ puis $\lambda>0$ avec leurs coefficients dominants.

Exercice 12 *[sujet]* **1.** $\frac{1-e^{-x}}{x\sqrt{x}}\underset{0}{\sim}\frac{1}{\sqrt{x}}$ et $\frac{1-e^{-x}}{x\sqrt{x}}\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{x^{3/2}}$. Puis $I\overset{\text{IPP}}{=}\left[(1-e^{-x})\frac{-2}{3\sqrt{x}}\right]_0^{+\infty}+\frac{2}{3}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\sqrt{\pi}$

2. $\frac{1-\cos^n x}{x^2}\underset{x\to0}{\longrightarrow}\frac{n}{2}$ et $\frac{1-\cos^n x}{x^2}\underset{+\infty}{=}O\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Puis $\frac{1-\cos^n\left(\sqrt{\frac{2t}{n}}\right)}{t\sqrt{t}}\underset{t\to0}{\sim}\frac{1}{\sqrt{t}}$ et $\frac{1-\cos^n\left(\sqrt{\frac{2t}{n}}\right)}{t\sqrt{t}}\underset{t\to+\infty}{=}O\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$.

3. On commence par trouver le lien entre u_n et v_n : on pose $x=\sqrt{\frac{2t}{n}}$ et on trouve $u_n=\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{2}}v_n$. Puis on trouve la limite de (v_n) par TCD : si $f_n(t)=\frac{1-\cos^n\left(\sqrt{\frac{2t}{n}}\right)}{t\sqrt{t}}$, on a $\lim_{n\to+\infty}f_n(t)=\frac{1-e^{-t}}{t\sqrt{t}}$. Reste la domination : si $t\geqslant1$ alors $|f_n(t)|\leqslant\frac{2}{t\sqrt{t}}$; on a $\lim_{u\to0}\frac{\ln(1-u)}{u}=-1$ donc il existe $\alpha>0$ tel que $\frac{\ln(1-u)}{u}\geqslant-\frac{3}{2}$ sur $[0,\alpha]$, si $t<1$ alors $1-\cos\sqrt{\frac{2t}{n}}\in\left[0,1-\cos\sqrt{\frac{2}{n}}\right]\subset[0,\alpha]$ si $n\geqslant n_0$ (n_0 ne dépend pas de t) et $\cos^n\left(\sqrt{\frac{2t}{n}}\right)=\exp\left[n\ln\cos\left(\sqrt{\frac{2t}{n}}\right)\right]\geqslant\exp\left[-\frac{3}{2}n\left(1-\cos\sqrt{\frac{2t}{n}}\right)\right]=\exp\left[-3n\sin^2\left(\sqrt{\frac{2t}{n}}\right)\right]\geqslant e^{-6t}$ (avec $\sin(u)\leqslant u$). On a donc $|f_n(t)|=f_n(t)\leqslant\frac{1-e^{-6t}}{t\sqrt{t}}$ sur $]0,1]$ si $n\geqslant n_0$.

Exercice 13 *[sujet]* **1.** $I_n=\int_0^{\pi/2}\sin(t)\times\sin^{2n-1}(t)\,\mathrm{d}t\overset{\text{IPP}}{=}(2n-1)\int_0^{\pi/2}\cos(t)\times\cos(t)\sin^{2n-2}(t)\,\mathrm{d}t=(2n-1)(I_{n-1}-I_n)$ donc $I_n=\frac{2n-1}{2n}I_{n-1}$ puis $I_n=\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{\pi}{2}$

2. si $|x|<R$ et $y(x)=\sum_{n\geqslant0}a_nx^{2n}$, $x(x^2-1)y''(x)+3x^2y'(x)+xy(x)=\sum_{n\geqslant0}[(2n+1)^2a_n-(2n+2)(2n+1)a_{n+1}]x^{2n+1}$ donc f est solution sur $]-R,R[$ si et seulement si $a_{n+1}=\frac{2n+1}{2n+2}a_n$ donc $R=1$ et si $|x|<1$, on a $f(x)=a_0\sum_{n\geqslant0}\frac{(2n)!}{(2^nn!)^2}x^{2n}$

3. si $|x|<1$, $\sum_{n\geqslant0}\frac{(2n)!}{(2^nn!)^2}x^{2n}=\frac{2}{\pi}\sum_{n\geqslant0}I_nx^{2n}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sum_{n\geqslant0}\sin^{2n}(t)x^{2n}\,\mathrm{d}t=\frac{2}{\pi}g(x)$ car $|\sin^{2n}(t)x^{2n}|\leqslant|x|^{2n}$ donc CVN sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ (variable t).

Exercice 14 *[sujet]* **1.** $\exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right)$ pour $k\in[\![0,n-1]\!]$

2. fait en cours (interpolation de Lagrange)

3. ?

Exercice 15 *[sujet]* **1.** Par IPP, pour $x > 0$, avec $u(t) = \dfrac{t}{1+t^2}$ et $v'(t) = \sin(xt)$ donc $u'(t) = \dfrac{1-t^2}{(1+t^2)^2}$ et $v(t) = \dfrac{-\cos(xt)}{x}$: on a $u, v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+)$ et $u(t)v(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ donc $f(x)$ existe si et seulement si $\displaystyle\int_0^{+\infty} u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$ converge, ce qui est le cas car $u'(t)v(t) \underset{t\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$; $f(0) = 0$ existe et f est impaire

2. Le théorème de continuité ne s'applique pas au voisinage de 0 car I n'est pas absolument convergente (donc $t \mapsto g(x,t)$ n'est pas intégrable). Pour $x > 0$, en posant $t = ux$, on trouve $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xu)}{u}\,\mathrm{d}u$ et $f(x) - I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{-\sin(xt)}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$. On en déduit $|f(x) - I| \leqslant \displaystyle\int \frac{xt}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}x \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$.

En $+\infty$, on peut reprendre l'expression de f obtenue après IPP : $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(1-t^2)\cos(xt)}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$ donc $|f(x)| \leqslant \dfrac{1}{x}\left(1 + \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|1-t^2|}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ (on aurait aussi pu utiliser le TCDPC avec cette expression de $f(x)$).

3. a) $I \overset{\text{Chasles}}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ puis poser $t = k\pi + u$ et utiliser $\sin(k\pi + u) = (-1)^k \sin(u)$

b) Par CSSA, on prouve $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t - \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t+\pi}\,\mathrm{d}t + R_1 \geqslant \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t - \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t+\pi}\,\mathrm{d}t > 0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = I > 0$ et $f(0) = 0$ donc f n'est pas continue à droite en 0.

Exercice 16 *[sujet]* **1.** par récurrence on trouve $P_{n+1} = P_n' - 2XP_n$ puis $\deg(P_n) = n$

2. si $n < m$ alors $(P_n|P_m) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P_n(t)\phi^{(m)}(t)\,\mathrm{d}t \overset{\text{IPP}}{=} -\int_{-\infty}^{+\infty} P_n'(t)\phi^{(m-1)}(t)\,\mathrm{d}t = \cdots = (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} P_n^{(n)}(t)\phi^{(m-n)}(t)\,\mathrm{d}t = (-1)^n P_n^{(n)}\left[\phi^{(m-n-1)}(t)\right]_{-\infty}^{+\infty} = 0$ car $P_n^{(n)}$ est constant.

3. Par degrés étagés, $(P_0, \ldots, P_{n-1})$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ donc $P_n \in \mathbb{R}_n[X]^{\perp}$. Si les racines de P_n où P_n change de signe (donc d'ordres de multiplicité impairs) sont $a_1, \ldots, a_m$ avec $m < n$ et si $Q = (X - a_1)\ldots(X - a_m)$ (qui change de signe en même temps que P_n) alors $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et on a $(P_n|Q) = 0$ mais $(P_n|Q) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P_n(t)Q(t)\phi(t)\,\mathrm{d}t$ ne peut pas être nul car $t \mapsto P_n(t)Q(t)e^{-t^2}$ est continue, de signe fixe et non nulle. On en déduit que P_n change de signe au moins n fois et comme $\deg(P_n) = n$, P_n est bien SARS.

Exercice 17 *[sujet]* **1.** Python

2. Si $X_n = k$, on aura $X_{n+1} = k+1$ si la première personne vote pour A (proba $\dfrac{k}{m}$) et la seconde vote pour B (proba $\dfrac{m-k}{m-1}$, $m-1$ car c'est une autre personne) ; idem pour $X_{n+1} = k-1$. On aura $X_{n+1} = k$ si les deux personnes votent pour le même candidat.

3. $(X_n = i)_{0\leqslant i\leqslant m}$ est un SCE et $P(X_{n+1} = k | X_n = i) = 0$ si $|k - i| \geqslant 2$.
Par récurrence sur n (pour tout $k \in [\![1, m-1]\!]$).

4. $V_A = \displaystyle\bigcup_{n\geqslant 0} (X_n = m)$ et $(X_n = m) \subset (X_{n+1} = m)$ d'où le résultat par continuité croissante.

5. Python

6. On note $V(a) = P(V_A)$ alors $P(V(a)) = \dfrac{a(m-a)}{m(m-1)}P(V(a+1)) + \dfrac{(m-a)a}{m(m-1)}P(V(a-1)) + \left(2 - \dfrac{a(m-a)}{m(m-1)}\right)P(V(a))$ donc $2P(V(a)) = P(V(a-1)) + P(V(a+1))$ puis $P(V(a)) = \alpha a + \beta$ avec $P(V(0)) = 0$ et $P(V(m)) = 1$ donc $P(V(a)) = \dfrac{a}{m}$

Exercice 18 *[sujet]* **1.** Python

2. a) Python

b) Si n est impair, $R(x) = 0$ est impossible (il faut autant de déplacement vers la gauche et vers la droite pour revenir en 0). Si $n = 2m$ est pair il faut m déplacement dans chaque sens, il y a $\dbinom{2m}{m}$ façon de choisir les positions des déplacements vers la gauche (ce qui fixe donc les autres) donc $P(R(x) = 0) = \dbinom{2m}{m}\dfrac{1}{2^{2m}}$

c) Avec Stirling, dans le cas pair, $P(R(x)=0) \underset{m\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{\pi m}}$

3. a) On pose $y=(x_1,\dots,x_{n-1},-x_n)$ et on va justifier que $R(x)$ et $R(y)$ ont la même loi : $X_n(\Omega)=\{-1,1\}$ est symétrique donc $R(x)(\Omega)=R(y)(\Omega)$; si $a\in R(x)(\Omega)$ alors, en notant $Z=\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}x_iX_i$, on a

$$\begin{aligned}
P(R(x)=a) &= P\left(Z+x_nX_n=a\middle|\, X_n=\frac{1}{2}\right)P\left(X_n=\frac{1}{2}\right)+P\left(Z+x_nX_n=a\middle|\, X_n=-\frac{1}{2}\right)P\left(X_n=-\frac{1}{2}\right)\\
&= P\left(Z=a-\frac{x_n}{2}\middle|\, X_n=\frac{1}{2}\right)P\left(X_n=\frac{1}{2}\right)+P\left(Z=a+\frac{x_n}{2}\middle|\, X_n=-\frac{1}{2}\right)P\left(X_n=-\frac{1}{2}\right)\\
&\overset{\text{indep}}{=} P\left(Z=a-\frac{x_n}{2}\right)P\left(X_n=\frac{1}{2}\right)+P\left(Z=a+\frac{x_n}{2}\right)P\left(X_n=-\frac{1}{2}\right)\\
&= P\left(Z=a-\frac{x_n}{2}\right)P\left(X_n=-\frac{1}{2}\right)+P\left(Z=a+\frac{x_n}{2}\right)P\left(X_n=+\frac{1}{2}\right)=P(R(y)=a)
\end{aligned}$$

On fait de même pour tous les changements de signes

Exercice 19 *[sujet]* **1.** Python

2. Python

3. $T_n(\Omega)=[\![1,N]\!]$ si $n\geqslant N$ et $T_n(\Omega)=[\![1,N-n]\!]$ si $n<N$

4. $T_1=1$. Puis $P(T_2=1)=\dfrac{1}{N}$ (N choix pour le trou et $\dfrac{1}{N^2}$ chances que les 2 boules tombent dans ce trou) et $P(T_2=2)=\displaystyle\sum_{i=1}^{N}P(T_2=2|X_1=i)P(X_1=i)=\sum_{i=1}^{N}\frac{N-1}{N}\frac{1}{N}=\frac{N-1}{N}$ si X_1 est le numéro du trou dans lequel la première boule est tombée.

5. $P(T_n=1)=\dfrac{N(N-1)^n{}^n}{N}=\left(1-\dfrac{1}{N}\right)^n$: N choix pour le trou restant vide, $(N-1)^n$ façon de répartir les n boules dans les $N-1$ trous restants et N^n façon de les répartir dans les N trous.
$P(T_n=2)=\dbinom{N}{2}\dfrac{(N-2)^n}{N^n}$ pour les mêmes raisons, $\dbinom{N}{2}$ façon de choisir les 2 trous vides.
$P(T_n=n)=0$ si $n>N$ et, si $n\leqslant N$, $P(T_n=n)=\dfrac{N(N-1)\dots(N-n+1)}{N^n}$ car chaque boule doit occuper un trou différent : N choix pour la première, $N-1$ pour la deuxième,...

6. $(T_n=i)_{i\in[\![1,N]\!]}$ est un SCE ; $P(T_{n+1}=k|T_n=i)=0$ si $i\notin\{k-1,k\}$ donc $P(T_{n+1}=k)=P(Tn+1=k|T_n=k)P(T_n=k)+P(T_{n+1}=k|T_n=k-1)P(T_{n-1}=k-1)$ puis $P(T_{n+1}=k|T_n=k)=\dfrac{k}{N}$ (la $n+1^{\text{ème}}$ boule doit tomber dans un des k trous déjà pleins) et $P(T_{n+1}=k|T_n=k-1)=\dfrac{N-k+1}{N}$ (la $n+1^{\text{ème}}$ boule doit tomber dans un des $N-(k-1)$ trous vides)

7. a) $G_{n+1}(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\left[\frac{k}{N}P(T_n=k)+\frac{N-k+1}{N}P(T_n=k-1)\right]x^k=\frac{x}{N}\sum_{k=1}^{N}P(T_n=k)x^{k-1}+\frac{x}{N}\sum_{i=0}^{N}(N-i)P(T_n=i)x^i=\frac{x}{N}G_n'(x)+\frac{x}{N}\left(NG_n(x)-xG_n'(x)\right)$

b) Après dérivation, en $x=1$, on trouve $G'_{n+1}(1)=1+\left(1-\dfrac{1}{N}\right)G'_n(1)$ et $E(T_n)=G'_n(1)$ donc (suite arithmético-géométrique) $E(T_n)=N-(N-1)\left(1-\dfrac{1}{N}\right)^{n-1}$ car $E(T_1)=1$

Exercice 20 *[sujet]* **1.** Python ; π-périodique et paire, croissante sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ donc maximale en $\dfrac{\pi}{2}$.

2. $f(0,0)=0$ et $f(x,y)\geqslant 0$ car $\cos\leqslant 1$ et $\operatorname{ch}\geqslant 1$.

3. B_r et C_r sont fermés (boule fermée et sphère) ; Ω_r est ouvert (boule ouverte)

4. f est continue sur B_r, partie fermée bornée non vide

5. a) $B_r\subset[-r,r]$ donc $F_r(x,y)\leqslant M_r$ sur B_r et comme $M_r\geqslant f(0,0)=0$, on a aussi $F_r(x,y)\leqslant M_r$ si $(x_y)\in[-r,r]^2\setminus B_r$.

b) Python

c) Python

d) Python

e) Python

6. a) Étudier $t \mapsto t - \sin(t)$ et $t \mapsto \mathrm{sh}(t) - t$.

b) Si M_r est atteint sur Ω_r (ouvert), c'est un point critique de f (car $\mathcal{C}^1$). Les points critiques sont $\left(k\frac{\pi}{2}, 0\right)$ en lesquels f vaut 0 ou 1 (si $r \geqslant \frac{\pi}{2}$). Sinon M_r est atteint sur C_r, donc un point de la forme $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ avec $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ vues les propriétés de périodicité/parité de g_r. On a $g_r'(\theta) = r\cos\theta\,\mathrm{sh}(2\sin\theta) - r\sin\theta\cos(2\cos\theta) \geqslant 2r\sin\theta\cos\theta - 2r\sin\theta\cos\theta = 0$ donc g_r est croissante et atteint son max en $\frac{\pi}{2}$. Enfin, $g_r\left(\frac{\pi}{2}\right) = f(0,r) = \frac{\mathrm{ch}(2r)-1}{2} = \mathrm{sh}^2(r)$ et comme $\mathrm{sh}^2\left(\frac{\pi}{2}\right) > 1$, on a $M_r = \mathrm{sh}^2(r)$ atteint en $(0,r)$

Exercice 21 *[sujet]* **1.** A est inversible et Python

2. Python

3. Python

4. A est symétrique réelle et $\mathrm{Sp}(A) = \{6, 12, 24\}$ (Python)

5. Si $\lim x_n = \ell$, par continuité de $x \mapsto Ax$ (linéaire), on a $\ell = \ell - \alpha(b - A\ell)$ donc $\ell = A^{-1}b$ est la solution de $(\mathcal{E})$ si $\alpha \neq 0$.

6. Si $y_n = x_n - A^{-1}b$, on a $y_{n+1} = (I_3 - \alpha A)y_n$ donc $y_n = (I_3 - \alpha A)^n y_0$. Si $\lim(I_3 - \alpha A)^n = 0$ alors $\lim y_n = 0$; réciproquement, si $\lim y_n$ existe pour tout x_n (cette limite est nulle d'après **5**) donc $\lim(I_3 - \alpha A)^n x_0 = 0$ pour tout x_0 donc $\lim(I_3 - \alpha A)^n = 0$ en prenant pour x_0 les trois vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on prouve que les trois colonnes de $(I_3 - \alpha A)^n$ CV vers 0 donc tous les coeff tendent vers 0.

7. On DZ $I_3 - \alpha A$, $I_3 - \alpha A = P\mathrm{diag}(1 - 6\alpha, 1 - 12\alpha, 1 - 24\alpha)P^{-1}$ donc la CNS est $|1 - 6\alpha| < 1$ et $|1 - 12\alpha| < 1$ et $|1 - 24\alpha| < 1$ donc $\alpha \in \left]0, \frac{1}{12}\right[$

8. ?

Exercice 22 *[sujet]* **1.** Python

2. Python

3. a) oui car les lancers sont indépendants (et avec le même jeton)

b) oui car les U_k sont tous certains

c) non car $P(U_k) = P_E(U_k)P(E) + P_{\overline{E}}(U_k)P(\overline{E}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$ alors que (même SCE) $P(U_1 \cap U_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{8} \neq \left(\frac{3}{4}\right)^2$.

4. a) $P(A_n) = P_E(A_n)P(E) + P_{\overline{E}}(A_n)P(\overline{E}) = \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2}$

b) $P_{A_n}(E) = \frac{P_E(A_n)P(E)}{P(A_n)} = \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}}} = \frac{1}{1 + 2^n}$

5.

Exercice 23 *[sujet]* **1.** Python

2. a) vecteur de norme 1

b) une équation paramétrique de la droite est $\begin{cases} x = t\cos\theta \\ y = t\sin\theta \end{cases}$ $\varphi(t) = f(t\cos\theta, t\sin\theta) = t^2(t\cos\theta - \sin\theta)(3t\cos\theta - \sin\theta)$ donc, si $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$, $\varphi(t) \underset{t\to 0}{\sim} t^2\sin^2\theta \geqslant 0$ donc minimale en O et si $\sin\theta = 0$ alors $\varphi(t) \underset{t\to 0}{\sim} 3t^4\cos^2\theta \geqslant 0$ donc minimale en O.

c) Si $\cos\theta \neq 0$, l'équation de la droite de $\mathrm{Vect}\{\vec{i}, \vec{j}\}$ dirigée par $\vec{\ell}$ est $y = x\tan\theta$ donc celle de $U \cap S$ est $z = f(x, x\tan\theta) = x^2(x - \tan\theta)(3x - \tan\theta)$. Si $\cos\theta = 0$ alors l'équation de $U \cap S$ est $z = f(0,y) = y^2$.

3. ?

4. Le seul point critique de f est $(0,0)$ où il n'y a pas d'extremum car $f(x,0) - f(0,0) = 3x^4 \geqslant 0$ (donc pas de max local) et $f(x, 2x^2) - f(0,0) = -x^4 \leqslant 0$ (donc pas de min local)

5. ?

Exercice 24 *[sujet]* **1.** Python

2. $f(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} o(e^{-xt})$ donc F est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\frac{1}{t} \underset{t\to+\infty}{=} O(f(x,t))$ si $x \leqslant 0$ donc $D_F = \mathbb{R}^{+*}$

$F \geqslant 0$ évident.

$F(x) \leqslant F(y)$ si $x > y$ donc F décroît

$\lim\limits_{+\infty} F = 0$ par TCD car si (x_n) tend vers $+\infty$, $x_n \geqslant 1$ pour $n \geqslant n_0$ et $\left|\frac{e^{-x_n t}}{1+t}\right| \leqslant e^{-t}$

3. F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \dfrac{t}{1+t}e{-}at \leqslant e^{-at}$ si $x \in [a,b] \subset \mathbb{R}^{+*}$. On a ensuite $F(x) - F'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{x}$. En résolvant cette équation on trouve $F(x) = \alpha e^x - e^x \displaystyle\int_1^x \dfrac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. $F(x) = e^x\left(\alpha - \displaystyle\int_1^x \dfrac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t\right)$ ne peut tendre vers 0 en $+\infty$ que si $\alpha = \displaystyle\int_1^{+\infty} \dfrac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ (qui CV) donc $F(x) = e^x \displaystyle\int_x^{+\infty} \dfrac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

4. ?

Exercice 25 *[sujet]* **1.** a) Si $(P|P) = 0$ alors $P(a_i) = 0$ pour tout $i \in [\![0,n]\!]$ donc P a $(n+1)$ racines distinctes donc est nul est $(\,|\,)$ est un produit scalaire.

b) On a $F = \mathrm{Vect}\{1\}^{\perp}$ donc $\dim(F) = n$ et $d(X^n, F) = \|\pi_{\mathrm{Vect}\{1\}}(X^n)\| = \dfrac{|(1|X^n)|}{\|1\|^2} = \dfrac{1}{n}\left|\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k^n\right|$.

2. a) $X_n \hookrightarrow \mathscr{U}(6)$ et $F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ \dfrac{1}{6}\lfloor t \rfloor & \text{si } t \in [1,6[\\ 1 & \text{si } t \geqslant 6 \end{cases}$

b) $(M_n \leqslant t) = \displaystyle\bigcap_{i=1}^{n}(X_i \leqslant t)$ donc, par indépendance mutuelle, $F_n(t) = (F(t))^n$

c) (F_n) CVS vers $f : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 6 \\ 1 & \text{si } t \geqslant 6 \end{cases}$ donc $\|f - F_n\|_\infty = \left(\dfrac{5}{6}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

d) On a $(m_n > t) = \displaystyle\bigcap_{i=1}^{n}(X_i > t)$ donc $1 - F_{m_n}(t) = (1 - F_X(t))^n$ puis (F_{m_n}) CVS vers $g : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ 1 & \text{si } t \geqslant 1 \end{cases}$; la CV est uniforme car $\|g - F_{Z_n}\|_\infty = \left(\dfrac{5}{6}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exercice 26 *[sujet]*

1. cours

2. $A^kU = UB^k$ pour $k \in \mathbb{N}$ par récurrence

3. Avec C-Ham, $U\mathcal{X}_A(B) = 0$ donc $\mathcal{X}_A(B) \notin \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ puis $0 = \det \mathcal{X}_A(B) = \displaystyle\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(B)} \det(A - \lambda I_n)$ donc il existe $\lambda \in \mathrm{Sp}(B)$ tel que $A - \lambda I_n \notin \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$, ie $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$.

$g(x,t) = \cos(xt^2)e^{-t}$

1. $|g(x,t)| \leqslant e^{-t}$

2. Avec $\left|\dfrac{\partial^k g}{\partial x^k}(x,t)\right| = t^{2k}\left|\cos\left(xt^2 + k\dfrac{\pi}{2}\right)\right| e^{-t} \leqslant t^{2k}e^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$

3. On a $F^{(2k+1)}(0) = 0$ et $F^{(2k)}(0) = (-1)^k \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{4k}e^{-t}\,\mathrm{d}t = (-1)^k(4k)!$. La série de Taylor de F est donc $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}(-1)^k\dfrac{(4k)!}{(2k)!}x^{2k}$ dont le RCV est nul donc F n'est pas DSE.

Exercice 27 *[sujet]* **1.** $g(x,t) = \dfrac{1}{t^x(1+t)}$

a) $g(x,t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t^x}$ et $g(x,t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{x+1}}$ donc $D =]0,1[$.

b) $|g(x,t)| \leqslant \begin{cases} \dfrac{1}{t^b(1+t)} & \text{si } t \leqslant 1 \\ \dfrac{1}{t^a(1+t)} & \text{si } t > 1 \end{cases}$ si $x \in [a,b] \subset D$.

c) Poser $u = \dfrac{1}{t}$.

d) $f(x) \geqslant \displaystyle\int_0^1 g(x,t)\,\mathrm{d}t \geqslant \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 \dfrac{\mathrm{d}t}{t^x} = \dfrac{1}{2(1-x)} \xrightarrow[x\to 1]{} +\infty$; idem en 0 avec $f(x) = f(1-x)$.

2. a) M est symétrique réelle

b) $R = aI_3 + bM = P(aI_3 + bD)P^{-1}$ si $M = MDP^{-1}$ donc R est DZ

c) $\mathrm{rg}(M + I_3) = 1$ donc $m_1(M) \overset{\mathrm{DZ}}{=} \dim(E_1(M)) = 2$ et $\mathrm{Tr}(M) = 0$ donc $\mathcal{X}_M = (X-1)^2(X-2)$. En DZ, on trouve $u_n = 2 \times 1^n + 1 \times 2^n \in \mathbb{N}$ et $\lim u_n = +\infty$.

d) $v_n = 2\times(a-b)^n + 1\times(a+2b)^n$ donc (v_n) CV si et seulement si $\left\{\begin{array}{c} |a-b|<1 \text{ ou } a-b=1 \\ \text{et} \\ |a+2b|<1 \text{ ou } a+2b=1 \end{array}\right.$

Exercice 28 *[sujet]* **1.** a) $D=\mathbb{R}^+$.

b) CVNTS avec $|f_n(x)| \leqslant \dfrac{b}{n^{1+a}}$ et $1+a>0$.

c) $f(x) \geqslant f_1(x) + \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x}{t^{1+x}}\,\mathrm{d}t = x+1$ donc f ne tend pas vers $f(0)=0$ en 0

d) $\lim\limits_{+\infty} f - id = 0$ par double limite avec CVN sur $[1,+\infty[$ car f_n décroît sur $\left[\dfrac{1}{\ln(n)},+\infty\right[$.

2. a) Soient $x\in\ker(s)$ et $y=s(a)\in\operatorname{Im}(s)$. On a $(x|y)=(x|f(a))-(x|a)=0$ car $s(x)=0$ donc $f(x)=x$ puis $(x|f(a))=(f(x)|f(a))=(x|a)$ car $f\in\mathcal{O}(E)$.

b) On décompose x en $x=a+s(b)$ avec $s(a)=0$, on a alors $f^k(x)=a+f^{k+1}(b)-f^k(b)$ donc $u_n = a + \dfrac{1}{n}\left(f^n(b)-b\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$ car $\|f^n(b)\|=\|b\|$ donc $(f^n(b)-b)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Exercice 29 *[sujet]* **1.** a) Si $u_n(x) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(x^{-n}\right)$ donc $\sum u_n(x)$ CV si $x>1$; $u_n(1)=0$ et pour $x<1$ $\sum u_n(x)$ est GDV donc $D=[1,+\infty[$.

b) On vérifie $\|u_n\|_\infty = \dfrac{1}{en\ln(n)}$ donc (Bertrand) $\sum u_n$ ne CV pas normalement sur D.

c) i. si $x>1$, $|R_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{\ln(n+1)}\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\ln(x)x^{-k} = \frac{1}{\ln(n+1)}\frac{\ln(x)x^{-(n+1)}}{1-x^{-1}} \leqslant \frac{1}{\ln(n+1)}\frac{\ln(x)}{x-1}$ et $\ln(x)\leqslant x-1$; l'inégalité est évidente pour $x=1$

ii. On a $\|R_n\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{\ln(n+1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc CVU sur D

d) On peut vérifier S intégrable par TITT avec $\displaystyle\int_1^{+\infty}|u_n(x)|\,\mathrm{d}x \overset{\text{IPP}}{=} \frac{1}{(n-1)^2\ln(n)} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

On peut aussi le vérifier « à la main » : $S(x)=u_2(x)+R_2(x)$, $u_2(x)=\dfrac{\ln(x)}{\ln(2)x^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^{3/2}}\right)$ et $|R_2(x)| \leqslant \dfrac{1}{\ln(3)}\dfrac{\ln(x)}{x(x-1)} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^{3/2}}\right)$.

2. a) $\mathcal{X}_A=(X-2)^3$

b) Non car sinon elle serait semblable à $2I_3$ et $P2I_3P^{-1}=2I_3\neq A$.

c) $u=(1,2,0)$, $v=(0,3,-1)$ et $w=(0,0,1)$ par ex

d) $A=P\begin{pmatrix}2&0&3\\0&2&-3\\0&0&2\end{pmatrix}$ si $P=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&3&0\\0&1&1\end{pmatrix}$

Exercice 30 *[sujet]* **1.** a) Cours

b) $x^2(1-x)f''(x)-x(1+x)f'(x)+f(x)=a_0+\displaystyle\sum_{n\geqslant1}(n-1)^2(a_n-a_{n-1})x^n$

c) $a_0=0$ et $(n-1)^2(a_n-a_{n-1})=0$ si $n\geqslant1$ donc $a_n=a_{n-1}$ si $n\geqslant2$.

d) $R=1$ (si $a_1\neq0$) et $f(x)=a_1\displaystyle\sum_{n\geqslant1}x^n = a_1\frac{x}{1-x}$ pour $|x|<1$.

2. a) $P=X(X-3i)(X+3i)$ annule A

b) Si A est DZ sur $\mathbb{R}$ alors $\operatorname{Sp}(A)=\{0\}$, A est semblable à 0 donc $A=0$. Sur $\mathbb{C}$ oui car P est SARS

c) $m_{3i}(A)=m_{-3i}(A)$ donc $m_0(A)=n-2m_{3i}(A)$ ne peut pas être nul si n est impair

d) A est DZ donc cf **1.b**

Exercice 31 *[sujet]* **1.** a) $p_k\geqslant0$ et $\displaystyle\sum_{k\geqslant1}p_k = p^2\frac{1}{(1-(1-p))^2}=1$

b) Par th de transfert $E(X-1)=\displaystyle\sum_{k\geqslant1}p^2k(k-1)(1-p)^{k-1}=p^2\frac{2(1-p)}{(1-(1-p))^3}=\frac{2(1-p)}{p}$ et $E(X-1)(X-2))=$ $\displaystyle\sum_{k\geqslant1}p^2k(k-1)(k-2)(1-p)^{k-1}=p^2(1-p)^2\frac{6}{(1-(1-p))^4}=\frac{6(1-p)^2}{p^2}$

c) Par linéarité de l'espérance, $E(X) = E(X-1)+1 = \dfrac{2-p}{p}$ et $V(X) = E((X-1)(X-2))+3E(X)-2-E(X)^2 = \dfrac{2(1-p)}{p^2}$

2. a) Cours

b) $\det(\mathcal{X}_A(B)) = \displaystyle\prod_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)} [(-1)^n \mathcal{X}_B(\lambda)]^{m_\lambda(A)} \neq 0$ car $\mathcal{X}_B(\lambda) \neq 0$ si $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$

c) On prouve $P(A)X = XP(B)$ pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$ donc (C-Ham) $X\mathcal{X}_A(B) = 0$ puis $X = 0$; récip facile

d) $\varphi : X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto AX - XB$ est un endomorphisme injectif en dimension finie donc bijectif.

Exercice 32 *[sujet]* **1.** a) $t \mapsto \dfrac{\ln(1-t)}{t}$ est prolongeable par continuité à $]-\infty,1[$ donc F est définie et $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,1[$. $F(1)$ existe aussi car $\dfrac{\ln(1-t)}{t} \underset{t\to 1}{\sim} \ln(1-t)$ intégrable sur $[1/2,1[$; $D_F =]-\infty,1]$

b) $F'(x) = -\dfrac{\ln(1-x)}{x} = \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^{n-1}}{n}$ si $|x|<1$ donc $F(x) = -\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{x^n}{n^2}$ qui reste valable pour $x=1$ par continuité de F en 1 et CVN sur $[0,1]$ de la série entière.

c) on pose $g(x) = F(x) + F(1-x)$ et on a $g'(x) = F'(x) - F'(1-x) = -\dfrac{\ln(1-x)}{x} + \dfrac{\ln(x)}{1-x} = h'(x)$ si $h(x) = -\ln(x)\ln(1-x)$. Donc $F(x)+F(1-x) = -\ln(x)\ln(1-x)+C$ et $C = \displaystyle\lim_{x\to 0} F(x)+F(1-x) = F(0)+F(1) = F(1)$ car $\ln(x)\ln(1-x) \underset{x\to 0}{\sim} -x\ln(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

2. a) $\mathrm{rg}(B) = n + \mathrm{rg}(A)$

b) si $\lambda \neq 0$, $\mathcal{X}_B(\lambda) = \lambda^n \begin{vmatrix} I_n & -\frac{1}{\lambda}A \\ -I_n & \lambda I_n \end{vmatrix} \overset{L2\leftarrow L2+L1}{=} \lambda^n \begin{vmatrix} I_n & -\frac{1}{\lambda}A \\ 0 & \lambda I_n - \frac{1}{\lambda}A \end{vmatrix} = \lambda^n \det\left(\lambda I_n - \frac{1}{\lambda}A\right) = \mathcal{X}_A(\lambda^2)$. On a donc $\mathcal{X}_B(X) = \mathcal{X}_A(X^2)$ car les polynômes sont égaux sur $\mathbb{C}^*$ (donc en une infinité de points)

c) Si $\mathcal{X}_A = \displaystyle\prod_{i=1}^n (X-\lambda_i)$ avec $\lambda_i \neq 0$, il existe $\mu_i \in \mathbb{C}$ tel que $\mu_i^2 = \lambda_i$ ce qui donne $\mathcal{X}_B = \displaystyle\prod_{i=1}^n (X-\mu_i)(X+\mu_i)$ SARS car $\mu_i \neq -\mu_i$ (car $\mu_i^2 = \lambda_i \neq 0$)

d) si $A = 0$ (DZ), on a $\mathcal{X}_B = X^{2n}$ et $\mathrm{rg}(B) = n$ donc $\dim(E_0(B)) = 2n - n = n$ donc B n'est pas DZ

Exercice 33 *[sujet]* **1.** a) $\dfrac{\sin(nx)}{1+n^4x^3} \underset{x\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$

b) Poser $t = xn^{4/3}$

c) Par TCD avec $|f_n(t)| \leqslant \dfrac{t}{1+t^3}$ ($|\sin(u)| \leqslant |u|$)

d) Ajouter les 2 valeurs de K puis $2K = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1-t+t^2} = \frac{4}{3}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\arctan\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right]_0^{+\infty}$

e) facile

2. a) On utilise la base $\mathcal{B}_a = \left((X-a)^k\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$: $f((X-a)^k) = (k+1)(X-a)^k$ si $k \geqslant 1$ et $f(1) = 0$ donc $\ker(f) = \mathbb{R}_0[X]$

b) $\mathrm{rg}(f) = n$ et $\mathrm{Im}(f) \subset \{P \in \mathbb{R}_n[X], P(a) = 0\}$ (hyperplan) donc $\mathrm{Im}(f) = \{P \in \mathbb{R}_n[X], P(a) = 0\}$ ou $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\{(X-a)^k, k \in [\![1,n]\!]\}$

c) $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_a}(f)$ est diagonale donc $\mathrm{Sp}(f) = \{0\} \cup [\![2,n+1]\!]$ (et $E_{k+1}(f) = \mathrm{Vect}\{(X-a)^k\}$)

Exercice 34 *[sujet]* **1.** a) f est $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$ et $f'(x) = \dfrac{1}{1-x^2} + \dfrac{x\arcsin(x)}{(1-x^2)^{3/2}}$ donc $(1-x^2)f'(x) - xf(x) = 1$

b) $x \mapsto (1-x^2)^{-1/2}$ est DSE sur $]-1,1[$ donc arcsin aussi (primitive) donc f aussi (produit de Cauchy)

c) Mieux vaut utiliser l'eq diff : par C-Lip (les fct $\dfrac{b}{a}$ et $\dfrac{c}{a}$ sont continues sur $]-1,1[$) f est la seule solution de l'éq diff telle que $y(0) = 0$; si $y(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n x^{2n+1}$ (f est impaire donc on peut se limiter à chercher les sol DSE impaires) on a $(1-x^2)y'(x) + xy(x) = a_0 + \displaystyle\sum_{n\geqslant 1}[(2n+1)a_n - 2(n-1)a_{n-1}]x^{2n}$ donc $a_n = \dfrac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$

2. a) $\mathcal{X}_M = (X-b)(X-a-c)(X-a+c)$

b) $\ker(M(a,0,a)) = \mathrm{Vect}\{(1,0,-1),(0,1,0)\}$ et $\ker(M(a,b,a)) = \mathrm{Vect}\{(1,0,-1)\}$

c) $det(M(a,b,c)) = b(a-c)(a+c)$. Si $b=0$ et $|a| \neq |c|$ $\ker(M(a,0,c)) = \mathrm{Vect}\{(1,0,-1)\}$ et $\mathrm{Im}(M(a,b,c)) = \mathrm{Vect}\{(a,0,c),(c,0,a)\}$. Si $b=0$ et $a=c$, $\ker(M(a,0,a)) = \mathrm{Vect}\{(1,0,-1),(0,1,0)\}$ et $\mathrm{Im}(M(a,0,a)) = \mathrm{Vect}\{(1,0,1)\}$. Si $b=0$ et $a=-c$, $\ker(M(a,0,-a)) = \mathrm{Vect}\{(1,0,1),(0,1,0)\}$ et $\mathrm{Im}(M(a,0,a)) = \mathrm{Vect}\{(1,0,-1)\}$. Si $b \neq 0$ et $a=c$, $\ker(M(a,b,a)) = \mathrm{Vect}\{(1,0,-1)\}$ et $\mathrm{Im}(M(a,b,a)) = \mathrm{Vect}\{(1,0,1),(0,1,0)\}$. Si $b \neq 0$ et $a=-c$, $\ker(M(a,b,-a)) = \mathrm{Vect}\{(1,0,1)\}$ et $\mathrm{Im}(M(a,b,a)) = \mathrm{Vect}\{(1,0,-1),(0,1,0)\}$.

d) $M(a,b,c)$ est DZ car symétrique réelle et $M(a,b,c) = P\mathrm{diag}(b,a+c,a-c)P^{-1}$ avec $P = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ donc $P^{-1} = {}^tP$

Exercice 35 *[sujet]* **1.** a) $|g(x,t)| \leqslant e^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$

b) $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant te^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donc $f'(x) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(xt) \times te^{-t^2}\,\mathrm{d}t \overset{\text{IPP}}{=} -\dfrac{x}{2}f(x)$

c) $f(x) = \dfrac{1}{2}\sqrt{\pi}e^{-x^2/4}$

2. a) $\|AX\|^2 = {}^tX\,{}^tAAX = {}^tXA\,{}^tAX = \|\,{}^tAX\|^2$

b) Si $X \in \ker(A)$ alors $(X|AY) = {}^tXAY = {}^t({}^tAX)Y = 0$ car $X \in \ker({}^tA)$ donc $\ker(A) \perp \mathrm{Im}(A)$ et on termine avec le th du rg

c) ?

Exercice 36 *[sujet]* **1.** a) on a $9\|x\|^2 = \|2Mx+x\|^2 = 4\|Mx\|^2 + 4(Mx|x) + \|x\|^2 \overset{M\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})}{=} 4(Mx|x) + \|x\|^2$

b) On peut en déduire $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M) \subset \{1\}$ car si $Mx = \lambda x$ avec $x \neq 0$ alors $\|x\|^2 = (Mx|x) = \lambda\|x\|^2$ mais on peut faire plus précis.
on a ${}^tMM = I_n$ et $(2M+I_n)(2\,{}^tM+I_n) = 9I_n$ donc $M + {}^tM = 2I_n$. On pose $A = M - I_n$ et on a ${}^tA + A = 0$ donc M s'écrit $M = I_n + A$ avec ${}^tA = -A$. Comme ${}^tMM = I_n$, on a $A^2 = 0$ puis $\|AX\|^2 = {}^tX\,{}^tAAX = -\,{}^tXA^2X = 0$ donc $A = 0$ et $M = I_n$.

2. a) $\dfrac{1}{2}t^n \leqslant \dfrac{t^n}{1+t^2} \leqslant t^n$ donc $\dfrac{1}{2(n+1)} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ et $R = 1$

b) $\dfrac{1}{(1+t^2)(1-xt)} = \dfrac{1}{1+x^2}\left(\dfrac{xt+1}{1+t^2} + \dfrac{x^2}{1-xt}\right)$

c) Si $|x| < 1$, $S(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1-xt)}$ par TITT avec $\displaystyle\int_0^1 \left|\frac{(xt)^n}{1+t^2}\right|\mathrm{d}t \leqslant \frac{|x|^n}{n+1}$; on trouve, pour tout $|x| < 1$, $S(x) = \dfrac{1}{1+x^2}\left(\dfrac{x}{2}\ln(2) + \dfrac{\pi}{4} - x\ln(1-x)\right)$

d) $S(-1)$ existe par CSSA : $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ donc $\lim u_n = 0$ (le reste est facile). Pour la valeur de $S(-1)$, on vérifie la continuité de S en -1 : sur $[-1,0]$, $\sum u_nx^n$ est alterné et vérifie le CSSA donc $|R_n(x)| \leqslant u_{n+1}|x|^{n+1} \leqslant u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc la série entière CVU sur $[-1,0]$ et S est donc continue sur $[-1,0]$.

Exercice 37 *[sujet]* **1.** a) $g(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = x$ (distinguer $x=0$) puis $|f_n(x) - x| \leqslant \dfrac{1}{n}$ si $x \geqslant 0$ et $|f_n(x) - x| \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$ si $x < 0$ donc $\|f_n - g\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ On peut vérifier que f_n est $\mathcal{C}^1$ sur $[-1,1]$ donc il n'y a pas CVU sur $[-1,1]$

2. a) cours

b) cours

c) $M^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^k \\ 0 & A^k \end{pmatrix}$

d) $P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & AP'(A) \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}$

e) Soit P annulateur de M SARS, alors $P(A) = 0$ donc A est DZ

f) on a aussi $AP'(A) = 0$ et, si $P' = \displaystyle\prod_{i=1}^{d}(X - \mu_i)$ alors $\det(P'(A)) = \displaystyle\prod_{i=1}^{d}(-1)^n\mathcal{X}_A(\mu_i) \neq 0$ car les racines de P sont simples et $\mathrm{Sp}(A) \subset Z(P)$ donc les μ_i ne sont pas valeurs propres de A ; $AP'(A) = 0$ donne donc $A = 0$.

Exercice 38 *[sujet]* **1.** a) $\left|\varphi\left(\frac{x}{2^n}\right)\right| \leqslant C\frac{a}{2^n}$ donc CVN sur I

b) facile

c) si f et g sont solutions et $u = f - g$, on a $u(x) = u\left(\frac{x}{2}\right) \overset{\text{rec}}{=} u\left(\frac{x}{2^n}\right)$ et, comme u est continue en 0, en faisant tendre n vers $+\infty$, on trouve $u(x) = u(0) = 0$ donc u est nulle. Il y a donc une unique solution (qui est S)

d) si $u_n(x) = \varphi\left(\frac{x}{2^n}\right)$ alors $|u_n'(x)| \leqslant \frac{1}{2^n}\|\varphi'\|_\infty$ car φ' est continue donc bornée sur le segment I. $\sum u_n'$ CVN sur I donc S est $\mathcal{C}^1$.

2. a) Si $x = a + b$ avec $f(a) = f^2(b) + b = 0$ alors $a = f^2(x) + x$ et $b = x - a$ donc la décomposition est unique si elle existe et si on pose $a = x + f^2(x)$ et $b = x - a$, on a $x = a + b$, $f(a) = f(x) + f^3(x) = 0$ donc $a \in \ker(f)$ et $f^2(b) + b = f^2(x) + x - f^2(a) - a = f^2(x) + x - a = 0$ donc $b \in \ker(f^2 + id)$ et $\mathbb{R}^3 = \ker(f) \oplus \ker(f^2 + id)$.
Si on avait $\ker(f^2 + id) = \{0\}$, on aurait $\mathbb{R}^3 = \ker(f)$ donc $f = 0$, absurde

b) comme $x \neq 0$, si $(x, f(x))$ est liée alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \lambda x$ donc $f^2(x) = \lambda^2 x$ et $0 = f^2(x) + x = (\lambda^2 + 1)x$ ce qui est absurde car $x \neq 0$ et $1 + \lambda^2 \neq 0$ ($\lambda \in \mathbb{R}$)

c) on vient de prouver $\dim(\ker(f^2 + id)) \geqslant 2$ et si on avait $\dim(\ker(f^2 + id)) = 3$ alors on aurait $f^2 + id = 0$ donc $f^2 = -id$ puis $\det(f)^2 = \det(-id) = (-1)^3 = -1$ ce qui est absurde. On a donc $\dim(\ker(f^2 + id)) = 2$ et $\dim(\ker(f)) = 1$

d) il suffit de prendre une base adaptée à la décomposition de la première question en prenant une base de $\ker(f^2 + id)$ de la forme $(x, f(x))$.

e) Si $f = u^2$ alors $u \circ f = f \circ u = u^3$ donc u et f commutent donc $\ker(f)$ et $\ker(f^2 + id)$ sont stables par u. Dans la base précédente, la matrice de u est donc de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\alpha^2 = 0$ donc $\alpha = 0$ et $A^2 = B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Comme A et B commutent, A est de la forme $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ puis $\begin{cases} a^2 = b^2 \\ 2ab = -1 \end{cases}$ donc $a = -b$ ($ab < 0$) et $2a^2 = 1$; on a donc deux solutions $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, donc $u = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(f - f^2)$

Exercice 39 *[sujet]* **1.** a) Cours

b) Si $x = \tan\frac{\pi}{8}$ alors x vérifie $1 = \tan\frac{\pi}{4} = \frac{2x}{1 - x^2}$ donc $x = -1 + \sqrt{2}$ (car $x > 0$) puis $\frac{\pi}{8} = \arctan(\sqrt{2} - 1) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n + 1}(\sqrt{2} - 1)^{2n+1}$ car $0 < \sqrt{2} - 1 < 1$

c) par CSSA, $\left|\frac{\pi}{8} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k + 1}(\sqrt{2} - 1)^{2k+1}\right| \leqslant \frac{(\sqrt{2} - 1)^{2n+3}}{2n + 3} \leqslant \frac{1}{2n + 3}$

2. a) cours

b) $P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & BP'(A) \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}$

c) Soit P annulateur de A SARS, alors $P(M) = 0$ donc M est DZ

d) Soit P SARS tel que $P(M) = 0$; on a $P(A) = 0$ donc A est DZ, on a aussi $BP'(A) = 0$ et, si $P' = \prod_{i=1}^{d}(X - \mu_i)$ alors $\det(P'(A)) = \prod_{i=1}^{d}(-1)^n \mathcal{X}_A(\mu_i) \neq 0$ car les racines de P sont simples et $\mathrm{Sp}(A) \subset Z(P)$ donc les μ_i ne sont pas valeurs propres de A ; $BP'(A) = 0$ donne donc $B = 0$.

Exercice 40 *[sujet]* **1.** a) $(Y > k) = (X_1 > k, X_2 > k)$ donc $P(Y > k) = P(X_1 \geqslant k+1)^2 = \left(\sum_{i=k+1}^{+\infty} p(1 - p)^{i-1}\right)^2 = (1 - p)^{2k}$ puis $F_Y(k) = P(Y \leqslant k) = 1 - P(Y > k + 1)$

b) $P(Y = k) = P(Y > k - 1) - P(Y > k)$ donc $Y \hookrightarrow \mathscr{G}\left((1 - p)^2\right)$

c) $Z = Y + X_3$ donc $E(Z) = E(Y) + E(X_3) = \frac{1}{(1 - p)^2} + \frac{1}{p}$

2. a) $\deg(\mathcal{X}_f) = 3$ (impair) donc $\mathcal{X}_f$ a au moins une racine réelle et $\mathrm{Sp}(f) \subset Z_{\mathbb{R}}(X^3 - 1) = \{1\}$

b) Si $x = a + b$ avec $f(a) = a$ et $f^2(b) + f(b) + b = 0$ alors $\begin{cases} a = \frac{1}{3}(x + f(x) + f^2(x)) \\ b = x - a \end{cases}$ (uniques) et si on pose $\begin{cases} a = \frac{1}{3}(x + f(x) + f^2(x)) \\ b = x - a \end{cases}$, on a bien $x = a + b$, $f(a) = a$ et $f^2(b) + f(b) + b = 0$ (donc existence de la décomposition)

c) ?

Exercice 41 *[sujet]* **1.** a) $\mathcal{X}_A = (X-2)^3$

b) $\operatorname{rg}(A - 2I_3) = 2$ donc $\dim(E_2(A)) = 2$ et A n'est pas DZ

c) $u = (1, 2, 0)$, $v = (0, 3, -1)$ et $w = (0, 0, 1)$ par exemple

d) $\operatorname{Mat}\mathcal{B}(f_A) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

2. a) On prouve qu'elles sont nécessairement de degré 2 puis de la forme αx^2.

b) z et y sont simultanément 2 fois dérivables sur $\mathbb{R}^{+*}$ et z vérifie $x^4 z'' + 4x^3 z' = 0$ donc $z(x) = \dfrac{\alpha}{x^3} + \beta$ et $y(x) = \dfrac{\alpha}{x} + \beta x^2$.

c) Les solutions sont prolongeables en 0 si et seulement si $\alpha = 0$ et dans ce cas solutions sur $\mathbb{R}$ (on retrouve les solutions polynômiales du début)

d) $x \mapsto \dfrac{x^3}{3}$ est une solution particulière donc $y(x) = \dfrac{\alpha}{x} + \beta x^2 + \dfrac{x^3}{4}$

Exercice 42 *[sujet]* **1.** a) $f(x) = \dfrac{1}{3(1+x)} + \dfrac{-x+2}{3(1-x+x^2)}$ puis $F(x) = \dfrac{1}{3}\ln(1+x) - \dfrac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C$

b) $R = 1$ puis, si $|x| < 1$, $f'(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n x^{3n} = f(x)$ donc $S(x) = \dfrac{1}{3}\ln(1+x) - \dfrac{1}{6}\ln(x^2 - x + 1) + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + \dfrac{\pi}{6\sqrt{3}}$ car $S(0) = 0$

c) S est continue en 1 par CSSA et $\|R_n\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{3n+4}$

2. a) Si $u(x) = u^2(x) + u(x) + x = 0$ alors $x = 0$

b) si $x \in \ker(u^2 + u + id)$ alors $x = -u(x) - u^2(x) \in \operatorname{Im}(u)$ et si $x \in \operatorname{Im}(u)$ alors $x = u(y)$ donc $u^2(x) + u(x) + x = u^3(y) + u^2(y) + u(y) = 0$. On a vu $\ker(u) \cap \ker(u^2 + u + id) = \{0\}$ et le th du rg donne l'égalité des dimensions.

c) $\deg(\mathcal{X}_v) = \operatorname{rg}(u)$

d) Si $v(x) = 0$ alors $x \in \operatorname{Im}(u)$ et $u(x) = 0$ donc $x \in \ker(u) \cap \operatorname{Im}(u) = \{0\}$

e) Si $\lambda \in \operatorname{Sp}(v)$ alors $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ qui n'a pas de solution (réelle) donc $\operatorname{Sp}(v) = \emptyset$ puis $\deg(\mathcal{X}_v)$ est donc pair.

Exercice 43 *[sujet]* **1.** a) Si $u_n(x) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(x^{-n}\right)$ donc $\sum u_n(x)$ CV si $x > 1$; $u_n(1) = 0$ et pour $x < 1$ $\sum u_n(x)$ est GDV donc $D = [1, +\infty[$.

b) On vérifie $\|u_n\|_\infty = \dfrac{1}{en\ln(n)}$ donc (Bertrand) $\sum u_n$ ne CV pas normalement sur D.

c) i. si $x > 1$, $|R_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{\ln(n+1)}\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\ln(x)x^{-k} = \dfrac{1}{\ln(n+1)}\dfrac{\ln(x)x^{-(n+1)}}{1-x^{-1}} \leqslant \dfrac{1}{\ln(n+1)}\dfrac{\ln(x)}{x-1}$ et $\ln(x) \leqslant x - 1$; l'inégalité est évidente pour $x = 1$

ii. On a $\|R_n\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{\ln(n+1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc CVU sur D

d) On peut vérifier S intégrable par TITT avec $\displaystyle\int_1^{+\infty}|u_n(x)|\,\mathrm{d}x \overset{\text{IPP}}{=} \dfrac{1}{(n-1)^2\ln(n)} = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

On peut aussi le vérifier « à la main » : $S(x) = u_2(x) + R_2(x)$, $u_2(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(2)x^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^{3/2}}\right)$ et $|R_2(x)| \leqslant \dfrac{1}{\ln(3)}\dfrac{\ln(x)}{x(x-1)} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^{3/2}}\right)$.

2. a) $g = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k - id$ est symétrique

b) On a $(g(x)|x) = 0$ pour tout x donc $\operatorname{Sp}(g) = \{0\}$ et $g = 0$ car DZ

c) On a $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ donc $E = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Im}(u_k)$ ce qui donne $E = \displaystyle\bigoplus_{k=1}^{n}\operatorname{Im}(u_k)$ avec l'égalité des dimensions. Pour $x \in E$, on a $u_i(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k \circ u_i(x)$ donc par unicité de l'écriture dans une famille d'espaces en somme directe, on a $u_i(x) = u_i^2(x)$ (proj) et $u_k \circ u_i(x) = 0$ si $i \neq k$. Enfin $(u_i(x)|u_j(y)) = (u_j \circ u_i(x)|y) = 0$ si $i \neq j$ donc les images sont orthogonales.

Exercice 44 *[sujet]* **1.** a) $Y(\Omega) \subset [2,+\infty[\cap \mathbb{N}$ et pour $k \geqslant 2$, $(Y=k)$ si on tire le même jeton qu'au premier tirage (proba $1/3$) aux tirages $2,\dots,k-1$ et un autre jeton (proba $2/3$) au tirage k. Par indépendance mutuelle des tirages, on a $P(Y=k) = \dfrac{1}{3^{k-2}}\dfrac{2}{3}$

b) $Y-1 \hookrightarrow \mathscr{G}\left(\dfrac{2}{3}\right)$ donc $E(Y) = 1+\dfrac{3}{2} = \dfrac{5}{2}$ et $V(Y) = \dfrac{1-2/3}{(2/3)^2} = \dfrac{3}{4}$

c) si $k>h$, $P(Y=k,Z=h) = P(Z=h|Y=k)P(Y=k)$ et si $(Y=k)$ est réalisé, on aura $(Z=h)$ si et seulement si on tire un des deux jetons tirés au cours des tirages $k+1,\dots,h-1$ (proba $2/3$) et le dernier jeton (proba $1/3$) au tirage k donc $P(Z=h|Y=k) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{h-k-1}\dfrac{1}{3}$ puis $P(Y=k,Z=h) = \dfrac{1}{3^{k-1}}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{h-k}$

d) pour $h \geqslant 3$, on a $P(Z=h) = \displaystyle\sum_{k=2}^{h-1} P(Y=k,Z=h) = \dfrac{2^{h-1}-2}{3^{h-1}}$ puis $E(Z) = \dfrac{11}{2}$

2. a) $M\,{}^tM = \begin{pmatrix} 1+{}^tCC & 0 \\ 0 & I_n + C\,{}^tC \end{pmatrix}$ puis $1+{}^tCC = 1+\displaystyle\sum_{i=1}^n a_i^2 \neq 0$ et $\det(I_n + C\,{}^tC) = (-1)^n \mathcal{X}_{C\,{}^tC}(-1)$.

Comme $\mathrm{rg}(C\,{}^tC) = 1$, on a $\mathcal{X}_{C\,{}^tC} = X^{n-1}(X - \mathrm{Tr}(C\,{}^tC)) = X^{n-1}\left(X - \displaystyle\sum_{i=1}^n a_i^2\right)$ donc $-1 \notin \mathrm{Sp}(C\,{}^tC)$ et $\det(I_n + C\,{}^tC) \neq 0$.

b) ${}^tNN = M\,{}^tM^{-1}M^{-1}\,{}^tM$; il suffit donc de vérifier que M et ${}^tM$ commutent : comme $AC = -C$, on a $C = -A^{-1}C = -{}^tAC$ donc ${}^tAC = -C$ ce qui permet de justifier $M\,{}^tM = {}^tMM$

Exercice 45 *[sujet]* **1.** a) CSSA (indispensable pour $x=0$)

b) CVU sur $\mathbb{R}^+$ car, par CSSA, $|R_n(x)| \leqslant |u_{n+1}(x)| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$

c) CVNTS de $\sum u_n'$ car $|u_n'(x)| \leqslant e^{-na}$ pour $x \in [a,b] \subset \mathbb{R}^{+*}$

d) On a aussi $S'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}e^{-nx} = \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$ donc $S(x) = -\ln(1-e^{-x}) + C$ pour $x>0$. On trouve ensuite $C=0$ car $C = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} S(x) = 0$ par double limite (et CVU sur $\mathbb{R}^+$) et on étend à $x=0$ par continuité de S en 0 (donc $S(0) = -\ln(2)$)

2. a) Facile

b) Tout découle du fait que f est un projecteur : $f^2(x) = f(x) - (u|x)f(v)$ et $f(v) = v - (u|v)v = 0$

c) Déjà fait avant

d) On a donc $\mathrm{Sp}(f) = \{0,1\}$ et on vérifie $E_0(f) = \mathrm{Vect}\{u\}$ et $E_1(f) = \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\{u\}^\perp$.

Exercice 46 *[sujet]* **1.** a) (A_n,B_n,C_n) est un SCE donc on trouve $U_{n+1} = \dfrac{1}{2}MU_n$

b) $M = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ puis $M^n = PD^nP^{-1}$

c) On a $J^2 = 3J$ donc $X(X-3)$ annule J. On en déduit $J^n = 3^{n-1}J$ pour $n \geqslant 1$ et (Newton car commutent) $M^n = (-1)^nI_3 + \displaystyle\sum_{k=1}^n \binom{n}{k}(-1)^{n-k}3^{k-1}J = (-1)^nI_3 + \dfrac{1}{3}\Big[(3-1)^n - (-1)^n\Big]J = (-1)^nI_3 + \dfrac{2^n-(-1)^n}{3}J$

d) $U_n = \dfrac{1}{2^n}M^nU_0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{3}JU_0 = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (car $P(A_0)+P(B_0)+P(C_0) = 1$)

2. a) CV par CSSA : $\displaystyle\int_{n^2}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ est le reste de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ qui CV

b) $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n}\displaystyle\int_0^{n^2} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \dfrac{(-1)^n}{n}I - u_n$ donc $\sum v_n$ CV aussi.

Exercice 47 *[sujet]* **1.** a) $u_{n+1} - u_n = \dfrac{\sqrt{u_n^2 + a_n^2} - u_n}{2}$ puis $\sqrt{u_n^2+a_n^2} \leqslant a_n + u_n$ car $a_nu_n \geqslant 0$ (élever au carré)

b) On a aussi $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ donc le th de comp pour les séries à termes positifs donne $\sum(u_{n+1}-u_n)$ CV

c) (u_n) CV (vers 1) et on a $a_n^2 = (2u_{n+1}-u_n)^2 - u_n^2 = 4u_{n+1}(u_{n+1}-u_n)$ ce qui donne $a_n \sim \dfrac{2}{n}$ (positif) donc $\sum a_n$ DV

2. a) Cours

b) On a $M^2+M-I_n=0$ donc $X^2+X-1=\left(X-\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(X-\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$ est SARS et annule M donc M est DZ (ou symétrique réelle). On a $\det(M)=\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^k\left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-k}\neq 0$ et $\mathrm{Tr}(M)=k\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)+(n-k)\left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$ donc, comme $\sqrt{5}\notin\mathbb{Q}$, on a $\mathrm{Tr}(M)=0\Rightarrow n=0$ ce qui est absurde.

c) ${}^tM=I_n-M^2$ donc ${}^tM^2=(I_n-M^2)^2$ et ${}^tM^2={}^t(I_n-{}^tM)=I_n-M$ donc $X(X-1)(X^2+X-1)$ annule M et est SARS

d) $\det(M^2)=\det(I_n-{}^tM)=\det(I_n-M)$ et $\det(M^2)=\det(M)^2$.

Exercice 48 *[sujet]* **1.** a) Comme $\det(M)=\det({}^tM)$, on a $\det(M)^5=1$ donc $\det(M)=1$ (réelle)

b) $M^{-1}=\left({}^tMM\right)^{-2}$ est symétrique donc M aussi

c) Reste $M^5=I_n$, M est DZ par th spec et $\mathrm{Sp}(M)\subset\{1\}$ (pas de vp complexe) donc $M=I_n$

2. a) $t\mapsto f(x,t)$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $\mathbb{R}^+$ et positive (pour la DV), $f(x,t)\underset{t\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{t^x}$ donc $D=]1,+\infty[$

b) Avec $|f(x,t)|\leqslant\varphi(t)=\begin{cases}1 & \text{si } t\leqslant 1\\ f(a,t) & \text{si } t>1\end{cases}$ pour $x\in[a,b]\subset D$.

c) F est $\mathcal{C}^1$ sur D avec $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|=\dfrac{t^x|\ln(t)|}{(1+t^x)^2}\leqslant\dfrac{|\ln(t)|}{f}(x,t)\leqslant|\ln(t)|f(a,t)=\psi(t)$ qui reste intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ car $\phi(t)\underset{t\to0}{\sim}|\ln(t)|$ et $\psi(t)\underset{t\to+\infty}{=}o\left(\dfrac{1}{t^{\frac{1+a}{2}}}\right)$. Puis poser $u=\dfrac{1}{t}$ dans l'intégrale sur $]0,1]$. F est donc décroissante.

d) $\lim\limits_{+\infty}F=0$ par TCD (et caract séq) avec la domination utilisée pour la continuité. Enfin, $\lim\limits_{1}F=+\infty$ car $F(x)\geqslant\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^x}\geqslant\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^x}=\frac{1}{2(x-1)}$

Exercice 49 *[sujet]* **1.** a) $X_{N=n}\hookrightarrow\mathscr{B}(n,p)$ donc $P(X=k,N=n)=\begin{cases}\dbinom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n!} & \text{si } k\leqslant n\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

b) On en déduit $X\hookrightarrow\mathscr{P}(\lambda p)$

2. Intégralement fait en cours (réduction)

Exercice 50 *[sujet]* **1.** a) Par linéarité et $E(X)=E(Y)$, on a $2E(x)-1=E(Z)=\dfrac{1}{p}$ donc $E(X)=\dfrac{1+p}{2p}$

b) Par indép de X et Y (et $G_X=G_Y$), on a $G_Z(t)=tG_X(t)^2$ donc $G_X(t)=\sqrt{\dfrac{p}{1+(1-p)t}}$ (positif car G_X^2 donc G_X ne s'annule pas, est continue sur $]-R,R[$ et positive en 1)

c) $(1-u)^{-1/2}=\displaystyle\sum_{n\geqslant0}\binom{2n}{n}\frac{u^n}{4^n}$ si $|u|<1$ donc par DSE de G_X, on trouve $P(X=n)=\sqrt{p}\dbinom{2n}{n}\dfrac{(1-p)^n}{4^n}$

2. a) $\mathcal{X}_A=(X-1)^n$ donc oui ; $0\in\mathrm{Sp}(B)$ donc non

b) non car B est somme de 2 matrices triangulaires (une sup et une inf) qui sont dans $\mathcal{D}_n$ donc $\mathcal{D}_n$ n'est pas stable par addition

c) On a $\mathrm{Tr}(M^2)=\displaystyle\sum_{i,j}m_{i,j}^2=\sum_{k=1}^n m_{k,k}^2$ car les vp de M^2 sont les $m_{k,k}^2$ (en DZ car sym réelle par ex) on a donc $\displaystyle\sum_{i\neq j}m_{i,j}^2=0$ (somme de termes positifs) donc $m_{i,j}=0$ si $i\neq j$.

Exercice 51 *[sujet]* **1.** a) $t\mapsto\dfrac{\ln(1-t)}{t}$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $]-\infty,1[$ (prolongeable par continuité en 0) et intégrable sur $[0,1[$ donc $D=]-\infty,1]$ et F est même $\mathcal{C}^1$ sur D

b) si $|t|<1$, $\dfrac{\ln(1-t)}{t}=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t^{n-1}}{n}$ et on intègre terme à terme sur le segment $[0,x]\subset]-1,1[$.

c) On a $F'(x)=\dfrac{\ln(1-x)}{x}$; vérifier que $x\mapsto F(x)+F(1-x)$ et $x\mapsto\ln(x)\ln(1-x)$ ont les mêmes dérivées. On a donc $F(x)+F(1-x)=\ln(x)\ln(1-x)+C$; par continuité de F (et S par CVN) en 1, on a $C=F(1)=-\dfrac{\pi^2}{6}$ car $\ln(x)\ln(1-x)\underset{0}{\sim}-x\ln(x)\xrightarrow[x\to0]{}0$

2. a) $\mathrm{rg}(B) = n + \mathrm{rg}(A)$

b) Par $C_2 \leftarrow C_2 + \dfrac{1}{\lambda}C_1$ (par blocs), on trouve $\mathcal{X}_B(\lambda) = \lambda^n \det\left(\lambda I_n - \dfrac{1}{\lambda}A\right) = \mathcal{X}_A(\lambda^2)$ donc $\mathcal{X}_B(X)$ et $\mathcal{X}_A(X^2)$ sont deux polynômes qui coïncident sur $\mathbb{C}^*$ donc sont égaux. Les vp de B sont les racines carrées des vp de A.

c) Si $\mathcal{X}_A = \prod_{i=1}^{n}(X - \alpha_i)$ SARS alors $\mathcal{X}_B = \prod_{i=1}^{n}(X - \beta_i)(X + \beta_i)$ avec $\pm\beta_i$ les racines carrées complexes des α_i donc $\mathcal{X}_B$ reste SARS

d) Avec $n = 1$ et $A = 0$, on a $\mathcal{X}_A$ SARS mais B n'est plus DZ (nilpotente non nulle)

e) On a $B^2 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ donc si B est DZ alors B^2 aussi dans A aussi

f) Si B est DZ alors $m_0(B) = 2m_0(A)$ et $\dim(E_0(B)) = \dim(E_0(A))$ (avec le th du rg et la première question) ; comme A est DZ, on a $\dim(E_0(A)) = m_0(A)$; on en déduit $m_0(A) = 0$ donc A est inversible.
Réciproquement si A est DZ et inversible alors $\alpha_i \neq 0$ donc $m_{\alpha_i}(A) = m_{\beta_i}(B)$ et on vérifie $\dim(E_{\alpha_i}(A)) = \dim(E_{\beta_i}(B))$ car $\mathrm{rg}(B - \beta_i I_{2n}) = n + \mathrm{rg}(A - \alpha_i I_n)$ (faire $C_2 \leftarrow C_2 + \beta_i i C_1$ puis $L_2 \leftarrow L_2 + \beta_i I_n$)

Exercice 52 *[sujet]* **1.** a) $(x|f(y)) = {}^tXAY = -{}^t(AX)Y = -(f(x)|y)$

b) $\det(A) = (-1)^n \det({}^tA) = (-1)^n \det(A)$ donc f n'est pas bijective si n est impair.

c) $\mathrm{Im}(f)$ est stable (donc un tel endo induit existe). On vérifie $\ker(f) \perp \mathrm{Im}(f)$: si $f(x) = 0$ et $y = f(z)$ alors $(x|y) = (x|f(z)) = -(f(x)|z) = 0$ donc $\mathbb{R}^n = \ker(f) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}(f)$; l'endomorphisme induit sur $\mathrm{Im}(f)$ est donc bijectif, et reste antisymétrique (prendre une bon adaptée) donc $rg(f)$ est pair.

d) Dans une bon adaptée (si $f \neq 0$ alors $\mathrm{rg}(f) = 2$ forcément), on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix}$ avec A' antisymétrique de taille 2.
On a $\mathcal{X}_A = X(X^2 + a^2)$ n donc $\mathcal{X}_A$ n'est scindé que si $a = 0$ donc seul $f = 0$ est DZ

2. a) $f_n : t \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{ch}^n t}$ est $\mathcal{CM}^0$ sur le segment $[0, x]$

b) (I_n) CVS vers 0 par TCD car (f_n) CVS vers 0 sur $]0, x]$ et $|f_n(t)| \leqslant 1$ qui est intégrable sur le segment $[0, x]$

c) f_n est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ pour $n \geqslant 1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} I_n(x) = J_n > 0$ donc le th de double limite (en $+\infty$) assure qu'il n'y a pas CVU sur $\mathbb{R}^+$.

d) $I_{n+2}(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\mathrm{ch}^2 t} \times \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{ch}^n t} \overset{\text{IPP}}{=} \left[\mathrm{th}(t)\frac{1}{\mathrm{ch}^n t}\right]_0^x + n\int_0^x \mathrm{th}(t)\frac{\mathrm{sh}(t)}{\mathrm{ch}^{n+1} t}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}^{n+1} x} + n(I_n(x) - I_{n+2}(x))$ avec $\mathrm{ch}^2 - \mathrm{sh}^2 = 1$

e) Si $x \to +\infty$, on en déduit $J_{n+2} = \dfrac{n}{n+1}J_n$ donc $J_{2p} = \dfrac{(2^p p!)^2}{2(2p)!}$ et $J_{2p+1} = \dfrac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 53 *[sujet]* **1.** a) Cours : $f(x) = \Gamma(x+1)$

b) idem

c) $\ln \circ f$ est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}^+$ donc φ est $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[$ et $\varphi'(x) = \ln(f(x)) - \ln(f(x-1)) = \ln(x) \leqslant 0$

d) Reste à prouver que (v_n) tend vers $+\infty$ pour le CSSA : on a $\varphi'(x) \geqslant 2$ sur $[e^2, +\infty[$ donc (IAF), $\varphi(x) - \varphi(e^2) \geqslant 2(x - e^2)$ qui donne le résultat et la série CV

2. a) On a $a = PAP^{-1}$ si P est la matrice d'un chgt de base

b) Il suffit de prendre $\lambda \notin \mathrm{Sp}(B)$, ce qui est possible car $\mathrm{Sp}(B)$ contient au plus n valeurs. On a donc $A(B - \lambda I_n) = (B - \lambda I_n)B$ donc $AB = BA$

c) Avec $B = E_{i,j}$, on en déduit $a_{i,j} = 0$ si $i \neq j$ et $a_{i,i} = a_{j,j}$ donc $A = \mu I_n$ et f est une homothétie.

Exercice 54 *[sujet]* **1.** a) $\lim\limits_{0} e^{x\ln(x)} = 1$

b) $e^{x\ln(x)} = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n(\ln x)^n}{n!}$ puis TITT avec $\displaystyle\int_0^1 x^n(\ln x)^n \overset{\text{IPP}}{=} \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$ donc $\displaystyle\int_0^1 \left|\frac{x^n(\ln n)^n}{n!}\right| \mathrm{d}x = \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$

2. a) $P(X = Y) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} P(X = n, Y = n) = \sum_{n\geqslant 1} p^2(1-p)^{2(n-1)} = \frac{p^2}{1-(1-p)^2} = \frac{p}{2-p}$. Comme $\det(M) = X^2 - Y^2$ et $X + Y \geqslant 2$ (donc $\neq 0$), M est inversible si et seulement si $X \neq Y$ donc proba $1 - \dfrac{p}{2-p}$

b) Les valeurs propres de M sont $\lambda_1 = X + Y$ et $\lambda_2 = X - Y$ donc $\mathrm{Cov}(\lambda_1, \lambda_2) = E[(X+Y)(X-Y)] - E(X+Y)E(X-Y) \overset{\text{lin}}{=} E(X^2) - E(Y^2) - E(X)^2 + E(Y)^2 = V(X) - V(Y) = 0$. Mais elles ne sont pas indépendantes car $P(\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 0) = P(X + Y = 3, X = Y) = 0$ alors que $P(X = Y) \neq 0$ et $P(X + Y = 3) = P(X = 1, Y = 2) + P(X = 2, Y = 3) = 2p^2(1-p)^2 \neq 0$.

Exercice 55 *[sujet]* **1.** a) Par CSSA avec $\sqrt{n+x}-\sqrt{n}=\dfrac{x}{\sqrt{n+x}+\sqrt{n}}$

b) CVUTS sur $\mathbb{R}^+$ avec CSSA et $|R_n(x)|\leqslant|f_{n+1}(x)|\leqslant\sqrt{n+1+b}-\sqrt{n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ donc $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}^+$.

$f_n'(x)=\dfrac{(-1)^n}{2\sqrt{n+x}}$ donc CVUTS par CSSA avec $\left|\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}f_k'(x)\right|\leqslant\dfrac{2}{\sqrt{n+a}}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$. (pas sur $\mathbb{R}^+$ car f_0 n'est pas dérivable en 0). Puis $f'(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{2(-1)^n}{\sqrt{n+x}}\geqslant 0$ tjs par CSSA

c) Si f ne tend pas vers $+\infty$ en $+\infty$ alors f CV vers ℓ (croissante) et $f(x)\leqslant\ell$. Comme $R_n(x)$ est du signe de $f_{n+1}(x)$, $R_{2n+1}(x)\geqslant 0$ donc $\ell\geqslant f(x)=S_{2n+1}(x)+R_{2n+1}(x)\geqslant S_{2n+1}(x)=\displaystyle\sum_{p=0}^{n}f_{2p}(x)-f_{2p+1}(x)$. Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f_{2p}(x)-f_{2p+1}(x)=\sqrt{2p+1}-\sqrt{2p}$, en faisant tend x vers x vers $+\infty$ (somme finie), on aurait $\ell\geqslant\displaystyle\sum_{p=0}^{n}\sqrt{2p+1}-\sqrt{2p}$, pour tout n ; ce qui est absurde puisque c'est la somme partielle d'une SATP DV (DL)

2. a) Facile avec $<P|P>=0\Rightarrow\forall k\in[\![0,n]\!]\,,P^{(k)}(\alpha)=0$ donc α est racine de P d'ordre $\geqslant n+1$ et $\deg(P)\leqslant n$ donc $P=0$.

b) Endomorphisme facile. $\varphi(P)^{(k)}=(X-\alpha)P^{(k+1)}+kP^{(k)}$ donc $<\varphi(P)|Q>=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}kP^{(k)}(\alpha)Q^{(k)}(\alpha)=<P|\varphi(Q)>$.

Exercice 56 *[sujet]* **1.** a) Facile

b) on a $x=\dfrac{\ell(x)}{\ell(a)}a$ car $\ell(a)\in\mathbb{R}^*$.

c) $f(x)=-\ell(a)x$ (donc vp si $x\neq 0$)

d) $f^2(x)=-\ell(a)f(x)$ donc $X(X+\ell(a))$ annule f. Si $\ell(a)\neq 0$, il est SARS et si $\ell(a)=0$ alors $f^2=0$ donc non DZ (0 est la seule valeur propre possible et $f\neq 0$)

e) si $\ell(a)=0$ alors $\mathcal{X}_f=X^n$; sinon $E_0(f)=\mathrm{Vect}\{a\}$ et $E_{-\ell(a)}(f)=\ker(\ell)$ est un hyperplan donc $\mathcal{X}_f=X(X+\ell(a))^{n-1}$. Dans tous les cas, $\mathrm{Tr}(f)=-(n-1)\ell(a)$.

2. a) $|u_n|\leqslant\|f\|_\infty\displaystyle\int_0^1x^n\,\mathrm{d}x=\dfrac{\|f\|_\infty}{n+1}$

b) $u_n\overset{\text{IPP}}{=}\dfrac{f(1)}{n+1}-\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\int_0^1x^{n+1}f'(x)\,\mathrm{d}x$ puis $\left|\displaystyle\int_0^1x^{n+1}f'(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\dfrac{\|f'\|_\infty}{n+2}$ donc $u_n=\dfrac{f(1)}{n+1}+O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\sim\dfrac{f(1)}{n}$

Exercice 57 *[sujet]* **1.** a) $u_n=e-\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}=\int_0^1\dfrac{(1-t)^n}{n!}e^t\,\mathrm{d}t$ puis on pose $u=(1-t)^n$: $u_n=\dfrac{1}{enn!}\displaystyle\int_0^1u^{1/n}e^{u^{1/n}}\,\mathrm{d}u$ et on vérifie $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1u^{1/n}e^{u^{1/n}}\,\mathrm{d}u=\int_0^1e\,\mathrm{d}u=e$ par TCD avec $|u^{1/n}e^{u^{1/n}}|\leqslant e$ donc $u_n\sim\dfrac{1}{nn!}$

b) $2\pi n!e=2\pi\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\dfrac{n!}{k!}+2\pi n!u_n$ et $\dfrac{n!}{k!}\in\mathbb{N}$ si $k\in[\![0,n]\!]$ donc $\sin(2\pi n!e)=\sin(2\pi n!u_n)\sim 2\pi n!u_n$ (car $\lim n!u_n=0$) puis $\sin(2\pi n!e)\sim\dfrac{2\pi}{n}$ (positif) et $\sum\sin(2\pi n!e)$ DV

2. a) $\mathcal{X}_A=(X-1)(X+1)^2$ et $\dim(E_{-1}(A))=1$ donc pas DZ

b) on prend e_1 vp ass à 1, e_2 vp ass à -1 et e_3 tel que $u(e_3)+e_3=e_2$ donc $P=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&2&1\\1&-2&0\end{pmatrix}$ convient.

c) u commute avec v si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v)=\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&c\\0&0&b\end{pmatrix}$

Exercice 58 *[sujet]* **1.** a) Facile

b) cours

c) $E=\ker(p)\oplus\mathrm{Im}(p)$; si $x=a+p(b)$ avec $p(a)=0$, on a $f\circ p(x)=f\circ p(b)$ et $p\circ f(x)=p(f(a))+p(f(p(b)))=f(p(b))$ car $f(a)\in\ker(p)$ et $f(p(p))\in\mathrm{Im}(p)=\ker(p-id)$ donc $p(f(p(b)))=f(p(b))$.

2. a) $f_n(0)=\dfrac{1}{n}$ et $f_n(x)\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{xn^2}$ (signe fixe) donc $D_S=\mathbb{R}\setminus\{-1/n,n\in\mathbb{N}^*\}$

b) $f_n'(x) = \dfrac{-1}{n(nx+1)^2}$ donc $\|f_n'\|_\infty^{[a,b]} = \dfrac{1}{n(na+1)^2} \sim \dfrac{1}{n^3a^2}$ donc $\sum f_n'$ CVNTS de $\mathbb{R}^{+*}$

c) $\left|S(s) - \sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2x}\right| = \sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2x(nx+1)} \leqslant \dfrac{1}{x^2}\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^3}$ donc $S(x) \underset{x\to+\infty}{=} \dfrac{1}{x}\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^2} + O\left(\dfrac{1}{x^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^2}$.

Exercice 59 *[sujet]* **1.** a) $t \mapsto t^{1/n}$ est $\mathcal{C}^1$ bijective et strictement croissante de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc $I_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin(t)}{t^{1-1/n}}\,\mathrm{d}t$ (et les deux intégrales sont de même nature)

b) On prouve la CV de la seconde intégrale en deux temps : $\dfrac{\sin(t)}{t^{1-1/n}} \underset{t\to 0}{\sim} t^{1/n} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$ donc $\displaystyle\int_0^1 \dfrac{\sin(t)}{t^{1-1/n}}\,\mathrm{d}t$ CV ; sur $[1,+\infty[$, par IPP, $u : t \mapsto -\cos(t)$ et $v : t \mapsto t^{1/n-1}$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $[1,+\infty[$ et $\lim\limits_{+\infty} uv = 0$ donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \dfrac{\sin(t)}{t^{1-1/n}}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \dfrac{\cos(t)}{t^{2-1/n}}\,\mathrm{d}t$ sont de même nature, donc CV car $\dfrac{\cos(t)}{t^{2-1/n}} \underset{t\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{t^{2-1/n}}\right)$ et $2 - \dfrac{1}{n} > 1$ pour $n \geqslant 2$.

2. a) Prendre a tel que $f^{n-1}(a) \neq 0$ et montrer par récurrence (forte) que si $\sum\limits_{i=0}^{n-1} \alpha_i f^i(a) = 0$ alors $\alpha_k = 0$ (en composant par f^{n-1} pour commencer, puis f^{n-2},...)

b) $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ avec $a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ (la même que T en taille n). $\det(f) = 0$ (matrice triangulaire inférieure)

c) i. oui, on vient de le faire

ii.

Exercice 60 *[sujet]* **1.** a) récurrence double

b) si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{X}_A = P_n$ (développer par L_1 directement). On a $\cos\left(n + \dfrac{1}{2}\right)\theta = 0$ pour $\theta = \dfrac{2k+1}{2n+1}\pi$, $k \in [\![0,n]\!]$ (enlever $k = n$ car le dénominateur s'annule aussi),donc $\mathcal{X}_A$ s'annule en $2\cos\dfrac{2k+1}{2n+1}\pi$, $k \in [\![0,n-1]\!]$ qui sont n valeurs distinctes (cos décroît strictement sur $[0,\pi]$) et $\deg(\mathcal{X}_A) = n$ donc on a toutes les racines et elles sont simples (donc $\mathcal{X}_A$ est SARS)

2. CVS sur $\mathbb{R}$ par CSSA, $\|f_n\|_\infty = f_n\left(\sqrt{\dfrac{1}{2n-1}}\right) \sim \dfrac{\sqrt{e}}{2n}$ donc pas CVN mais CVU car (CSSA) $|R_n(x)| \leqslant |f_{n+1}(x)| \leqslant \|f_{n+1}\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Exercice 61 *[sujet]* **1.** a) $\mathcal{B} = (1, i)$

b) cela revient à étudier $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto (x - 2y, -y)$ donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

c) $\mathrm{Mat}_B(f) = P\mathrm{diag}(1,-1)P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. $t \mapsto t^\alpha$ est croissante donc $\displaystyle\int_0^n t^\alpha\,\mathrm{d}t \leqslant S_n \leqslant \int_1^{n+1} t^\alpha\,\mathrm{d}t$ puis $S_n \sim \dfrac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ donc par équivalent de SATP, $\sum \dfrac{1}{S_n} CV$ pour tout $\alpha > 0$

Exercice 62 *[sujet]* **1.** a) $\mathcal{X}_A = (X-1)(X-2)^2$ et $\mathrm{rg}(A - 2I_3) = 2$

b) $E_2(A) = \mathrm{Vect}\{(1,0,1)\}$ et $E_1(A) = \mathrm{Vect}\{(1,-1,1)\}$

c) $u = (1,0,1)$ et $v = (0,1,0)$ puis $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ si $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

d) $T^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & k2^{k-1} \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}$ et $A^k = PT^kP^{-1}$

2. a) $\theta = \arccos(1-h) \Leftrightarrow h = 1 - \cos(\theta)$ et $h \to 0^+$ si et seulement si $\theta \to 0^+$; $1 - \cos\theta \underset{\theta\to 0^+}{\sim} \dfrac{\theta^2}{2}$ donc (composition des limites) $\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{h}{f(h)^2} = \dfrac{1}{2}$ et comme $f(h) \geqslant 0$, on a bien $f(h) \underset{h\to 0^+}{\sim} \sqrt{2h}$

b) $u_n = \arccos\left(1 - \dfrac{1}{2+n^3}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{2}{2+n^3}} \sim \dfrac{\sqrt{2}}{n^{3/2}}$ (positif) donc la série CV

Exercice 63 *[sujet]* **1.** un vecteur directeur unitaire de F est $v = \frac{1}{\sqrt{35}}(5,3,-1)$ puis $d(u,F)^2 = \|u\|^2 - \|\pi_F(u)\|^2 = 3 - (v|u)^2 = 3 - \frac{49}{35} = \frac{56}{35}$

2. a) Facile (et $\varphi(f)$ est en fait $\mathcal{C}^1$)

b) $\varphi(f)(0) = 0$ donc $1 \notin \mathrm{Im}(\varphi)$ (non surjectif) ; si $f \in \ker(\varphi$ alors $\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc $tf(t) = 0$ (en dérivant) puis $f = 0$ sur $\mathbb{R}^*$ donc sur $\mathbb{R}$ par continuité en 0 : φ est injectif

c) $0 \notin \mathrm{Sp}(\varphi)$; si $\lambda \neq 0$ et $\varphi(f) = \lambda f$ alors comme $\lambda \neq 0$ et $\varphi(f) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ alors $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et vérifie $xf(x) = \lambda f'(x)$ donc $f(x) = \alpha e^{x^2/2\lambda}$. On a donc $\mathrm{Sp}(f) = \mathbb{R}^*$ et $E_\lambda(\varphi) = \mathrm{Vect}\{x \mapsto e^{x^2/2\lambda}\}$

d)

Exercice 64 *[sujet]* **1.** On a $n = \sum_{i=1}^n x_i \leqslant \left|\sum_{i=1}^n x_i\right| \overset{\text{C-Sch}}{\leqslant} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n 1^2\right)^{1/2} = n$ donc $(x_1,\dots,x_n) = \lambda(1,\dots,1)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^+$ (à cause de la première égalité) ; on en déduit $x_i = 1$ pour tout i ; récip OK

2. a) quotient

b) facile : commencer par $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

c) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = -1$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 3$ donc f n'est pas $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ (ouvert) d'après le th de Schwarz

Exercice 65 *[sujet]* **1.** Questions de cours

2. a) $\det(C_P) = (-1)^n a_0 = (-1)^{n+1} P(0)$

b) $\mathcal{X}_{C_P} = P$

c) $\mathrm{rg}(C_P - \lambda I_n) \geqslant n-1$ car les $n-1$ premières colonnes sont libres

d) si C_P est DZ alors comme les espaces propres sont des droites, il doit y avoir n telles droites donc n vp distinctes et P est SARS. Récip évidente puisque $\mathcal{X}_{C_P} = P$