

**PSI2. Proposition de correction d'exercices d'électrocinétique.****Exercice A2.**

1a) Les potentiels électriques étant définis à une constante additive près, on peut fixer la valeur d'un potentiel. Si on choisit  $V_D=0$ , alors on a  $V_C=E$ .

1b) On obtient :

$$\frac{1}{R_1}(E - V_A) + \frac{1}{R_2}(0 - V_A) + (-i) = 0$$

$$\frac{1}{R_4}(E - V_B) + \frac{1}{R_3}(0 - V_B) + i = 0$$

1c) La première équation permet de sortir  $V_A=...$  ; la seconde de sortir  $V_B=...$

Et on obtient finalement :

$$u = V_A - V_B = \frac{R_2 R_4 - R_1 R_3}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} \cdot E - \left( \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)} + \frac{R_3 R_4}{(R_3 + R_4)} \right) i = E_g - R_g i$$

Le pont de Wheatstone est équivalent à un générateur linéaire de Thevenin dont la fem est  $E_g$  et de résistance interne  $R_g$ .

2) Si D est un dipôle passif, la puissance reçue par ce dipôle est positive, donc la puissance fournie par  $E_g=E_g i$  est positive ou nulle.  $E_g$  et  $i$  sont de même signe et s'annulent en même temps. Donc si  $R_2 R_4 > R_1 R_3$  alors  $E_g > 0$  et  $i > 0$ . Contraposée évidente.

$$i = 0 \text{ est équivalent à } R_2 R_4 = R_1 R_3$$

3) On peut avoir une évaluation de  $R_1$  par :  $R_1 = \frac{R_2 R_4}{R_3} = 12 \Omega$ .

**Exercice A3.**

$$1) P_g = u \cdot i.$$

$$2) \text{D'autre part } u = E - Ri \text{ donc on peut éliminer } i \text{ dans le calcul et obtenir : } P_g = \frac{E(E-u)}{R}.$$

le dipôle est passif donc la puissance reçue par le dipôle est positive ou nulle donc  $u$  est compris entre 0 et  $E$  inclus.

3)  $P_g(0) = P_g(R) = 0$  et est une fonction positive continue de  $u$  donc il y a au moins un maximum qu'on peut chercher en dérivant  $P_g(u)$ . La dérivée ne s'annule qu'une fois en  $u = E/2$  et on a donc forcément un maximum et on calcule alors la valeur fournie de  $P_M$ .

Dans ce cas de fonctionnement, D se comporte comme une résistance  $R$  ( mais il ne l'est pas forcément).

4)  $R=0$  pour un générateur de tension parfait, donc celui-ci peut fournir n'importe quelle puissance électrique !!!

5) D'un point de vue tension électrique, on a le même générateur sauf que l'assemblage de piles ne peut fournir que 4,5W alors que la batterie auto pourrait fournir par intermittences jusqu'à 14kW, suffisant pour faire tourner un moteur électrique susceptible de faire démarrer le moteur thermique.

**Exercice A4.**

1) On a continuité temporelle de la tension aux bornes d'un condensateur donc :

$$u(0^+) = u(0^-) = 0$$

La seconde résistance est donc court-circuitée au début et il n'y a donc alors aucun courant.

La LDM donne alors :  $i(0^+) = \frac{E}{R}$  qui traverse alors entièrement le second condensateur. La caractéristique courant-tension d'un condensateur donne alors :  $\dot{u}(0^+) = \frac{E}{RC}$ .

Au début du régime transitoire, un condensateur se comporte comme un interrupteur fermé.

2) Une fois le régime permanent continu installé, un condensateur devient un interrupteur ouvert et le courant devient alors nul dans toutes les branches :  $u$  et  $i$  sont alors nulles.

Attention : le premier condensateur est chargé.

3) À partir du circuit fourni, on peut définir la constante de temps  $\tau = RC = 1 \text{ ms}$ . Donc on peut penser que le régime transitoire va durer quelques millisecondes.

4) On peut utiliser un PDT.

Le premier groupe RC série définit une impédance  $\underline{Z}_1 = R + \frac{1}{jC\omega}$ .

Le second groupe RC parallèle définit une admittance  $\underline{Y}_2 = \frac{1}{\underline{Z}_2} = jC\omega + \frac{1}{R}$

Le PDT donne :  $\underline{U} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{E} = \frac{\underline{E}}{1 + \underline{Z}_1 \cdot \underline{Y}_2}$ . On remplace et on obtient :

$$\underline{U} = \frac{jRC\omega \underline{E}}{1 + 3jRC\omega + (jRC\omega)^2}$$

On fait le produit en croix. Multiplier par  $j\omega$  en complexe revient à dériver temporellement la grandeur électrique réelle et on obtient pour  $t > 0$  :

$$u + 3RC\dot{u} + (RC)^2\ddot{u} = RC\dot{E} = 0$$

qui devient avec les notations de l'énoncé :

$$\ddot{u} + 3\omega_0\dot{u} + \omega_0^2u = 0$$

5) On a une équation différentielle d'ordre 2 et on a deux conditions initiales. On a donc tout ce qui faut pour résoudre entièrement.

Une solution particulière est la fonction nulle.

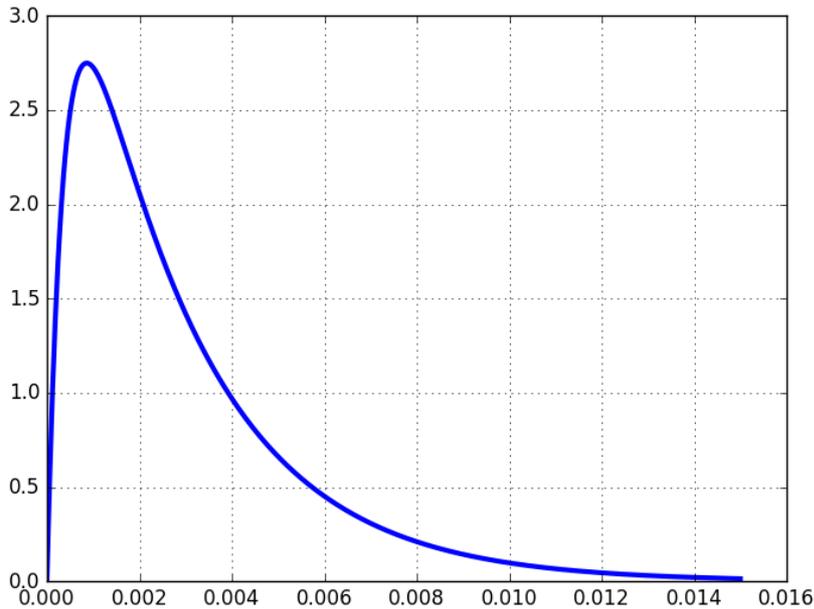
Pour la solution générale sans second membre, il nous faut une base soit deux solutions différentes. On va les obtenir en cherchant des solutions de la forme  $A \cdot \exp(rt)$ . On obtient alors :  $r^2 + 3\omega_0 r + \omega_0^2 = 0$  qu'on résout en :  $r_- = \left(\frac{-3 - \sqrt{5}}{2}\right)\omega_0$  et  $r_+ = \left(\frac{-3 + \sqrt{5}}{2}\right)\omega_0$  toutes deux réelles négatives.

Et la solution générale de l'équa diff s'écrit :

$$u(t) = A \cdot \exp(r_- t) + B \cdot \exp(r_+ t)$$

où  $A$  et  $B$  sont des constantes d'intégration qu'on déterminera à partir des CI obtenues dans les questions précédentes.

Pour la forme graphique, la solution part de 0 pour  $y$  revenir asymptotiquement sans oscillations car le régime est apériodique. La résolution numérique sous Python avec  $E = 10 \text{ V}$  donne avec  $t$  en s en abscisses et  $u$  en V en ordonnées :



On peut remarquer qu'on avait correctement évalué l'ordre de grandeur de la durée du régime transitoire.

Pour les plus ambitieux, la résolution littérale complète donne :  $B = -A = \frac{E}{\sqrt{5}}$ .

### **Exercice A5.**

1) Si le tube est éteint, on charge le condensateur sous la tension  $E=100V$ , avec la constante de temps  $\tau=1s$ . On a un circuit d'ordre 1, dont l'équa diff est :  $u(t) + \tau\dot{u}(t) = E$   
Loi exponentielle d'asymptote  $E=100V$ , partant de  $u(0)=0$  pour  $u(t)$ . Donc à un instant donné  $t_1$ , on passe par  $80V$  et le tube s'allume

2) Si le tube est allumé, en utilisant l'analogie Thevenin-Norton, on revient à circuit d'ordre 1 donc l'équa diff est :  $u(t) + \tau\dot{u}(t) = E'$  avec  $\tau' = R_e C = 0,1s$  et  $E' = \frac{R'}{R+R'} E \approx 11V$   
La tension va décroître exponentiellement de  $80V$  à environ  $11V$ . En chemin, on passe par  $60V$  et donc le tube s'éteint à un instant  $t_2$ .

3) On revient au système initial et la tension vers  $100V$  et repasse par  $80V$ . On a un phénomène oscillant. Du fait des constantes de temps, la descente est plus rapide que la montée.

**Exercice A6.**

$$0) \omega_0 = 10^4 \text{ s}^{-1}, Q = 10.$$

1) On peut définir les 3 courants en convention récepteur par rapport à u. Ils sont ici tous les 3 vers le bas et leur somme algébrique est évidemment nul (LDN).

$$2) \text{ On a continuité de la tension aux bornes de C donc } u(0^+) = u(0^-) = \frac{q_0}{C}.$$

On a continuité du courant circulant dans la bobine donc  $i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0$

$$\text{La loi d'Ohm permet de calculer : } i_R(0^+) = \frac{u(0^+)}{R} = \frac{q_0}{RC}.$$

$$\text{La LDN permet alors de déterminer : } i_C(0^+) = -i_R(0^+) - i_L(0^+) = -\frac{q_0}{RC}.$$

$$\text{On peut alors obtenir la seconde CI : } \dot{u}(0^+) = -\frac{q_0}{RC^2}$$

Au bout d'un temps infini, toute l'énergie initialement stockée dans le condensateur aura été consommée par la résistance. Toutes les grandeurs électriques sont nulles.

3) On suppose un RSP de pulsation  $\omega$  et on applique la LDN en termes de potentiel sur le nœud haut. On met l'origine des potentiels au nœud bas.

La LDN s'écrit alors :

$$jC\omega(0 - \underline{U}) + \frac{1}{jL\omega}(0 - \underline{U}) + \frac{1}{R}(0 - \underline{U}) = 0$$

On remet en forme sans éliminer  $\underline{U}$ . On obtient :

$$LC(j\omega)^2 \underline{U} + \frac{L}{R}(j\omega) \underline{U} + \underline{U} = 0$$

Ce qui donne en réel :

$$LC\ddot{u} + \frac{L}{R}\dot{u} + u = 0$$

Puis la forme proposée dans l'énoncé :

$$\ddot{u} + Q\omega_0\dot{u} + \omega_0^2 u = 0$$

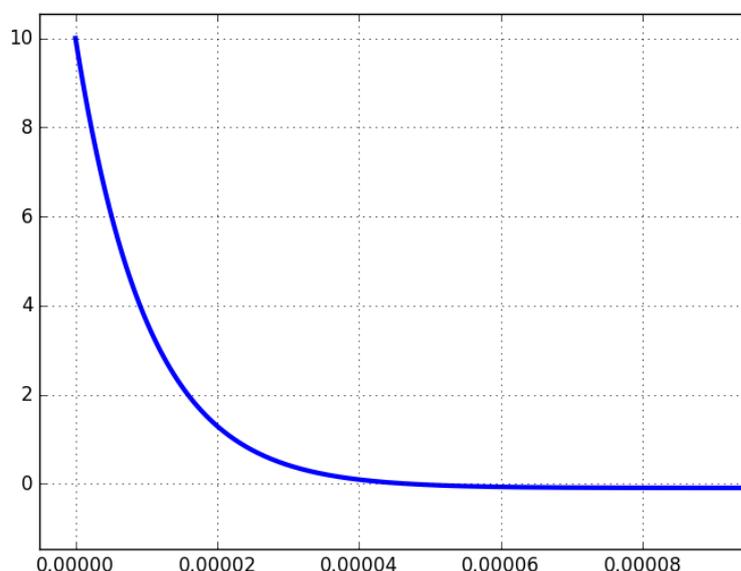
3) Une solution particulière est la fonction nulle. Il me faut une base de l'ensemble des solutions générales. La recherche en  $\exp(rt)$  donne :

$$r^2 + Q\omega_0 r + \omega_0^2 = 0$$

dont le discriminant est :  $\Delta = (Q^2 - 4)\omega_0^2 > 0$

On a donc un régime aperiodique, qui ressemble ici à une exponentielle décroissante usuelle.

Un calcul sous Python avec  $u_0 = q_0/C = 10\text{V}$  sur une durée de 0,1ms donne :



Abscisse : temps t en s

Ordonnée : tension u en V.

**Exercice A7.**

Comportement de la bobine : s'oppose à la variation de courant en régime transitoire; fil de jonction pour le régime permanent continu.

Si vous lisez bien l'énoncé, aucune équation différentielle à résoudre.

1) L'énoncé ne le dit pas, mais les courants doivent être nuls avant la fermeture de K.

A la fermeture de K, continuité du courant circulant dans la bobine donc  $i_1(0^+) = 0$ . On obtient bien entendu  $i_2(0^+) = \frac{E}{R_2} = 0,3 \text{ A}$ .

2)a) On a attendu très longtemps donc le régime permanent continu s'est établi, la bobine est un fil de jonction. On obtient :  $i_1(0^-) = \frac{E}{R_1} = 3 \text{ A}$

2b) Juste avant l'ouverture de K, on a  $i_2 = 0,3 \text{ A}$ . Juste après l'ouverture de K, il n'y a plus qu'une seule maille et  $i_2 = -i_1$ . D'autre part, la bobine impose la continuité temporelle de  $i_1$ . Donc, brutalement  $i_2$  passe de  $0,3 \text{ A}$  à  $-3 \text{ A}$ ; de même,  $u_2$  passe de brutalement de  $6 \text{ V}$  à  $-60 \text{ V}$ .

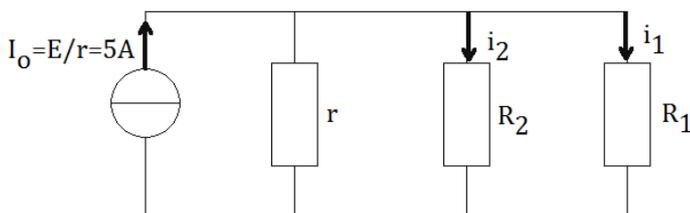
2c) Juste avant l'ouverture de l'interrupteur, la lampe semble éteinte. A l'ouverture, elle brille momentanément. On a mis en évidence le phénomène d'autoinduction de la bobine.

C'était une des premières utilisations de bobines : fabriquer des hautes tensions transitoires, par exemples pour provoquer une étincelle dans une bougie, elle-même dans un cylindre rempli d'un mélange explosif.

3) La prise en compte de la résistance interne du générateur va compliquer les calculs.

a) Peu de changements. A la fermeture de K, continuité du courant circulant dans la bobine donc  $i_1(0^+) = 0$ . On obtient bien entendu  $i_2(0^+) = \frac{E}{r+R_2} = 0,24 \text{ A}$ .

b) Juste avant l'ouverture, on est en régime permanent continu et la bobine se comporte comme un fil de jonction. On transforme le Thévenin en Norton et on utilise un PDC.



On calcule alors :

$$i_1 = \frac{\frac{1}{R_1}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{r}} I_0 \approx 3,55 \text{ A}$$

$$i_2 = \frac{\frac{1}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{r}} I_0 \approx 0,33 \text{ A}$$

Juste après l'ouverture,  $i_1$  est le même et  $i_2$  passe brutalement à  $-i_1$ . Il s'agit évidemment d'un régime transitoire. Les deux courants vont en fait s'annuler avec la constante de temps  $\tau = \frac{L}{R_1+R_2}$ .

**Exercice B4.**

Vérifiez qu'à la résonance d'intensité, les tensions complexes aux bornes de L et C sont opposées et les deux dipôles s'éliminent.

Le générateur alimente en fait la résistance, donc on a  $E = RI_{max}\sqrt{2}$ .

La racine de 2 est obligatoire car les définitions des deux grandeurs sont différentes. TRES VICIEUX.

On sort :  $R=71\Omega$ .

Il reste 2 inconnues L et C et 2 informations :  $f_o = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 500\text{Hz}$        $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{f_o}{\Delta f} = 5$

Le produit permet d'obtenir C. Le rapport donne L.

$$C = \frac{\Delta f}{2\pi R f_o^2} \approx 0,9\mu\text{F}$$

$$L = \frac{R}{2\pi\Delta f} = 0,11\text{H}$$

Evidemment, il faut connaître les propriétés de la résonance d'intensité.

**Exercice B5.**

A  $u(t)$ , on associe  $\underline{u}(t)=\underline{U}\exp(j\omega t)$  avec  $\underline{U}=U$

A  $i(t)$ , on associe  $\underline{i}(t)=\underline{I}\exp(j\omega t)$  avec  $\underline{I}=I\cdot\exp(j\varphi)$

Avec les amplitudes complexes, on peut travailler comme en continu en remplaçant résistance (resp conductance) par impédance (resp admittance).

Comme on est en convention récepteur, on a :  $U = \underline{Z} \cdot \underline{I} = \left(R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}\right) \cdot \underline{I}$  d'où :

$$\underline{I} = \frac{U}{R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}$$

On calcule maintenant :  $I = \|\underline{I}\| = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$  et  $\varphi = \text{Arg}(\underline{I}) = -\text{Arctan}\left(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}\right)$

Rem : pas de pb pour la définition de l'argument.

Si on change tous les cos par sin, on obtient exactement les mêmes formules et on peut indifféremment utiliser l'une ou l'autre ligne trigo. Par contre, il ne faut pas mélanger.

$f_o$  n'est pas définie dans l'énoncé mais il semble clair qu'il s'agit de la fréquence de résonance d'intensité définie par  $f_o = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

A vérifier par vous-même : si  $f < f_o$  alors  $\varphi$  compris entre 0 et  $+\pi/2$  et le courant est en avance sur la tension d'alimentation. Autrement c'est l'inverse.

**Exercice B6.**

$$1) \quad \underline{E} = E \quad \underline{I}_1 = I_1 \exp(j\varphi_1) \quad \underline{I}_2 = I_2 \exp(j\varphi_2)$$

$$2) \text{La LDM donne : } \underline{I}_1 = I_1 \exp(j\varphi_1) = \frac{E}{R+jL\omega} \quad \underline{I}_2 = I_2 \exp(j\varphi_2) = \frac{E}{R+\frac{1}{jC\omega}}$$

On peut alors sortir les normes et arguments :

$$I_1 = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} \quad \varphi_1 = -\text{Arctan}\left(\frac{L\omega}{R}\right) \quad I_2 = \frac{C\omega E}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}} \quad \varphi_2 = \text{Arctan}\left(\frac{1}{RC\omega}\right)$$

$\varphi_1$  est compris entre  $-\pi/2$  et 0.  $\varphi_2$  est compris entre 0 et  $+\pi/2$ .

3) En quadrature signifie que les deux angles sont égaux à  $\pi/2$  près, soit forcément ici :

$\varphi_2 = \varphi_1 + \pi/2$  et on obtient  $\tan(\varphi_2) = \tan(\varphi_1 + \pi/2) = -1/\tan(\varphi_1)$ .

En utilisant les résultats de la question 2, on obtient  $L = R^2 C$  et cette relation est indépendante de la fréquence.

$$4) \text{Posons } \tau = RC = L/R. \text{ On peut alors obtenir : } \underline{I}_1 = \frac{1}{1+j\tau\omega} \frac{E}{R} \quad \underline{I}_2 = \frac{j\tau\omega}{1+j\tau\omega} \frac{E}{R}$$

On remarque alors :

$$\underline{U}_{AB} = R(\underline{I}_2 - \underline{I}_1) = -\left(\frac{1 - j\tau\omega}{1 + j\tau\omega}\right) E$$

La tension  $u_{AB}$  a la même amplitude que la tension  $e(t)$  mais est en avance de phase sur  $e(t)$ . On a fabriqué un circuit déphaseur.

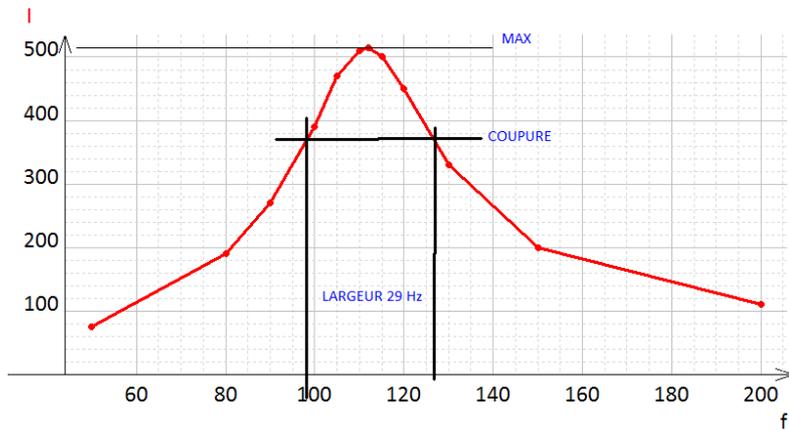
A très basse fréquence ( $\tau\omega \ll 1$ ), en phase.

A très haute fréquence ( $\tau\omega \gg 1$ ), avance de  $2\pi$  donc en phase.

A  $\tau\omega = 1$ , avance de phase de  $\pi$ , donc en opposition de phase.

**Exercice B7.**

On peut faire le traitement à la main en faisant apparaître les fréquences de résonance et de coupure :



La fréquence de résonance est vue à 112Hz et la largeur de la bande passante est de 29Hz. Ce qui permet de calculer le facteur de qualité  $Q=112/29$  soit environ 3,9.

A la résonance, le circuit est purement résistif et on a donc  $E=(R+r)I$ , ce qui permet de calculer r et d'obtenir :  $r = \frac{E}{I} - R \approx 1\Omega$ .

On a donc maintenant les deux relations :  $f_o = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 112Hz$  et  $Q = \frac{1}{R+r} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{f_o}{\Delta f} \approx 3,9$

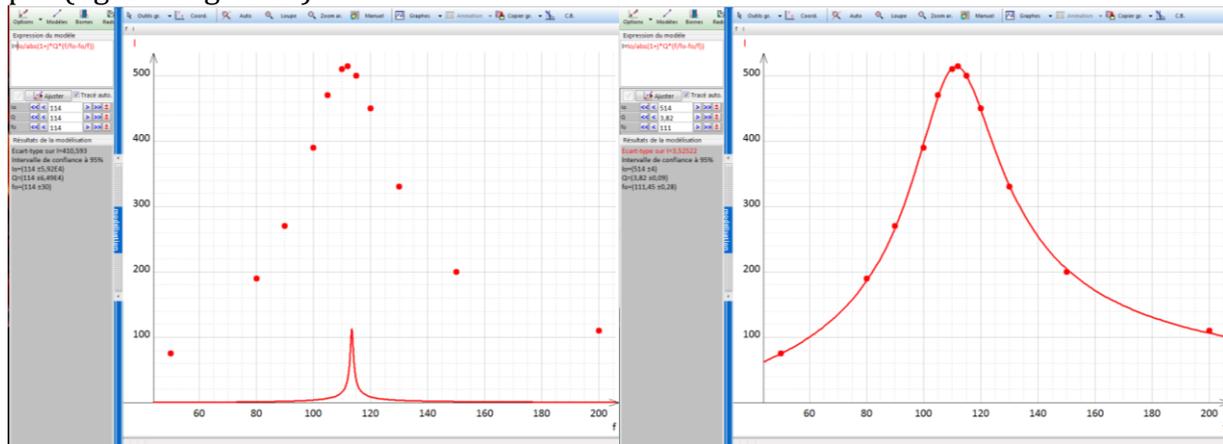
qu'on résoud en :

$$L = \frac{Q(R+r)}{2\pi f_o} \approx 60mH$$

$$C = \frac{1}{2\pi f_o Q(R+r)} \approx 360\mu F$$

Pour la bobine, on est proche de nos bobines usuelles de labo. Par contre, c'est un gros condensateur.

On peut faire aussi la modélisation en aidant un peu le logiciel (ici regressi) qui au début ne trouve pas (figure de gauche)



Finalement il trouve  $f_o = 111,5 \pm 0,3 Hz$  et  $Q = 3,82 \pm 0,1$  pour un intervalle de confiance de 95%.

**Exercice B8.**

Vérifiez si votre machine gère les nombre complexes. J'ai utilisé le module cmath de python pour les AN. L'approximation à 2 chiffres n'est pas toujours pertinente.

$$0) \underline{U} = U \text{ donc argument nul : } u(t) = U \cdot \cos(\omega t)$$

$$1) \underline{Z}_1 = 100 + 75j \, \Omega \text{ soit aussi } 125 \cdot \exp(j0,64) \, \Omega \quad \text{Réponse a}$$

$$2) \underline{Z}_2 = 150 - 200j \, \Omega \text{ soit aussi } 250 \cdot \exp(-j0,93) \, \Omega \quad \text{Réponse b}$$

$$3) \text{Les deux branches sont en parallèles, donc son admittance est } \underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2.$$

La loi d'ohm donne  $\underline{I} = \underline{Y} \cdot U = 2,2 - 0,4j \, \text{A} = 2,24 \cdot \exp(-j0,18) \, \text{A}$  Réponse d peut-être.

$$4) \underline{U}_{SQ} = \frac{jL\omega}{\underline{Z}_1} U = 90 + 120j \, \text{V}$$

$$\underline{U}_{TQ} = \frac{R_2}{\underline{Z}_2} U = 90 + 120j \, \text{V}$$

$$5) \underline{U}_{ST} = \underline{U}_{SQ} - \underline{U}_{TQ} = 0.$$

Réponse c

Remarque importante : ce résultat est en fait évident, car on a en fait un pont de Wheatstone équilibré (voir exer 2 page 1 de la même feuille d'exercice) :

$$R_1 \cdot R_2 = (jL\omega) \cdot \left( \frac{1}{jC\omega} \right)$$

Un petit fûté peut répondre à la dernière question sans avoir fait les précédentes. Il suffit de reconnaître le pont de Wheatstone.

**psi2. Corrigé de quelques exercices électronique fonctions de transfert.****Exercice A.**

1a)LDN au point A : notation complexe , potentiel nul en bas, potentiel  $\underline{E}$  à l'entrée,  $\underline{U}$  en A et  $\underline{S}$  à la sortie. 3 branches donc 3 termes :

$$\frac{1}{R}(\underline{E} - \underline{U}) + jC\omega(0 - \underline{U}) + jC\omega(\underline{S} - \underline{U}) = 0$$

Soit :

$$\underline{E} + jRC\omega\underline{S} = \underline{U}(1 + 2jRC\omega)$$

Puis PDT sur le circuit RC de droite :

$$\underline{S} = \frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega}}\underline{U} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}\underline{U}$$

AD ok car  $RC\omega$  sans unité.

On élimine  $\underline{U}$  entre les deux équations et on obtient la formule demandée avec :

$$H_o = Q = \frac{1}{3} \text{ et } \omega_o = \frac{1}{RC}$$

1b) Cette formule a été vue pour la première fois lors de l'étude de la résonance d'intensité du circuit RLC série. Formule typique d'un filtre passe-bande du second ordre.

$|H_o|$  est la valeur maximale du gain, obtenue pour la pulsation de résonance  $\omega_o$ . Q est reliée à la bande passante à -3dB du filtre par :  $\Delta\omega = \frac{\omega_o}{Q}$ . A SAVOIR .

1c) Filtre passe-bande :

A très basse fréquence, C devient un interrupteur ouvert donc courant nul dans les deux résistances et u est donc nul. A très haute fréquence, C devient un interrupteur fermé et le premier condensateur court-circuite la branche de droite et s est encore nulle.

1d) Multiplier la fonction de transfert haut et bas par  $j\omega$  :

$$\underline{H} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{H_o j\omega}{\left\{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega}\right)\right\} j\omega} = \frac{H_o j\omega}{j\omega + (j\omega)^2 \frac{Q}{\omega_o} + \omega_o}$$

puis produit en croix :

$$j\omega\underline{S} + (j\omega)^2 \underline{S} \frac{Q}{\omega_o} + \omega_o \underline{S} = H_o j\omega \underline{E}$$

Puis on repasse en réel :

$$\dot{s} + \ddot{s} \frac{Q}{\omega_o} + \omega_o s = H_o \dot{e}$$

Il ne reste plus qu'à multiplier par  $\frac{\omega_o}{Q}$  et réorganiser les termes.

**Pour la question 2 :**

Même méthode pour les calculs. x s'appelle la pulsation réduite.

Je développe juste le calcul de la pulsation de coupure :

Il faut d'abord calculer le gain :

$$G(x) = \left\| \frac{\underline{S}}{\underline{E}} \right\| = \left\| \frac{1}{1 - x^2 + 3jx} \right\| = \frac{1}{\sqrt{1 + 7x^2 + x^4}} \leq 1 = G(0)$$

Donc le gain est maximale à  $x=0$  et  $G_{max} = 1$ .

La pulsation réduite de coupure vérifie :  $G(x_c) = \frac{G_{max}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

On obtient donc :  $x_c$  solution de  $\sqrt{1 + 7x^2 + x^4} = \sqrt{2}$

On obtient l'équation bicarrée :

$$x^4 + 7x^2 - 1 = 0 \text{ ou } X^2 + 7X - 1 = 0 \text{ avec } X = x^2$$

On résoud :  $X = \frac{\pm\sqrt{53}-7}{2}$  dont la seule valeur positive est  $\frac{+\sqrt{53}-7}{2}$ . On extrait la racine positive. OK.

**Pour la question 3.** Maintenant, vous savez tout faire et la solution est donnée.

**Exercice B.**

1) Il s'agit d'un filtre passe-bande du second ordre, de fréquence de résonance  $f_0$ , de gain maximum 1, et de bande passante à -3dB :  $\Delta f = 10\text{Hz}$ .

Le diagramme de Bode revient à tracer  $H_{dB} = 20\log(|H|)$  et  $\varphi = \text{Arg}(H)$  en fonction de  $x = \log(f/f_0)$ .

En BF soit  $f \ll f_0$ , on cherche le terme prépondérant pour  $\underline{H}$

$$\underline{H} \approx \frac{1}{-jQ \frac{f_0}{f}} \quad \text{soit} \quad H_{dB} \approx 20\log\left(\frac{f}{f_0}\right) - 20\log(Q) = 20x - 40 \quad \text{et} \quad \varphi \approx +\frac{\pi}{2}$$

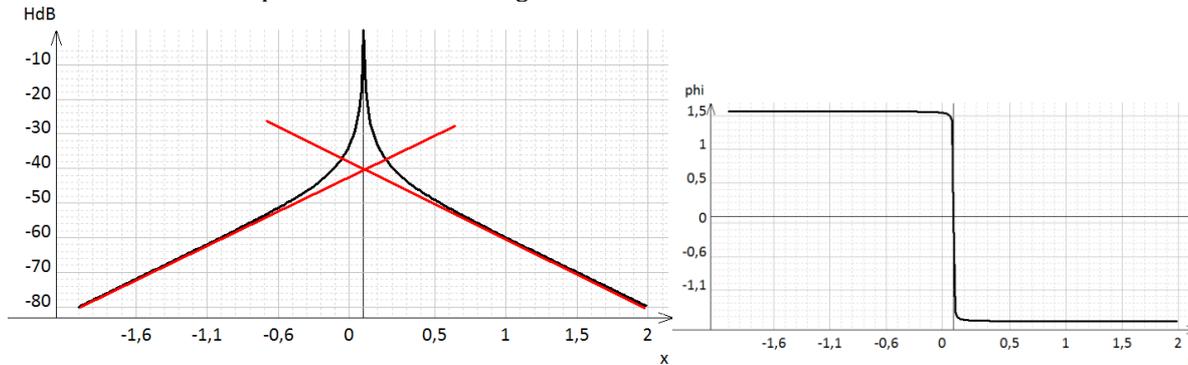
DROITE DE PENTE +20dB/décade

En HF soit  $f \gg f_0$ , on cherche le terme prépondérant pour  $\underline{H}$

$$\underline{H} \approx \frac{1}{jQ \frac{f}{f_0}} \quad \text{soit} \quad H_{dB} \approx -20\log\left(\frac{f}{f_0}\right) - 20\log(Q) = -20x - 40 \quad \text{et} \quad \varphi \approx -\frac{\pi}{2}$$

DROITE DE PENTE -20dB/décade

Les courbes obtenues par simulation avec regressi :



Courbe en noir, asymptotes en rouge.

2) A cette fréquence, le gain complexe vaut 1 donc le signal de sortie est identique au signal d'entrée.

3) On calcule  $\underline{H}(2f_0) = \frac{1}{1+300j} \approx \frac{1}{300j}$  donc  $H \approx \frac{1}{300} \approx 3,3 \cdot 10^{-3}$  et  $\text{Arg}(H) \approx -\frac{\pi}{2}$

Le signal d'entrée voit son amplitude divisée par 300 et la sortie est en retard de  $\pi/2$  sur l'entrée.

4) Le signal d'entrée est en fait la somme des deux précédents signaux. Comme on est en physique linéaire, la réponse permanente est la somme des deux réponses précédentes :

$$s(t) = 1 \cdot \cos(2\pi f_0 t) + 0,0033 \cos\left(4\pi f_0 t - \frac{\pi}{2}\right) \quad V$$

On ne verra certainement pas la seconde sinusoïde à l'oscilloscope.

5) Un signal carré de 200Hz est la somme de sinusoïdes de fréquences successives :

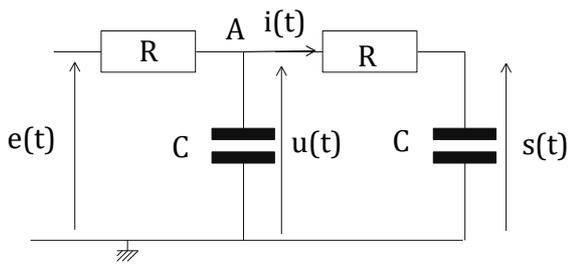
$$200\text{Hz}, 600\text{Hz}, 1000\text{Hz}=f_0, 1400\text{Hz}, \dots$$

L'harmonique 3 à 1000Hz passe entièrement, mais les autres harmoniques sont fortement atténuées et on ne les verra probablement pas.

6) Ici, on devrait sélectionner l'harmonique 2, mais elle est nulle, donc il y aura seulement du bruit en sortie.

**Exercice C.**

- 1) Cf cours de sup.
- 2)



Si on a bien ici  $S=H_1.U$ , on n'a pas  $U=H_1.E$  car le courant de sortie du premier étage  $i(t)$  n'est pas nul.

3)  $H = \frac{1}{(1+j\frac{\omega}{\omega_0})^2}$  dont le module vaut  $H = \frac{1}{1+(\frac{\omega}{\omega_0})^2} \leq 1 = H(0)$

a) Donc  $H_{max}=1$ .

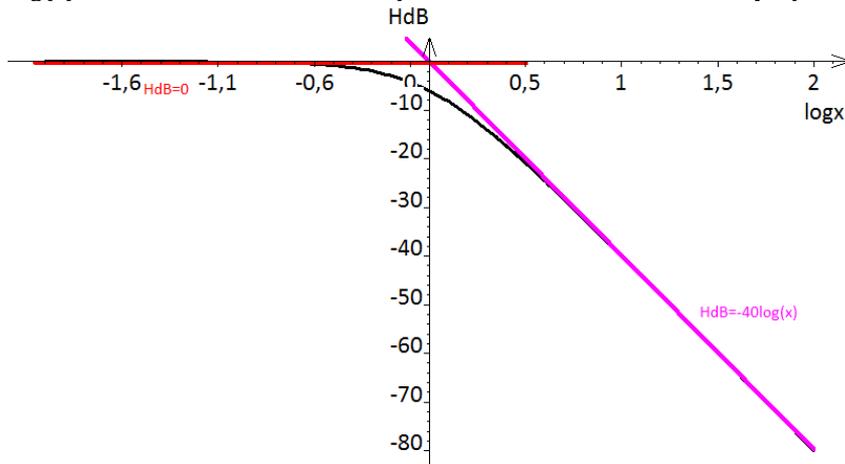
b) La résolution de  $H(\omega_c) = \frac{H_{max}}{\sqrt{2}}$  donne  $\omega_c = \omega_0\sqrt{\sqrt{2}-1}$ .

c) En option, le tracé du diagramme de Bode :

$H(x) = \frac{1}{1+x^2}$ .

Pour  $x \ll 1$ ,  $H(x) \approx 1$  donc  $H_{dB} \approx 0$  droite horizontale.

Pour  $x \gg 1$ ,  $H(x) \approx 1/x^2$  donc  $H_{dB} = 20\log(H(x)) \approx -40\log(x)$  droite de pente -40 passant par le point (0,0).  $H_{dB}$  en fonction de  $\log(x)$  donne sur un intervalle de quatre décades, avec les deux asymptotes :



**Exercice D.** Pour  $m \ll 1$ ,  $H_{max} = \frac{1}{2m} \gg 1$  et donc  $H_{dBmax} \approx -20\log(2m)$ .

**Exercice F.**

1)  $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$  après calcul.

2) La bande coupée (et non pas passante) sera l'intervalle de pulsations pour lequel  $H < H_{max}$ . Il faut donc calculer  $H_{max}$ . On calcule alors  $H = |H| = \frac{1}{\sqrt{1+f^2}} \leq 1 = H(0)$  donc  $H_{max}=1$ .

Les pulsations de coupure vérifient  $H = H_{max} / \sqrt{2}$  soit  $x$  solution de :

$$Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 1 \quad \text{relation } (\alpha)$$

Si on veut faire le calcul complet, la résolution fait apparaître deux polynômes de degré 2, qui ont quatre solutions réelles dont deux seulement sont positives et qu'on notera  $x_1$  et  $x_2$ .

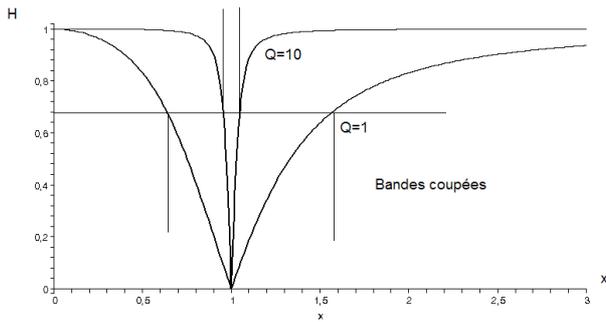
On calcule  $x_1 = \frac{-1+\sqrt{1+4Q^2}}{2Q}$  et  $x_2 = \frac{1+\sqrt{1+4Q^2}}{2Q}$

La bande coupée vaut  $\Delta x = x_2 - x_1 = 1/Q$ , soit encore  $\Delta\omega = \omega_0/Q$ .

Mais on peut être futé. Admettons qu'il y ait deux solutions réelles positives. Soit  $x_1$  une des solutions, alors  $x_2 = 1/x_1$  est aussi solution. La bande coupée est :

$$|x_1 - x_2| = |x_1 - 1/x_1| = 1/Q \text{ d'après la relation } (\alpha).$$

Si  $Q \ll 1$   $\Delta x \gg 1$  bande coupée large      Si  $Q \gg 1$   $\Delta x \gg 1$  bande coupée étroite  
 Pour une bonne filtration, il faut une bande coupée étroite, donc  $Q \gg 1$ .



3) 50Hz est la fréquence du secteur. Par effet d'antenne, on peut retrouver du 50Hz dans un signal. On s'efforce généralement de bien blinder l'alimentation. Voir GBF. Pour éliminer une composante 50Hz éventuelle, il suffit d'utiliser le filtre précédent avec la fréquence d'anti-résonance réglée à 50Hz.

Soit  $\omega_0 \approx 314 \text{ s}^{-1}$ . Avec les contraintes imposées, on calcule  $L \approx 150 \text{ H}$  (??) et  $C \approx 68 \text{ nF}$  (OK).

4)a)  $s(0^+) = E$  et  $(ds/dt)(0^+) = -RE/L = -\omega_0 E/Q$ .

Soit  $i$  le courant sortant du générateur. Pour les trois dipôles, je définis de façon évidente  $u_R$ ,  $u_L$  et  $u_C$  en convention récepteur.

On a les relations suivantes valables pour  $t > 0$  :

$$u_R = Ri \quad u_L = L \frac{di}{dt} \quad i = C \frac{du_C}{dt} \quad E = u_R + u_C + u_L = u_R + s \quad s = u_L + u_C$$

Continuité du courant dans la bobine :  $i(0) = 0$  donc  $u_R(0) = 0$

Continuité de la tension aux bornes de C :  $u_C(0) = 0$ .

Eq4 donne alors pour  $t = 0^+$ ,  $s(0^+) = u_L(0^+) = L \frac{di}{dt}(0^+) = E$

Dérivons eq4 par rapport au temps pour  $t > 0$  :  $0 = \dot{u}_R + \dot{s} = R \frac{di}{dt} + \dot{s}$  et on fait tendre  $t$  vers  $0^+$ .

b)  $\dot{s} + \frac{\omega_0}{Q} s + \omega_0^2 s = \omega_0^2 E$ .

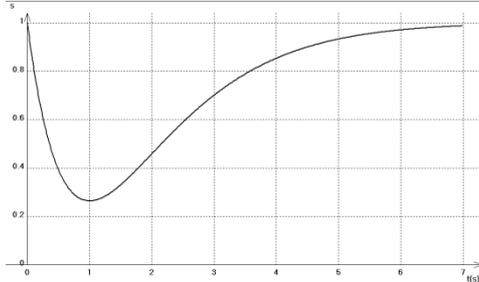
A partir de la fonction de transfert, il faut relier  $\underline{S}$  à  $\underline{E}$ , et multiplier le nombre de fois nécessaire par  $j\omega$  pour n'avoir ce terme qu'au numérateur. Multiplier une grandeur complexe par  $j\omega$  revient à dériver la grandeur réelle correspondante par rapport au temps.

c) La solution de l'équation précédente est la somme d'une solution particulière (ici  $E$  par exemple) et de la solution générale sans second membre. Le cas du régime critique correspond à  $Q = 1/2$ .

La solution s'écrit alors  $s(t) = E + (At + B) \exp(-\omega_0 t)$

Les CI donnent :  $B = 0$  et  $A = -2\omega_0 E$

d'où  $s(t) = E \cdot (1 - 2\omega_0 t) \exp(-\omega_0 t)$



exemple avec  $E = 1 \text{ V}$  et  $\omega_0 = 1 \text{ s}^{-1}$ .

Le filtre est un coupe bande donc laisse passer les HF (début du régime transitoire) et les BF (régime permanent).

**Exercice G.**

1)  $H(x) \leq 1 = H(0)$

Le gain maximal est 1 ; obtenu en BF.

On peut vérifier que  $\omega_0$  est la pulsation de coupure à -3dB.

2) Calculer tout simplement la norme du complexe. Aucun pb.

3) On fait le produit en croix et on obtient :

$$\underline{s} + 2(jx)\underline{s} + 2(jx)^2\underline{s} + (jx)^3\underline{s} = \underline{E}$$

On multiplie par  $\omega_0^3$  et on passe en réel , on obtient :

$$\ddot{s} + 2\omega_0\dot{s} + 2\omega_0^2s + \omega_0^3s = \omega_0^3e$$

On obtient une équation différentielle compatible avec le titre de l'exercice, ordre 3.

**Exercice H. Filtre coupe-bande.**Je mets la masse à 0. A partir de maintenant, les tensions par rapport à la masse sont aussi les potentiels électriques. Potentiel  $e$  à l'entrée,  $s$  à la sortie.Nœud A en haut entre les deux condensateurs : potentiel  $u$ .Nœud B en bas entre les deux résistances : potentiel  $v$ .

Je vais maintenant utiliser la LDN en termes de potentiel sur le nœud A, le nœud B et la sortie.

On peut utiliser le nœud de sortie car , pour le calcul d'une fonction de transfert, le quadripole est à vide donc le courant de sortie est nul. On ne peut pas utiliser le nœud à l'entrée car le courant d'entrée (non nul) peut juste être défini donc cela donnerait une équation supplémentaire avec une variable de plus. Sans intérêt sinon de calculer le courant d'entrée ;

Nœud A : 3 branches

$$jC\omega(\underline{e} - \underline{u}) + jC\omega(\underline{s} - \underline{u}) + \frac{2}{R}(0 - \underline{u}) = 0$$

En faisant apparaître X, on obtient :

$$jX(\underline{e} + \underline{s}) = (2 + 2jX)\underline{u} \quad (a)$$

Nœud B : 3 branches

$$\frac{1}{R}(\underline{e} - \underline{v}) + \frac{1}{R}(\underline{s} - \underline{v}) + j2C\omega(0 - \underline{v}) = 0$$

En faisant apparaître X, on obtient :

$$\underline{e} + \underline{s} = (2 + 2jX)\underline{v} \quad (b)$$

Sortie : 2 branches car le courant de sortie est nul.

$$\frac{1}{R}(v - s) + jC\omega(u - s) = 0$$

En faisant apparaître X, on obtient :

$$jX\underline{u} + \underline{v} = (1 + jX)\underline{s} \quad (c)$$

La relation (a) donne :

$$\underline{u} = \frac{jX}{(2 + 2jX)}(\underline{e} + \underline{s})$$

La relation (b) donne :

$$\underline{v} = \frac{1}{(2 + 2jX)}(\underline{e} + \underline{s})$$

Et on reporte dans la dernière relation :

$$jX \frac{jX}{(2 + 2jX)}(\underline{e} + \underline{s}) + \frac{1}{(2 + 2jX)}(\underline{e} + \underline{s}) = (1 + jX)\underline{s}$$

Soit encore :

$$(1 - X^2)(\underline{e} + \underline{s}) = 2(1 + jX)^2\underline{s}$$

$$(1 - X^2)\underline{e} = \{2(1 + jX)^2 - 1 + X^2\}\underline{s}$$

$$(1 - X^2)\underline{e} = \{1 - X^2 + 4jX\}\underline{s}$$

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{1 - X^2}{1 - X^2 + 4jX} = \frac{1}{1 + \frac{4jX}{1 - X^2}}$$

**Exercice I.**

0) On a  $\underline{E}=E$  et  $\underline{S}=S \exp(j\varphi)$ .

1)  $\omega_0=10^4 \text{ s}^{-1}$  et  $f_0 \approx 1600 \text{ Hz}$ . A cette pulsation,  $L\omega_0=1/(C\omega_0)=1000\Omega$ .

2) Les deux dipôles L et C sont en parallèles donc les admittances s'ajoutent. On calcule :

$$\underline{Y} = j(C\omega - \frac{1}{L\omega}) \text{ puis } \underline{Z} = \frac{jL\omega}{1-LC\omega^2}$$

On calcule alors que  $\underline{Y}(\omega_0)=0$  ce qui correspond à une impédance infinie, soit donc un interrupteur ouvert.

3) Par un PDT, on obtient :  $\underline{S} = \frac{\underline{Z}}{R+\underline{Z}} E = \frac{1}{1+R\underline{Y}} E$ . On obtient la formule proposée avec  $Q = R \sqrt{\frac{C}{L}} = 10^4$ .

On obtient alors :

$$\ddot{s}(t) + \frac{\omega_0}{Q} \dot{s}(t) + \omega_0^2 s(t) = \frac{\omega_0}{Q} \dot{e}(t)$$

4) Filtre passe-bande, compatible avec les modèles équivalents HF et BF de L et de C.  $\omega_0$  est la pulsation de résonance et  $\Delta f=f_0/Q \approx 0,16 \text{ Hz}$  est la bande passante à -3dB.

5)  $H(\omega_0)=1$ . On aura alors  $s(t)=e(t)$ .

6) On a  $\underline{S}=S.e^{j\varphi}=\underline{H}E$  donc  $S=|H|.E=HE$  et  $\varphi=\arg(\underline{S})=\arg(H)$

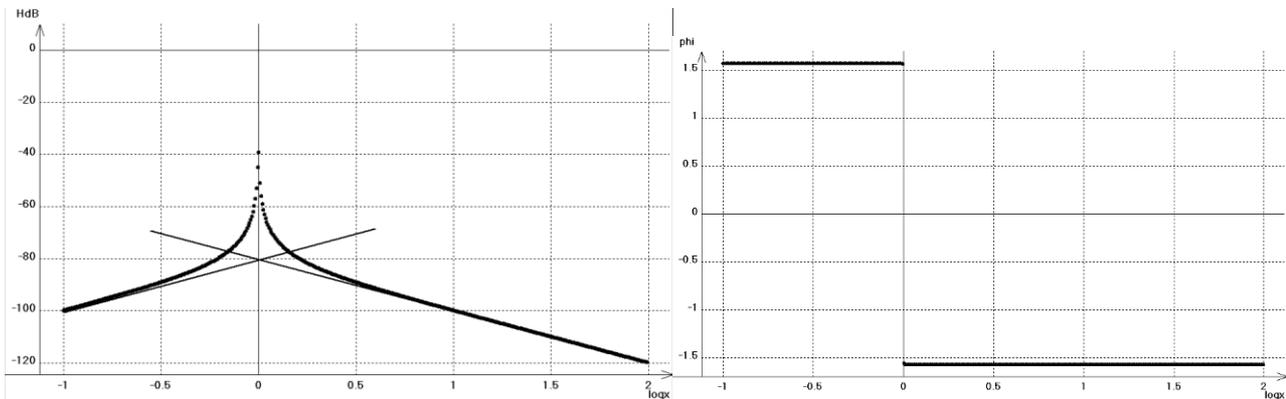
$$s(t)=HE.\cos(\omega t+\arg(H))$$

7) Avec une telle valeur de Q, on va avoir un comportement très violent au voisinage de la pulsation de résonance. On pose  $x=\omega/\omega_0$ .

En BF,  $x \ll 1$ ,  $H \approx jx/Q$  soit  $\varphi \approx +\pi/2$  et  $H_{dB} \approx 20\log(x/Q) = 20\log(x) - 80$

En HF,  $x \gg 1$ ,  $H \approx -j/(Qx)$  soit  $\varphi \approx -\pi/2$  et  $H_{dB} \approx -20\log(xQ) = -20\log(x) - 80$

On dessine le diagramme de Bode suivant



8) On a alors  $\underline{S}(\omega_0)=E$ , donc  $s(t)=e(t)$ , les deux signaux sont égaux donc en phase.

Méthode 1: On cherche la pulsation pour laquelle les deux signaux sont confondus.

Méthode 2 : en mode XY : e(t) sur la voie 1, s(t) sur la voie 2. A la pulsation  $\omega_0$ , l'ellipse se transforme en droite. Cette méthode est beaucoup plus précise.

9) On reprend la question 3 où on réécrit l'admittance  $\underline{Y}$  à la pulsation  $\omega_0$  :

$$\underline{Y} = \frac{1}{r+jL\omega_0} + jC\omega_0 = \frac{jrc\omega_0}{r+jL\omega_0} \approx \frac{rc}{L} \text{ car } r=5\Omega \ll L\omega_0=1000\Omega$$

On obtient alors le résultat demandé. On trouve alors  $H(\omega_0) \approx 0,2$  réel positif. Les signaux de sortie et d'entrée restent en phase. Pour la détection expérimentale de  $\omega_0$ , la méthode 2 marche encore, ce qui n'est pas le cas de la méthode 1.

D'autre part, on peut s'attendre à obtenir un facteur Q plus faible que le théorique, ce qui conduit à un filtre passe-bande moins sélectif.