TD1 : Intégration

Exercice 1 **(Mines-Télécom PSI 2018)**

Pour $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = \displaystyle\int_0^x e^{nt^2}\,\mathrm{d}t - \int_x^1 e^{-nt^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f_n est dérivable sur $[0,1]$ et étudier ses variations.

2. Montrer qu'il existe un unique $c_n \in [0,1]$ tel que $\displaystyle\int_0^{c_n} e^{nt^2}\,\mathrm{d}t = \int_{c_n}^1 e^{-nt^2}\,\mathrm{d}t$.
Déterminer c_0.

3. Étudier la suite $(c_n)_{n\geqslant 0}$. *(*)*

Exercice 2

Soit $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \pm 1$.

1. Justifier l'existence de $I(x) = \displaystyle\int_0^\pi \ln\big(x^2 - 2x\cos(t) + 1\big)\,\mathrm{d}t$

2. Donner la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ de $X^{2n} - 1$

3. Soit $S_n(x) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(x^2 - 2x\cos\frac{k\pi}{n} + 1\right)$; justifier que $I(x) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \pi S_n(x)$. *(*)*

4. En déduire la valeur de $I(x)$

Exercice 3

1. Montrer que $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$ est définie sur $]0,1[$.

2. Montrer que f se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

3. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-t}{\ln t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 4

Pour $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, on pose $\phi(f)(x) = \displaystyle\int_0^1 \inf(x,t) f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. En utilisant la relation de Chasles, trouver une autre forme de $\phi(f)(x)$. Prouver que ϕ est un endomorphisme de $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.

2. Trouver $\ker\phi$

3. Prouver que $\phi(f)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et calculer $(\phi(f))''$ en fonction de f.

4. En déduire $\mathrm{Im}(\phi)$

5. Résoudre l'équation $\phi(f) = \lambda f$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. *(*)*

Exercice 5

Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Pour $f \in E$, $\varphi(f)(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Pour $f \in E$, justifier l'existence de $\|f\|_\infty = \displaystyle\sup_{[0,1]} |f|$.

2. Montrer que, pour $f \in E$, on a $\|\varphi(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$.
Existe-t-il f non nulle, telle que $\|\varphi(f)\|_\infty = \|f\|_\infty$?

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $\varphi^n(f) = \varphi \circ \ldots \varphi(f)$ à l'aide d'une intégrale de f et en déduire *(*)*

$$\forall f \in E, \|\varphi^n(f)\|_\infty \leqslant \frac{1}{n!}\|f\|_\infty$$

Quelles fonction réalisent l'égalité dans l'inégalité précédente ?

Indications

Exercice 1

3. *étudier le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ et en déduire que (c_n) converge vers ℓ. On peut ensuite remarquer que $\displaystyle\int_0^{c_n} e^{nt^2}\,\mathrm{d}t \geqslant c_n$ pour trouver $\ell = 0$.*

Exercice 2

1. *Chercher les racines de* $X^2 - 2X\cos(t) + 1$.

3. *somme de Riemann*

Exercice 4

5. *si* $\lambda \neq 0$ *montrer qu'une solution* f *est nécessairement de classe* $\mathcal{C}^2$

Exercice 5

3. *justifier que* $\varphi^n(f)$ *est de classe* $\mathcal{C}^n$ *et calculer* $\left(\varphi^n(f)\right)^{(k)}(0)$, *pour* $k \in [\![0, n]\!]$.