I Primitives et intégration sur un segment

Exercice 1 **(Centrale PSI 2014)** *[Solution]*
Soit f continue sur $[0,1]$

1. On suppose que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$; montrer que f s'annule sur $]0,1[$.

2. On suppose $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$; montrer que f admet un point fixe.

Exercice 2 **(Mines-Ponts PSI 2018)** *[Solution]*
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+2k}\sqrt{\frac{k}{2n+k}}$; déterminer la limite de la suite (u_n).
On donne $\dfrac{4y^2}{(1-y^2)(1+3y^2)} = \dfrac{1}{1-y^2} - \dfrac{1}{1+3y^2}$
indication : c'est une somme de Riemann

Exercice 3 **(Mines-Télécom PSI 2018)** *[Solution]*
Pour $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = \displaystyle\int_0^x e^{nt^2}\,\mathrm{d}t - \int_x^1 e^{-nt^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f_n est dérivable sur $[0,1]$ et étudier ses variations.

2. Montrer qu'il existe un unique $c_n \in [0,1]$ tel que $\displaystyle\int_0^{c_n} e^{nt^2}\,\mathrm{d}t = \int_{c_n}^1 e^{-nt^2}\,\mathrm{d}t$.
Déterminer c_0.

3. Étudier la suite $(c_n)_{n\geqslant 0}$.
indication : étudier le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ et en déduire que (c_n) converge vers l. On peut ensuite remarquer que $\displaystyle\int_0^{c_n} e^{nt^2}\,\mathrm{d}t \geqslant c_n$ pour trouver $l = 0$.

Exercice 4 **(ENSAM PT 2007)** *[Solution]*
Montrer que $f : x \longmapsto \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t - \ln t}$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$; donner les variations de f.
Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_x^{2x} \left(\frac{1}{t-\ln t} - \frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t = 0$, en déduire que f admet une limite finie en $+\infty$ que l'on précisera.
Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 et dérivable à droite en 0. Donner l'allure du graphe de f.

Exercice 5 **(Mines-ponts PC 2006)** *[Solution]*
Montrer que $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$ est définie sur $]0,1[$. Donner ses limites en 0 et 1. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-t}{\ln t}\,\mathrm{d}t$.
questions subsidiaires : étudier f sur $\mathbb{R}^+$ (limite en $+\infty$, variations, $\mathrm{DL}_3(1)$)

Exercice 6 **(CCP PC 2014)** *[Solution]*
Définition, parité, variations et limites de $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\operatorname{ch} t}{t}\,\mathrm{d}t$; pour les limites, commencer par justifier que $\exists \alpha > 0, \forall t \in]0,\alpha[, \left|\dfrac{\operatorname{ch} t - 1}{t}\right| \leqslant t$.

Exercice 7 **(Centrale PC 2014)** *[Solution]*
Montrer que $t \mapsto \dfrac{1}{t^2} - \dfrac{1}{(\arctan t)^2}$ est intégrable sur $]0,1]$.
En déduire un équivalent de $\displaystyle\int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{(\arctan t)^2}$ quand x tend vers 0^+.

Exercice 8 **(CCP PSI 2015)** *[Solution]*
On pose $\phi(x) = \displaystyle\int_{1/x}^{x} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $\phi'(x)$.

2. Étudier la parité de ϕ et son signe sur $\mathbb{R}^{+*}$.

3. Montrer que ϕ admet une limite en $+\infty$.

4. Montrer que ϕ n'est pas prolongeable par continuité en 0.

Exercice 9 (Mines-Ponts PSI 2015) *[Solution]*
Soit $f(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Trouver un équivalent simple de f en 0.

2. Trouver un équivalent de $f - g$ en 0, où g est la fonction trouvée précédemment.

Exercice 10 (Mines-Ponts PSI 2022) *[Solution]*
Soit $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et préciser f'.

2. Déterminer des équivalents de f en 0 et $+\infty$.

3. Justifier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et calculer cette intégrale.

Exercice 11 (Centrale PSI 2010) *[Solution]*

1. Montrer que $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\left(e^{\sqrt{t}}-1\right)}$ est définie pour $x > 0$.

2. Montrer que $f(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{2}{\sqrt{x}}$.

3. Montrer que $f(x) = 2\displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}s}{s\left(e^s-1\right)}$ puis que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} 2\dfrac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$.

4. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty} t f'(t)\,\mathrm{d}t$

Exercice 12 (Mines-Télécom PSI 2018) *[Solution]*
On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \min\left(x, \frac{1}{\sqrt{t}}, \frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$.

1. Étudier l'existence de $f(x)$ et calculer $f(x)$.
indication : découper l'intégrale en 3 avec la relation de Chasles selon la valeur du minimum, en discutant suivant la valeur de x

2. Étudier la continuité et la dérivabilité de f.

Exercice 13 (Mines-Télécom PSI 2023) *[Solution]*
Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, on considère la propriété $(*)$: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \dfrac{1}{n}(f(x+n) - f(x))$

1. Soit f vérifiant $(*)$

a) En utilisant différentes valeurs de n, montrer que $f'(x) = f'(x+1)$

b) Montrer que $x \mapsto \displaystyle\int_x^{x+1} f'(t)\,\mathrm{d}t$ ne dépend pas de x puis que f' est constante

2. Trouver les fonctions qui vérifient $(*)$

II Endomorphismes et équations fonctionnelles

Exercice 14 *[Solution]*
Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{K})$. On pose, pour $f \in E$, $\|f\|_\infty = \displaystyle\sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$ et $\varphi(f)(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de E tel que $\|\varphi(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $\varphi^n(f)$ à l'aide d'une intégrale de f et en déduire une majoration de $\|\varphi^n(f)\|_\infty$ en fonction de $\|f\|_\infty$.
indication : justifier que $\varphi^n(f)$ est de classe $\mathcal{C}^n$ et calculer $\left(\varphi^n(f)\right)^{(k)}(0)$, pour $k \in [\![0, n]\!]$.

Exercice 15 (CCP PSI 2007) *[Solution]*
Montrer que u défini par $u(f)(x) = \displaystyle\int_0^x \cos(x-t) f(t)\,\mathrm{d}t$ est un endomorphisme de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Calculer $u(f)(0)$. Trouver les fonctions f telles que $u(f)$ soit constant.
question subsidiaire : résoudre $u(f) = \lambda f$.

Exercice 16 **(ENSAM PSI 2015)** *[Solution]*

On note $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on pose $T(f)(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t & \text{si } x > 0 \\ f(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1. Montrer que T est un endomorphisme de E.
2. Est-il injectif ? surjectif ?
3. Résoudre $T(f) = \lambda f$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 17 **(ENTPE-EIVP PSI 2015)** *[Solution]*

Soient g continue sur $[0, 1]$ et $G(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 |x - t|g(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que G est $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 1]$ et calculer G''.
2. Montrer qu'il existe a et b tels que $f : x \mapsto G(x) + ax + b$ vérifie $f'' = g$ et $f(0) = f(1) = 0$.
3. Existe-t-il d'autres solutions ?

Exercice 18 **(Centrale PSI 2018)** *[Solution]*
Soit $E = \{g \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{C}), f(0) = f(1) = 0\}$ et $F = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{C})$.

1. Montrer que ϕ, qui à f associe f'' est un isomorphisme de E sur F.
2. Montrer que $G(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 |x - t|g(t)\,\mathrm{d}t$, avec $g \in F$, est $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 1]$ et calculer G''.
3. Montrer qu'il existe $k : [0, 1]^2 \to \mathbb{C}$ telle que $\phi^{-1}(g)(x) = \displaystyle\int_0^1 k(x, t), g(t)\,\mathrm{d}t$ et en déduire une constante $C > 0$ telle que $\forall g \in F, \sup\limits_{[0,1]} |\phi^{-1}(g)| \leqslant C \sup\limits_{[0,1]} |g|$.

Exercice 19 **(Centrale PC 2014)** *[Solution]*

Trouver l'unique fonction f, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 2$ et $f'(x) + 5\displaystyle\int_0^x f(t)\cos(x - t)\,\mathrm{d}t = 10$.

Exercice 20 **(Mines-Ponts PSI 2019)** *[Solution]*

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+)$ telle que $\forall x \geqslant 0, x^2 f(x) = 2\displaystyle\int_0^x tf(x - t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et en déduire $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{+*})$
   indication : changement de variable
2. Montrer que f vérifie, sur $\mathbb{R}^{+*}$, une équation différentielle d'ordre 2
3. Trouver f

Exercice 21 **(CCP PC 2006)** *[Solution]*

Pour $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$, on pose $\phi(f)(x) = \displaystyle\int_0^1 \inf(x, t)f(t)\,\mathrm{d}t$. En utilisant la relation de Chasles, trouver une autre forme de $\phi(f)(x)$. Prouver que ϕ est un endomorphisme de $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. Trouver $\ker\phi$ et $\operatorname{Im}\phi$.
Prouver que $\phi(f)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et vérifie une équation différentielle de la forme $(\phi(f))'' = af$ avec $a < 0$.

Exercice 22 **(Centrale PSI 2015)** *[Solution]*
Soit a continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$. On note f une solution sur $\mathbb{R}^+$ de $(E) : y'' + (1 + a)y = 0$ et g définie par $g(x) = f(x) + \displaystyle\int_0^x \sin(x - t)a(t)f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. A-t-on $\lim\limits_{+\infty} a = 0$?
2. Montrer que $g + g'' = 0$.
3. Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que $|f(x)| \leqslant c + \displaystyle\int_0^x |a(t)f(t)|\,\mathrm{d}t$.
4. En déduire que les solutions de (E) sur $\mathbb{R}^+$ sont bornées.

Exercice 23 **(Centrale PSI 2019)** *[Solution]*
Soit $(E) : y'' + \varphi(t)y = 0$ où φ est continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

1. Résoudre (E) dans le cas où φ est constante.

2. Soient f et g continues sur $[a,+\infty[$, g positive, telle que $\forall t \in [a,+\infty[, f(t) \leqslant M + \displaystyle\int_a^t f(u)g(u)\,\mathrm{d}u$.

On pose $F(t) = M + \displaystyle\int_a^t f(u)g(u)\,\mathrm{d}u$ et $G(t) = \exp\left(\displaystyle\int_a^t g(u)\,\mathrm{d}u\right)$.

En calculant la dérivée de $\dfrac{F}{G}$, montrer que $\forall t \in [a,+\infty[, f(t) \leqslant M\exp\left(\displaystyle\int_a^t g(u)\,\mathrm{d}u\right)$.

3. On suppose que $t \mapsto t\varphi(t)$ est intégrable sur $[a,+\infty[$.

a) Soit y une solution de (E). Justifier qu'il existe une fonction affine A telle que $y(t) = A(t) - \displaystyle\int_a^t (t-u)y(u)\varphi(u)\,\mathrm{d}u$.

indication : poser $z(t) = -\displaystyle\int_a^t (t-u)y(u)\varphi(u)\,\mathrm{d}u$ *et calculer* z''.

b) En déduire que $t \mapsto \dfrac{y(t)}{t}$ est bornée sur $[a,+\infty[$ avec $a > 0$

III Intégrabilité et convergence d'intégrales

Exercice 24 *[Solution]*

Déterminer la nature des intégrales suivantes, avec $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$: $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{sh}\left(\sqrt{t}\right)\ln t}{\sqrt{t}-\sin t}\,\mathrm{d}t \quad ; \quad \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t^2-t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t \quad ; \quad \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t^\beta}\,\mathrm{d}t \quad ; \quad \int_1^{+\infty} \frac{(\ln t)^\alpha}{t^\beta - 1}\,\mathrm{d}t \quad ; \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}-\sin t}\,\mathrm{d}t$$

indication : pour la dernière, à l'aide d'une IPP, prouver qu'elle a la même nature que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos^2 t}{t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 25 (CCP PSI 2010) *[Solution]*

Limite en 0 de $tf(t)$ où $f(t) = \exp\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}} + \ln t \dfrac{\sin t}{t}\right)$. f est-elle intégrable sur $]0,1]$?

Exercice 26 (Mines-Télécom PSI 2019) *[Solution]*

Étudier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right)\,\mathrm{d}t$

Exercice 27 (ICNA PSI 2019) *[Solution]*

1. Pour quelle(s) valeur(s) de a et b, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\sqrt{t} + a\sqrt{t+1} + b\sqrt{t+2}\right)\,\mathrm{d}t$ converge-t-elle ?

2. Calculer cette intégrale quand elle converge.

Exercice 28 (Mines-Télécom PSI 2023) *[Solution]*

1. Trouver un équivalent en $+\infty$ de $\dfrac{1}{t} - \arctan\left(\dfrac{1}{t}\right)$.

2. Calculer $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} - \arctan\left(\frac{1}{t}\right)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 29 (CCP PSI 2018) *[Solution]*

1. Trouver $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\dfrac{1+X+X^2}{X(X+1)^2} = \dfrac{a}{X} + \dfrac{b}{X+1} + \dfrac{c}{(X+1)^2}$

2. Justifier l'existence de $I = \displaystyle\int_0^1 t\left\lfloor\frac{1}{t}\right\rfloor\,\mathrm{d}t$.

3. Calculer I, sachant que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 30 (Mines-Ponts PSI 2018) *[Solution]*

Étudier en fonction de $\alpha > 0$, la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(e^{\sin^2 t/t^\alpha} - 1\right)\,\mathrm{d}t$

Exercice 31 (CCP PSI 2010) *[Solution]*

Étudier l'intégrabilité sur $]0,1]$ de $x \mapsto |\ln x|^\alpha$.

Exercice 32 (CCP PSI 2018) *[Solution]*

Déterminer la nature des deux intégrales suivantes : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin t}}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t)\sin\left(\frac{1}{t}\right)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 33 **(Telecom SudParis PSI 2014)** *[Solution]*
Vérifier que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x - \ln(1-e^{-x})}{x} e^{-\alpha x}\,\mathrm{d}x$ existe pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 34 **(CCP PC 2010)** *[Solution]*
Convergence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$.

Exercice 35 **(IMT PSI 2019)** *[Solution]*
Justifier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(1 - t\arctan\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$ puis la calculer à l'aide du calcul de $\displaystyle\int_0^x t\arctan\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 36 **(Mines-Ponts PSI 2019)** *[Solution]*
Calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+ixy)}$ pour $y \in \mathbb{R}$.

Exercice 37 **(AADN MP 2010)** *[Solution]*
Nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1-\operatorname{th}^\alpha x)\,\mathrm{d}x$? $(\alpha \in \mathbb{R})$

Exercice 38 **(Centrale PSI 2010)** *[Solution]*
$\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} \ln\frac{1+x}{1-x}\,\mathrm{d}x$ est-elle convergente ?

Exercice 39 **(Mines-Ponts PC 2014)** *[Solution]*
Soient f continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et $a > 0$. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f\left(\left|x - \frac{a}{x}\right|\right)\mathrm{d}x$ existe.

Exercice 40 *[Solution]*
Etudier $\displaystyle\sum \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2|\cos t|}$ puis étudier l'intégrabilité sur $\mathbb{R}^+$ de $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2|\cos t|}$.
indication commencer par montrer que $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2|\cos t|} \leqslant \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1+n^2\pi^2|\sin t|}$.

Exercice 41 **(Mines-Télécom PSI 2022)** *[Solution]*

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+a^2\sin^2 x} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1+a^2\sin^2 x}$ et calculer cette intégrale (poser $u = \tan x$).
2. Montrer que le série de terme généreal $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3\sin^2 x}$ converge.
3. $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^3\sin^2 x}$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}^+$?

Exercice 42 *[Solution]*
En étudiant $\displaystyle\sum \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{t}{1+t^6\sin^2 t}\,\mathrm{d}t$, montrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{t}{1+t^6\sin^2 t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 43 **(CCINP PSI 2023)** *[Solution]*

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = \displaystyle\int_a^b f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.
   indication : IPP
2. Soit $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$.
   a) Montrer que I converge.
   b) Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $K_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin nx}{x}\,\mathrm{d}x$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} K_n = I$.
   c) On introduit $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin nx}{\sin x}\,\mathrm{d}x$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(J_n - K_n) = 0$.
   d) Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $J_{2p+1} = J_{2p-1}$.
   indication : $\sin(p) - \sin(q) =?$
   e) En déduire la valeur de I.

Exercice 44 **(Mines-Ponts PSI 2018)** *[Solution]*
Soient $u_n = \displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\sin^2(\pi n x)}{\tan(\pi x)}\,\mathrm{d}x$ et $v_n = \displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\sin^2(\pi n x)}{\pi x}\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u$ converge.

2. Montrer que $v_n \sim \dfrac{\ln n}{2\pi}$.
indication : $u = \pi n x$ puis $\sin^2 u = \dfrac{1}{2}(1-\cos(2u))$ et couper en 1.

3. Montrer que $\varphi : x \mapsto \dfrac{1}{\tan(\pi x)} - \dfrac{1}{\pi x}$ se prolonge en une fonction de $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ et en déduire un équivalent de u_n.
indication : IPP et utiliser φ' bornée sur $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$

Exercice 45 **(CCINP PSI 2023)** *[Solution]*

1. Justifier la convergence de $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t$

2. Soit $J = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t \cos t)\,\mathrm{d}t$; montrer $J = 2I$

3. Calculer I

Exercice 46 **(CCP PSI 2018)** *[Solution]*

1. Montrer que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ existe.

2. Montrer que $I = \dfrac{3}{4} \displaystyle\lim_{x\to 0} \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t$.
indication : commencer par $I = \displaystyle\lim_{x\to 0} \int_x^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ et linéariser $\sin^3 t$

3. Déterminer la valeur de I.
indication : introduire $\displaystyle\int_x^{3x} \frac{\mathrm{d}t}{t}$

Exercice 47 **(CCP PSI 2015)** *[Solution]*
Soit $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^5 x}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

1. Justifier l'existence de I.

2. Linéariser $\sin^5 x$.
En déduire deux constantes a et b telles que $\displaystyle\int_A^{+\infty} \frac{\sin^5 x}{x^2}\,\mathrm{d}x = a\int_A^{5A} \frac{\sin x}{x^2}\,\mathrm{d}x + b\int_A^{3A} \frac{\sin x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ pour tout $A > 0$.

3. Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que $\forall 0 < \alpha < \beta, \left|\displaystyle\int_\alpha^\beta \frac{\sin t - t}{t^2}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant M(\beta - \alpha)$.

4. Calculer I.

Exercice 48 **(Centrale PSI 2018)** *[Solution]*

1. Justifier l'existence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}\,\mathrm{d}t$

2. Soit $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$; montrer l'existence et calculer la valeur de $I_{\alpha,\beta} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(\alpha t) - \cos(\beta t)}{t}\,\mathrm{d}t$

Exercice 49 **(Mines-Ponts PSI 2015)** *[Solution]*
On pose $I_n = \displaystyle\int_0^\pi \ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right)\cos(nx)\,\mathrm{d}x$ et $J_n = \displaystyle\int_0^\pi \sin(nx)\frac{\cos(x/2)}{\sin(x/2)}\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que I_n et J_n existent pour $n \in \mathbb{N}$.

2. Trouver une relation entre I_n et J_n, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Trouver une relation entre J_n et J_{n+1}.

4. Calculer I_0 ; on montrera que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\cos t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t$.

5. Calculer I_n.

Exercice 50 *[Solution]*
Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 \mathrm{d}t$

Exercice 51 (Mines-Ponts PSI 2023) *[Solution]*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et T-périodique. Montrer qu'il existe un unique réel λ pour lequel l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)-\lambda}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente

1. dans le cas où $f = \sin$
2. dans le cas général
   indication : IPP en introduisant F une primitive de f et trouver λ tel que $F(t) - \lambda t = O(1)$

Exercice 52 (CCP PSI 2013) *[Solution]*
Pour $t > 0$, on pose $f(t) = \dfrac{1}{t+\cos(t)}$ et, pour $x > 0$, $g(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que g est prolongeable par continuité en 0.
2. Montrer que, pour $x > 0$, $\displaystyle\int_0^x g(t)^2\,\mathrm{d}t = 2\int_0^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t - xg(x)^2$.
3. En déduire que g^2 est intégrable sur $\mathbb{R}^2$. *indication : commencer par vérifier que f^2 est intégrable sur $\mathbb{R}^+$)*

Exercice 53 (Centrale PSI 2014) *[Solution]*
Soient $\alpha > -1$ et f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$, décroissante, telle que $t \mapsto t^\alpha f(t)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.
Montrer que $t \mapsto t^{\alpha+1} f'(t)$ et $t \mapsto t^\alpha f(t)$ sont intégrables sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{\alpha+1} f'(t)\,\mathrm{d}t = -(\alpha+1)\int_0^{+\infty} t^\alpha f(t)\,\mathrm{d}t$

Exercice 54 (Mines-Ponts PC 2014) *[Solution]*
Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[$ telle que f' soit de carré intégrable sur $[1, +\infty[$. Montrer que $t \mapsto \dfrac{f(t)}{t}$ est de carré intégrable sur $[1, +\infty[$.
indication : commencer par calculer la dérivée de $t \mapsto \dfrac{f(t)}{\sqrt{t}}$ en fonction de $f'(t)$ et de $\dfrac{f(t)}{t}$.

IV Autres

Exercice 55 (Mines-Ponts PSI 2023) *[Solution]*
On pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{\omega x}\,\mathrm{d}x$ avec $\omega = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

1. Justifier l'existence de I_n, la calculer et en déduire une fonction $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, non nulle, telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^k f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
   indication : utiliser $\omega^3 = 1$ et prendre la partie imaginaire d'une intégrale complexe.
2. Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_a^b t^k f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Montrer que $f = 0$; on pourra admettre $\forall \varepsilon > 0, \exists P \in \mathbb{R}[X], \forall x \in [a, b], |f(x) - P(x)| \leqslant \varepsilon$.
   indication : calculer $\displaystyle\int_a^b f(t)P(t)\,\mathrm{d}t$ puis $\displaystyle\int_a^b f(t)^2\,\mathrm{d}t$

Exercice 56 (ENTPE PSI 2015) *[Solution]*
Soit f continue sur $\mathbb{R}$ qui tend vers 0 en $\pm\infty$. Justifier la convergence et calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+1) - f(x-1)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 57 (Mines-Ponts PSI 2014) *[Solution]*
Déterminer le domaine de définition puis la limite en $+\infty$ de $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} e^{-xt}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 58 (Mines-Ponts PSI 2022) *[Solution]*
Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ et $\ell \in \mathbb{R}^{+*}$. On suppose que $f(x) \times \displaystyle\int_0^x f^2(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$.

1. Si f admet une limite en $+\infty$, que vaut-elle ?
2. Donner un exemple de f vérifiant la condition de l'énoncé ?
   indication : on peut en trouver un sous la forme $f(t) = (1+t)^\alpha$.

3. Déterminer un équivalent de $f(x)$ en $+\infty$.

indication : poser $g(x) = \displaystyle\int_0^x f^2(t)\,\mathrm{d}t$ *et traduire l'hypothèse avec la fonction* g *exclusivement ; montrer que si* h *est une fonction* $\mathcal{C}^1$ *telle que* $\displaystyle\lim_{+\infty} h'(x) = 0$ *alors* $\displaystyle\lim_{+\infty} \frac{1}{x} h(x) = 0$ *en utilisant la* ε*-définition de limite.*

Exercice 59 **(Centrale PSI 2011)** *[Solution]*

1. Montrer que $g : x \mapsto \sqrt{x^2 - 1}$ est une bijection $\mathcal{C}^1$ de $]1, +\infty[$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

2. Calculer $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2 - 1}}$ après avoir justifié son existence.

3. Pour $m \in \mathbb{N}^*$, justifier l'existence de $S_m = \displaystyle\sum_{n=m+1}^{+\infty} \frac{m}{n\sqrt{n^2 - m^2}}$ puis calculer la limite quand m tend vers $+\infty$.

indication : ça fait un peu penser à une somme de Riemann... sans en être vraiment une.

Solutions

Exercice 1 *[sujet]* **1.** Si f ne s'annule pas sur $]0,1[$, par continuité, elle garde un signe fixe ; si $f \geqslant 0$ sur $[a,b]$, et si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ alors, par continuité, on a $f = 0$; absurde !

2. Appliquer la première question à $x \mapsto f(x) - x$.

Exercice 2 *[sujet]* $u_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{1+2k/n}\sqrt{\dfrac{k/n}{2+k/n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ car $f : t \mapsto \dfrac{1}{1+2t}\sqrt{\dfrac{t}{2+t}}$ est continue sur $[0,1]$.

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \overset{u=\sqrt{\frac{t}{2+t}}}{=} \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{4u^2}{(1+3u^2)(1-u^2)}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+u}{1-u}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(u\sqrt{3}\right)\right]_0^{1/\sqrt{3}} = \dots$$

Exercice 3 *[sujet]* **1.** $t \mapsto e^{nt^2}$ et $t \mapsto e^{-nt^2}$ sont continue sur $[0,1]$ donc $f_n'(x) = e^{nx^2} + e^{-nx^2} > 0$

2. $f_n(0) < 0$ et $f_n(1) > 0$ donc f_n s'annule une seule fois. $f_0(x) = x - (1-x)$ donc $c_0 = \dfrac{1}{2}$.

3. $f_{n+1}(x) - f_n(x) = \int_0^x \left(e^{(n+1)t^2} - e^{nt^2}\right)\mathrm{d}t - \int_x^1 \left(e^{-(n+1)t^2} - e^{-nt^2}\right)\mathrm{d}t \geqslant 0$ donc $f_{n+1}(c_n) \geqslant 0$ et $c_{n+1} \leqslant c_n$. La suite (c_n) décroît donc CV vers l. On a $l \leqslant c_n \leqslant \int_0^{c_n} e^{nt^2}\,\mathrm{d}t = \int_{c_n}^1 e^{-nt^2}\,\mathrm{d}t \leqslant (1-c_n)e^{-nc_n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ si $l \neq 0$ ce qui est absurde donc $l = 0$

Exercice 4 *[sujet]* **1.** $g : t \mapsto \dfrac{1}{t - \ln t}$ est continue sur $[x, 2x]$ pour tout $x > 0$ (étudier une fonction pour vérifier que le dénominateur ne s'annule pas) donc $f(x)$ existe. Par Chasles, on a $f(x) = \int_1^{2x} g(t)\,\mathrm{d}t - \int_1^x g(t)\,\mathrm{d}t$; comme g est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $f'(x) = 2g(2x) - g(x) = \dfrac{\ln 2 - \ln x}{> 0}$.

2. $\int_x^{2x} g(t) - \dfrac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int_x^{2x} \dfrac{\ln t}{t(t-\ln t)}\,\mathrm{d}t$ donc, pour $x > 1$, $0 \leqslant \int_x^{2x} g(t) - \dfrac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \dfrac{\ln(2x)}{x(x-\ln x)}(2x - x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$; on a donc $f(x) \underset{+\infty}{=} \int_x^{2x} \dfrac{\mathrm{d}t}{t} + o(1) = \ln 2 + o(1)$

3. $\lim\limits_0 g = 0$ donc g est prolongeable par continuité en 0 et f devient $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 5 *[sujet]* **1.** $g : t \mapsto \dfrac{1}{\ln t}$ est continue sur $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ (prolongée par 0 en 0) ; si $x \in [0,1[$ alors $[x^2, x] \subset [0,1[$ et si $x > 1$ alors $[x, x^2] \subset]1, +\infty[$. On en déduit que f est définie et même $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$; comme $f(x) = \int_0^{x^2} g(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$, on a (sur $[0,1[$) $f'(x) = 2xg(x^2) - g(x) = \dfrac{x-1}{\ln x}$ (de même sur $]1,+\infty[$ en coupant en 2 par exemple). Pour la limite en 1, même idée que dans l'exercice précédent : $g(t) - \dfrac{1}{t-1} \xrightarrow[t\to1]{} \dfrac{1}{2}$ (DL) donc $\int_x^{x^2} g(t) - \dfrac{1}{t-1}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to1]{} 0$ (cette fonction est en fait $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$) ; on en déduit $f(x) \underset{1}{=} \int_x^{x^2} \dfrac{\mathrm{d}t}{t-1} + o(1) = \ln 2 + o(1)$. Comme f est $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ ($\lim\limits_0 f' = \lim\limits_1 f' = 0$), on a $\int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t = f(1) - f(0) = \ln 2$.

2. En 1 : $f'(1+u) \underset{u\to0}{=} \dfrac{1}{1 - \frac{1}{2}u + \frac{1}{3}u^2 + o(u^2)} = 1 + \dfrac{1}{2}u - \dfrac{1}{12}u^2 + o(u^2)$ donc $f(1+u) \underset{u\to0}{=} f(1) + u + \dfrac{1}{4}u^2 - \dfrac{1}{36}u^3 + o(u^3)$.

En $+\infty$: $f(x) \geqslant \dfrac{1}{\ln(x^2)}(x^2 - x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$

Exercice 6 *[sujet]* $g : t \mapsto \dfrac{\operatorname{ch} t}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$; si $x > 0$, $[x, 2x] \subset \mathbb{R}^{+*}$ et si $x < 0$, $[2x, x] \subset \mathbb{R}^{-*}$ donc f est définie sur $\mathbb{R}^*$. En posant $u = -t$, on prouve que f est paire. Comme, pour $x > 0$, $f(x) = \int_1^{2x} g(t)\,\mathrm{d}t - \int_1^x g(t)\,\mathrm{d}t$, f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $f'(x) = 2g(2x) - g(x) = \dfrac{\operatorname{ch}(2x) - \operatorname{ch}(x)}{x}$.

En 0 : $\lim\limits_0 \dfrac{\operatorname{ch} t - 1}{t^2} = \dfrac{1}{2}$ d'où l'existence de α ; pour $0 < x \leqslant \dfrac{\alpha}{2}$, on a $0 \leqslant f(x) - \int_x^{2x} \dfrac{\mathrm{d}t}{t} = f(x) - \ln 2 \leqslant \int_x^{2x} t\,\mathrm{d}t = \dfrac{3}{2}x^2 \xrightarrow[x\to0]{} 0$.

En $+\infty$: $f(x) \geqslant \dfrac{\operatorname{ch}(x)}{2x}(2x - x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

Exercice 7 *[sujet]* $\dfrac{1}{t^2}-\dfrac{1}{(\arctan t)^2}\xrightarrow[t\to 0]{}-\dfrac{2}{3}$
Donc $\displaystyle\int_x^1\frac{\mathrm{d}t}{(\arctan t)^2}\underset{x\to 0}{=}\int_x^1\frac{\mathrm{d}t}{t^2}+C+o(1)$ avec $\displaystyle C=\int_0^1\frac{1}{(\arctan t)^2}-\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$; on en déduit $\displaystyle\int_x^1\frac{\mathrm{d}t}{(\arctan t)^2}\underset{x\to 0}{\sim}\frac{1}{x}$.

Exercice 8 *[sujet]* **1.** $g : t\mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc ϕ est définie sur $\mathbb{R}^*$; comme $\displaystyle\phi(x)=\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^{1/x}g(t)\,\mathrm{d}t$, ϕ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et $\phi'(x)=g(x)+\dfrac{1}{x^2}g(1/x)$

2. En posant $u=-t$, on prouve que ϕ est impaire. $\phi\geqslant 0$ sur $[1,+\infty[$, $\phi\leqslant 0$ sur $]0,1]$.

3. $\displaystyle\lim_{+\infty}\phi=\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t=I$ car $t\mapsto e^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

4. Pour la même raison, $\displaystyle\lim_{0^+}\phi=-I$ et par imparité, $\displaystyle\lim_{0^-}\phi=I$; comme $I\neq 0$, ϕ n'a pas de limite en 0.

Exercice 9 *[sujet]* **1.** $\displaystyle f(x)-\int_1^x\frac{\mathrm{d}t}{t}=\int_1^x\frac{e^t-1}{t}\,\mathrm{d}t\xrightarrow[x\to 0]{}-\int_0^1\frac{e^t-1}{t}\,\mathrm{d}t$ (intégrable car $\underset{t\to 0}{\sim}1$) donc $\displaystyle f(x)\underset{x\to 0}{=}\int_1^x\frac{\mathrm{d}t}{t}+C+o(1)$ et $f(x)\underset{0}{\sim}\ln(x)$.

2. $\displaystyle f(x)-\ln(x)=\int_1^x\frac{e^t-1}{t}\,\mathrm{d}t\xrightarrow[x\to 0]{}\int_1^0\frac{e^t-1}{t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 10 *[sujet]* **1.** Si $x>0$ $t\mapsto\dfrac{e^{-t}}{t}$ est intégrable sur $[x,+\infty[$ (car $\underset{t\to+\infty}{=}o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$) donc $f(x)$ existe. Comme $\displaystyle f(x)=f(1)-\int_1^x\frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ et $t\mapsto\dfrac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $f'(x)=-\dfrac{e^{-x}}{x}$

2. En 0 : $\displaystyle f(x)-\int_x^1\frac{\mathrm{d}t}{t}=f(1)+\int_x^1\frac{e^{-t}-1}{t}\,\mathrm{d}t\xrightarrow[x\to 0]{}f(1)+\int_0^1\frac{e^{-t}-1}{t}\,\mathrm{d}t$ (intégrable car limite finie en 0) donc $\displaystyle f(x)\underset{x\to 0}{=}\int_x^1\frac{\mathrm{d}t}{t}+C+o(1)$ et $\displaystyle f(x)\underset{x\to 0}{\sim}\int_x^1\frac{\mathrm{d}t}{t}=-\ln(x)$

En $+\infty$: (IPP) $\displaystyle f(x)=\frac{e^{-x}}{x}-\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t$ puis $\displaystyle 0\leqslant\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{x^2}\int_x^{+\infty}e^{-t}\,\mathrm{d}t=\frac{e^{-x}}{x^2}$ donc $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t\underset{x\to+\infty}{=}o\left(\frac{e^{-x}}{x}\right)$ et $f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\dfrac{e^{-x}}{x}$

3. f est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ d'après les équivalents précédents puis par IPP $\displaystyle\int_0^{+\infty}f(t)=\Big[tf(t)\Big]_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}tf'(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}e^{-t}\,\mathrm{d}t=1$

Exercice 11 *[sujet]* **1.** Si $x>0$ $g : t\mapsto\dfrac{1}{t(e^{\sqrt{t}}-1)}$ est continue sur $[x,+\infty[$ et intégrable car $\underset{t\to+\infty}{=}o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donc $f(x)$ existe

2. $g(t)-\dfrac{1}{t\sqrt{t}}\underset{t\to 0}{\sim}-\dfrac{1}{2t}$ donc il existe α tel que sur $]0,\alpha]$, on ait $\left|g(t)-\dfrac{1}{t\sqrt{t}}\right|\leqslant\dfrac{1}{t}$. On a alors $\displaystyle f(x)=f(\alpha)+\int_x^\alpha g(t)-\frac{1}{t\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t+\int_x^\alpha\frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t}}$; puis $\displaystyle\int_x^\alpha\frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t}}=\left[\frac{2}{\sqrt{t}}\right]_x^\alpha\underset{x\to 0}{\sim}\frac{2}{\sqrt{x}}$ et $\displaystyle\left|\int_x^\alpha g(t)-\frac{1}{t\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_x^\alpha\frac{\mathrm{d}t}{t}=\Big[\ln t\Big]_x^\alpha\underset{x\to 0}{=}o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ d'où le résultat.

3. Poser $s=\sqrt{t}$ puis $\displaystyle f(x)=2\int_{\sqrt{x}}^{+\infty}\frac{e^{-s}}{s(1-e^{-s})}\,\mathrm{d}s$ et IPP $\displaystyle f(x)=-2\frac{\ln(1-e^{-\sqrt{x}})}{\sqrt{x}}+2\int_{\sqrt{x}}^{+\infty}\frac{\ln(1-e^{-s})}{s^2}\,\mathrm{d}s$. Ensuite, $\dfrac{\ln(1-e^{-\sqrt{x}})}{\sqrt{x}}\underset{x\to+\infty}{\sim}\dfrac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ et comme $\dfrac{\ln(1-e^{-s})}{s^2}\underset{s\to+\infty}{\sim}-\dfrac{e^{-s}}{s^2}$ il existe A tel que si $s>A$ on ait $\left|\dfrac{\ln(1-e^{-s})}{s^2}\right|\leqslant 2\dfrac{e^{-s}}{s^2}$; enfin pour $x>A$, on a $\displaystyle\left|\int_{\sqrt{x}}^{+\infty}\frac{\ln(1-e^{-s})}{s^2}\,\mathrm{d}s\right|\leqslant 2\int_x^{+\infty}\frac{e^{-s}}{s^2}\,\mathrm{d}s\leqslant\frac{1}{x}\int_{\sqrt{x}}^{+\infty}e^{-s}\,\mathrm{d}s=\frac{e^{-\sqrt{x}}}{x}\underset{x\to+\infty}{=}o\left(\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\right)$

4. Il suffit de prouver que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ pour terminer la justification de l'intégrabilité et faire une IPP : $\displaystyle f(x)=\int_1^x g(t)\,\mathrm{d}t+f(1)$ et g continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ permet de conclure.

Exercice 12 *[sujet]* **1.** Si $x<0$, $\min\left(x,\dfrac{1}{\sqrt{t}},\dfrac{1}{t^2}\right)=x$ donc l'intégrale DV, $f(0)=0$ et si $x>0$, $\min\left(x,\dfrac{1}{\sqrt{t}},\dfrac{1}{t^2}\right)\underset{t\to 0}{\sim}$

x et $\min\left(x, \frac{1}{\sqrt{t}}, \frac{1}{t^2}\right) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$ (sans oublier que la fonction est $\mathcal{CM}^0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$

Si $x \leqslant 1$ alors $f(x) = \int_0^{1/\sqrt{x}} x\,\mathrm{d}t + \int_{1/\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = 2\sqrt{x}$ et si $x > 1$, $f(x) = \int_0^{1/x^2} x\,\mathrm{d}t + \int_{1/x^2}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = 3 - \frac{1}{x}$.

2. f est continue en 1 et dérivable en 1 (et même $\mathcal{C}^1$)

Exercice 13 *[sujet]* **1.** a) $f'(x+1) = f(x+2) - f(x+1) = [f(x+2) - f(x)] - [f(x+1) - f(x)] = 2f'(x) - f'(x)$

b) $g(x) = \int_x^{x+1} f'(t)\,\mathrm{d}t$; f' est continue donc g est dérivable et $g'(x) = f'(x+1) - f'(x) = 0$; $g = \lambda$. De plus $g(x) = f(x+1) - f(x)$ donc $f'(x) = f(x+1) - f(x) = \lambda$

2. Récip toute fonction affine vérifie bien $(*)$

Exercice 14 *[sujet]* **1.** Linéarité évidente et comme f est continue, $\varphi(f)$ est $\mathcal{C}^1$ donc continue ; $|\varphi(f)(x)| \leqslant \|f\|_\infty$

2. On vérifie par récurrence sur n que $\varphi^n(f)$ est $\mathcal{C}^n$, que $(\varphi^n(f))^{(k)}(0) = 0$ si $k \leqslant n-1$ et $(\varphi^n(f))^{(n)} = f$. On applique ensuite la formule de Taylor avec reste intégral à $\varphi^n(f)$: $\varphi^n(f)(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\,\mathrm{d}t$ ce qui donne $|\varphi^n(f)(x)| \leqslant \|f\|_\infty \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} = \|f\|_\infty \frac{x^n}{n!} \leqslant \frac{\|f\|_\infty}{n!}$ donc $\|\varphi^n(f)\|_\infty \leqslant \frac{\|f\|_\infty}{n!}$

Exercice 15 *[sujet]* **1.** Linéarité facile, $u(f)(0) = 0$ et comme $u(f)(x) = \cos(x) \int_0^x f \times \cos + \sin(x) \int_0^x f \times \sin$, la continuité de f donne la classe $\mathcal{C}^1$ de $u(f)$.

2. Si $u(f) = k$ alors $k = u(f)(0) = 0$ et $u(f)' = 0$ et $u(f)'(x) = f(x) - \sin(x) \int_0^x f \times \cos + \cos(x) \int_0^x f \times \sin$ donc $f(0) = 0$ et $f(x) = \sin(x) \int_0^x f \times \cos - \cos(x) \int_0^x f \times \sin$ est $\mathcal{C}^1$ puis $f'(x) = \cos(x) \int_0^x f \times \cos - \sin(x) \int_0^x f \times \sin = u(f)(x) = 0$; reste $f = 0$.

3. Si $\lambda \neq 0$ alors $f = \frac{1}{\lambda} u(f)$ est $\mathcal{C}^1$ puis $f(0) = 0$ et $\lambda f'(x) = f(x) - \sin(x) \int_0^x f \times \cos + \cos(x) \int_0^x f \times \sin$ donc f est $\mathcal{C}^2$, $f'(0) = 0$ et $f''(x) = f'(x) - u(f)(x) = f'(x) - \lambda f(x)$; la seule solution avec $f(0) = f'(0) = 0$ est $f = 0$.

Exercice 16 *[sujet]* **1.** Linéarité facile ; comme $f(x) \underset{0}{=} f(0) + o(1)$, $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \underset{0}{=} 0 + f(0)x + o(x)$ et $\lim_0 T(f) = f(0)$ donc $T(f)$ est continue.

2. T est injectif : si $T(f) = 0$ alors $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ pour tout $x > 0$; en dérivant, on obtient $f = 0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc sur $\mathbb{R}^+$ par continuité.
T n'est pas surjectif : si $g = T(f)$ alors g est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ (car f est continue) donc toute fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ et non dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ n'a pas d'antécédent ($x \mapsto |x-1|$ par exemple)

3. Si $\lambda \neq 0$ et $x > 0$ alors $f = \frac{1}{\lambda} T(f)$ est $\mathcal{C}^1$ et $\lambda(xf'(x) + f(x)) = f(x)$, ce qui donne $f(x) = \frac{\alpha}{x^{1-1/\lambda}}$ pour $x > 0$. Si $\lambda < 0$ ou $\lambda > 1$ ces solutions ne se prolongent pas par continuité en 0 donc pas de solution autre que $f = 0$; si $\lambda = 1$ toutes les solutions constantes conviennent et si $\lambda \in]0,1[$, on a aussi $\lambda f(0) = f(0)$ donc $f(0) = 0$ puis $f = 0$.

Exercice 17 *[sujet]* **1.** $2G(x) = \int_0^x (x-t)g(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^1 (t-x)g(t)\,\mathrm{d}t = x \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x tg(t)\,\mathrm{d}t - \int_1^x tg(t)\,\mathrm{d}t + x \int_1^x g(t)\,\mathrm{d}t$ donc G est $\mathcal{C}^1$ (car g est continue) et $2G'(x) = \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^x g(t)\,\mathrm{d}t$; G' est $\mathcal{C}^1$ et $G'' = g$.

2. $f'' = g$ est toujours vrai et $f(0) = f(1) = 0$ donne un système linéaire fixant a et b.

3. Si h est une autre fonction telle que $h'' = g$ et $h(0) = h(1) = 0$ alors $h'' = g = f''$ donc $h(x) = f(x) + \alpha x + \beta x$ et $h(0) = f(0) = h(1) = f(1) = 0$ donne $a = b = 0$ donc solution unique.

Exercice 18 *[sujet]* **1.** Si $f'' = 0$ alors $f(x) = ax + b$ puis $f(0) = f(1) = 0$ donne $f = 0$ et ϕ est injective. Soit $f \in F$ et F telle que $F'' = f$ (existe car f est continue), on peut trouver (a, b) tel que si $G(x) = F(x) + ax + b$, on ait $G(0) = G(1) = 0$ (et on aura encore $G'' = f$) donc ϕ est surjective.

2. $2G(x) = \int_0^x (x-t)g(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^1 (t-x)g(t)\,\mathrm{d}t = x \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x tg(t)\,\mathrm{d}t - \int_1^x tg(t)\,\mathrm{d}t + x \int_1^x g(t)\,\mathrm{d}t$ donc G est $\mathcal{C}^1$ (car g est continue) et $2G'(x) = \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^x g(t)\,\mathrm{d}t$; G' est $\mathcal{C}^1$ et $G'' = g$.

3. On cherche (a,b) de sorte que $x \mapsto G(x)+ax+b$ s'annule en 0 et 1 et on trouve $\phi^{-1}(f)(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 |x-t| f(t)\,\mathrm{d}t - \dfrac{x}{2}\int_0^1 (1-2t)f(t)\,\mathrm{d}t - \dfrac{1}{2}\int_0^1 tf(t)\,\mathrm{d}t$ donc $k(x,t) = \dfrac{1}{2}(|x-t| - x(1-2t) - t)$. k est continue sur le fermé borné $[0,1]^2$ donc il suffit de prendre $C \geqslant \max\limits_{[0,1]^2} |k(x,t)| = \dfrac{1}{4}$ (la valeur de ce maximum se trouve par une étude de points critiques sur les domaines $x>t$ et $x<t$; il est atteint en $x=t=\dfrac{1}{2}$)

Exercice 19 *[sujet]* Si f est solution alors $f'(0)=10$ et $f'(x) = 10 - 5\cos(x)\displaystyle\int_0^x f\times\cos - 5\sin(x)\int_0^x f\times\sin$ est $\mathcal{C}^1$; on en déduit $f''(x) = 5f(x) + 5\sin(x)\displaystyle\int_0^x f\times\cos - 5\cos(x)\int_0^x f\times\sin$ qui est à nouveau $\mathcal{C}^1$. Enfin on trouve $f''(0) = 5f(0) = 10$ et $f'''(x) = 5f'(x) + 5\cos(x)\displaystyle\int_0^x f\times\cos + 5\sin(x)\int_0^x f\times\sin = 5f'(x) + 10 - f'(x)$. On en déduit f avec l'équation différentielle vérifiée par f' et les conditions initiales sur f, f' et f'' : $f(x) = \dfrac{35}{8}e^{2x} - \dfrac{15}{8}e^{-2x} - \dfrac{5}{2}x + 10$

Exercice 20 *[sujet]* **1.** Pour $x>0$, on a $f(x) \overset{u=x-t}{=} \dfrac{1}{x^2}\left(2x\displaystyle\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u - 2\int_0^x uf(u)\,\mathrm{d}u\right)$ donc f est $\mathcal{C}^1$ car f et $id\times f$ sont $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ puis $\mathcal{C}^\infty$ par récurrence

2. On trouve $x^2 f''(x) + 4xf'(x) = 0$

3. Sur $\mathbb{R}^{+*}$, on a $f(x) = \dfrac{\alpha}{x^3} + \beta$ et comme f est continue sur $\mathbb{R}^+$, on doit avoir $\alpha = 0$; réciproquement les fonctions constantes sont solutions

Exercice 21 *[sujet]* **1.** Linéarité facile ; $\phi(f)(x) = \displaystyle\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t + x\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ donc, comme f est continue, $\phi(f)$ est $\mathcal{C}^1$ donc continue.

ϕ est injectif : si $\phi(f)=0$ alors $\phi(f)'=0$ et $\phi(f)'(x) = \displaystyle\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ qui est $\mathcal{C}^1$ donc $f = -\phi(f)'' = 0$

Si $g=\phi(f)$ alors g est $\mathcal{C}^2$, $g(0)=0$ et $g'(1)=0$: $\operatorname{Im}\phi \subset \{g\in\mathcal{C}^2, g(0)=g'(1)=0\}$. Réciproquement avec g dans cet ensemble, on vérifie $g = -\phi(g'')$

2. $(\phi(f))'' = -f$.

Exercice 22 *[sujet]* **1.** Non (cf cours)

2. $g(x) = f(x) + \sin(x)\displaystyle\int_0^x af\times\cos - \cos(x)\int_0^x af\times\sin$ donc $g'(x) = f'(x) + \cos(x)\displaystyle\int_0^x af\times\cos + \sin(x)\int_0^x af\times\sin$ et $g''(x) = f''(x) + af(x) - \sin(x)\displaystyle\int_0^x af\times\cos + \cos(x)\int_0^x af\times\sin = -g(x)$

3. $g = \alpha\cos + \beta\sin$ est bornée ($|g|\leqslant c$) puis $|f(x)| \leqslant |g(x)| + \left|\displaystyle\int_0^x \sin(x-t)a(t)f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant c + \int 0^x |af|$

4. On pose $u(x) = c + \displaystyle\int_0^x |af|$; u est $\mathcal{C}^1$, strictement positive (car $c>0$) et vérifie $\dfrac{u'(x)}{u(x)} \leqslant |a(x)|$. On en déduit $u(x) \leqslant c\exp\displaystyle\int_0^x |a| \leqslant c\exp\int_0^{+\infty} |a|$ et avec $|f|\leqslant u$, on trouve f bornée.

Exercice 23 *[sujet]* **1.** Si $\varphi = -\alpha^2 < 0$ alors $y(t) = ae^{\alpha t} + be^{-\alpha t}$; si $\varphi = 0$ alors $y(t) = at+b$ et si $\varphi = \omega^2 > 0$ alors $y(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$.

2. fg et g sont continues donc F et G sont $\mathcal{C}^1$ et $\left(\dfrac{F}{G}\right)'(t) = \dfrac{g(t)(f(t)-F(t))}{G(t)} \leqslant 0$. On a donc $\dfrac{F(t)}{G(t)} \leqslant \dfrac{F(0)}{G(0)} = M$ ce qui donne le résultat en réutilisant $f(t)\leqslant F(t)$.

3. a) On a $z(t) = -t\displaystyle\int_a^t y(u)\varphi(u)\,\mathrm{d}u + \int_a^t uy(u)\varphi(u)\,\mathrm{d}u$ donc $z''(t) = -\varphi(t)y(t) = y''(t)$ et on a bien $z(t) = y(t) + \alpha t + \beta$

b) On a $\left|\dfrac{y(t)}{t}\right| \leqslant \dfrac{|\alpha t+\beta|}{t} + \displaystyle\int_a^t \left(1-\frac{u}{t}\right)|y(u)\varphi(u)|\,\mathrm{d}u$. Puis $\dfrac{|\alpha t+\beta|}{t} \leqslant |\alpha| + \dfrac{|\beta|}{a} = M$ sur $[a,+\infty[$ (car $a>0$) et $\displaystyle\int_a^t \left(1-\frac{u}{t}\right)|y(u)\varphi(u)|\,\mathrm{d}u \leqslant \int_a^t |y(u)\varphi(u)|\,\mathrm{d}u = \int_a^t \left|\frac{y(u)}{u}\right| \times u|\varphi(u)|\,\mathrm{d}u$. On peut donc appliquer **2**, ce qui donne $\left|\dfrac{y(t)}{t}\right| \leqslant M\exp\left(\displaystyle\int_a^t |u\varphi(u)|\,\mathrm{d}u\right) \leqslant M\exp\left(\int_a^{+\infty} u|\varphi(u)|\,\mathrm{d}u\right)$.

Exercice 24 *[sujet]* **1.** $\dfrac{\ln(1-t^2)}{(1+t)^2} \underset{1}{\sim} \dfrac{1}{4}\ln(1-t)$ et $\mathcal{CM}^0$ sur $[0,1[$ donc intégrable.

2. $\mathcal{CM}^0$ sur $]0,1]$ et $\underset{0}{\sim} \ln(t)$ donc intégrable.

3. $\mathcal{CM}^0$ sur $]1,+\infty[$, $\underset{1}{\sim} \dfrac{1}{4}\ln(t-1)$ et $\underset{+\infty}{\sim} 2\dfrac{\ln t}{t^2} = o\left(\dfrac{1}{t^{3/2}}\right)$ donc intégrable.

4. $\mathcal{CM}^0$ sur $]0,+\infty[$. La fonction est positive donc intégrable équivaut à intégrale CV. Si $\beta = 0$ par intégrable ; si $\beta > 0$, $\underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ et $\underset{0}{\sim} \dfrac{1}{t^{-\alpha}}$ donc intégrable si et seulement si $\alpha > -1$; si $\beta < 0$, $\underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{-\alpha}}$ et $\underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$ donc intégrable si et seulement si $\alpha < -1$

5. $\mathcal{CM}^0$ sur $]1,+\infty[$, $\underset{1}{\sim} \dfrac{1}{\beta}(t-1)^{\alpha-1}$ et $\underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{\beta}(\ln t)^{-\alpha}}$ (Bertrand) donc intégrable (ou CV car signe fixe) si et seulement si $\alpha > 0$ et $\beta > 1$.

6. $\mathcal{CM}^0$ sur $]0,+\infty[$ et par IPP (justifier !) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}-\sin t}\,\mathrm{d}t$ de même nature que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}-\cos t\right)}{(\sqrt{t}-\sin t)^2}\,\mathrm{d}t$ puis $\dfrac{\cos(t)\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)}{(\sqrt{t}-\sin t)^2} \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{t^{3/2}}\right)$ donc intégrable et $\dfrac{\cos^2(t)}{(\sqrt{t}-\sin t)^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\cos^2 t}{t}$ non intégrable (même preuve que $\dfrac{\sin t}{t}$)

Exercice 25 *[sujet]* $tf(t) = \exp\left[\dfrac{1}{\sqrt{t}}\left(1+\sqrt{t}\ln t\left(\dfrac{\sin t}{t}+1\right)\right)\right] \underset{t\to 0}{\longrightarrow} +\infty$ donc $\dfrac{1}{t} \underset{0}{=} o(f(t))$ donc non intégrable.

Exercice 26 *[sujet]* $\mathcal{CM}^0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, $\underset{t\to+\infty}{\sim} e^{-t}$ et $\underset{t\to 0}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}$ donc CV

Exercice 27 *[sujet]* **1.** $f(t) \underset{+\infty}{=} (1+a+b)\sqrt{t}+\dfrac{a+2b}{2\sqrt{t}}+O\left(\dfrac{1}{t^{3/2}}\right)$ donc l'intégrale CV si et seulement si $\begin{cases} a+b+1=0 \\ a+2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=1 \end{cases}$

2. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\sqrt{t}-2\sqrt{t+1}+\sqrt{t+2}\right)\mathrm{d}t = \left[\frac{2t\sqrt{t}}{3}-\frac{4}{3}(t+1)\sqrt{t+1}+\frac{2}{3}(t+2)\sqrt{t+2}\right]_0^{+\infty} = \frac{4}{3}(\sqrt{2}-1)$ car $\dfrac{2t\sqrt{t}}{3}-\dfrac{4}{3}(t+1)\sqrt{t+1}+\dfrac{2}{3}(t+2)\sqrt{t+2} \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$.

Exercice 28 *[sujet]* **1.** $\dfrac{1}{t} - \arctan\left(\dfrac{1}{t}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{3t^3}$

2. La fonction est intégrable par l'équivalent précédent et $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{t}-\arctan\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t \overset{\text{IPP}}{=} \frac{\pi}{4}-1+\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{t}-\frac{t}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}-1+\frac{1}{2}\ln 2$

Exercice 29 *[sujet]* **1.** $\dfrac{1+X+X^2}{X(X+1)^2} = \dfrac{1}{X} - \dfrac{1}{(1+X)^2}$

2. $t \mapsto t\left\lfloor\dfrac{1}{t}\right\rfloor$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $]0,1]$ et $0 \leqslant t\left\lfloor\dfrac{1}{t}\right\rfloor \leqslant 1$ donc intégrable sur $]0,1]$

3. $\displaystyle I = \sum_{k\geqslant 1}\int_{1/k+1}^{1/k} kt\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k}-\frac{k}{(k+1)^2} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{6}-1\right)$

Exercice 30 *[sujet]* $f : t \mapsto e^{\sin^2 t/t^{\alpha}} - 1$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, comme $\alpha > 0$ $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\sin^2 t}{t^{\alpha}} = O\left(\dfrac{1}{t^{\alpha}}\right)$ donc f est intégrable sur $[1,+\infty[$ si $\alpha > 1$. Pour $\alpha = 1$, on vérifie que $t \mapsto \dfrac{\sin^2}{t}$ n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$ car $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin^2 t}{t}\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{\pi}{2(n+1)\pi}$ puis $\dfrac{\sin^2 t}{t} \underset{+\infty}{=} o(f(t))$ pour $\alpha < 1$.
Si $\alpha \leqslant 2$, f admet une limite finie en 0 alors que si $\alpha > 2$, $\dfrac{1}{t} \underset{0}{=} o(f(t))$ donc f n'est pas intégrable sur $]0,1]$.
En conclusion, f est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ (donc l'intégrale CV car $f \geqslant 0$) si et seulement si $\alpha \in]1,2]$.

Exercice 31 *[sujet]* $\mathcal{CM}^0$ sur $]0,1]$ si $\alpha > 0$ et $\underset{0}{=} 0\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$ donc intégrable sur $]0,1]$.

Exercice 32 *[sujet]* $\dfrac{e^{\sin t}}{t} \geqslant \dfrac{e^{-1}}{t}$ donc l'intégrale DV. Pour la seconde : $t \mapsto \sin(t)\sin\left(\dfrac{1}{t}\right)$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, $\lim\limits_{t\to 0}\sin(t)\sin\left(\dfrac{1}{t}\right) = 0$ donc intégrable sur $]0,1]$; $\sin(t)\left[\sin\left(\dfrac{1}{t}\right) - \dfrac{1}{t}\right] \underset{t\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{t^3}\right)$ donc $\displaystyle\int_1^{+\infty}\sin(t)\sin\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ sont de même nature donc CV (cf cours)

Exercice 33 *[sujet]* $\mathcal{CM}^0$ sur $]0,+\infty[$, $\underset{0}{1}$ et $\underset{+\infty}{=} o(e^{-\alpha x})$ donc intégrable si $\alpha > 0$

Exercice 34 *[sujet]* $\mathcal{CM}^0$ sur $]0,+\infty[$, $\underset{0}{\sim} -2\ln t$ et $\underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$ donc intégrable. Par IPP (justifier !) $I = 2\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \pi$

Exercice 35 *[sujet]* $\lim\limits_0 f = 1$ et $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{3t^2}$ donc f est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.
Par IPP, $\displaystyle\int_0^x t\arctan\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2}\arctan\frac{1}{x} + \frac{1}{2}(x - \arctan x)$ donc $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(x + \arctan x) - \frac{x^2}{2}\arctan\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{\pi}{4}$ car $x^2\arctan\dfrac{1}{x} \underset{+\infty}{=} x + o(1)$.

Exercice 36 *[sujet]* $\dfrac{1}{(1+x^2)(1+ixy)} \underset{x\to\pm\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ puis $I(y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(1-ixy)}{(1+x^2)(1+x^2y^2)} = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^2y^2)}$ (la partie imaginaire intégrée est impaire). On vérifie ensuite $I(y) = I(-y)$ en posant $t = -x$ et si $y \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, $I(y) = \dfrac{1}{1-y^2}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{y^2}{1+x^2y^2}\right)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{1+y}$. On termine, soit en calculant directement $I(1)$, soit en vérifiant la continuité de I sur $\mathbb{R}^+$ par $\left|\dfrac{1}{(1+x^2)(1+ixy)}\right| = \dfrac{1}{(1+x^2)(1+x^2y^2)} \leqslant \dfrac{1}{1+x^2}$. En conclusion $I(y) = \dfrac{\pi}{1+|y|}$

Exercice 37 *[sujet]* $\mathcal{CM}^0$ sur $]0,+\infty[$; si $\alpha = 0$ c'est nul, si $\alpha > 0 \xrightarrow[x\to 0]{} 1$ et si $\alpha < 0 \underset{0}{\sim} -\dfrac{1}{x^{-\alpha}}$; de l'autre côté, $\underset{+\infty}{\sim} 2\alpha e^{-2x}$ donc intégrable si et seulement si $\alpha > -1$.

Exercice 38 *[sujet]* $\mathcal{CM}^0$ sur $[0,1[$ et $\underset{1}{\sim} \dfrac{-\ln(1-x)}{\sqrt{2(1-x)}} = o\left(\dfrac{1}{(1-x)^{3/4}}\right)$ donc intégrable.

Exercice 39 *[sujet]* On a $x - \dfrac{a}{x} > 0 \Leftrightarrow x > \sqrt{a}$ donc on transforme $\displaystyle\int_{\sqrt{a}}^{+\infty} f\left(\left|x - \frac{a}{x}\right|\right)\mathrm{d}x$ en posant $u = x - \dfrac{a}{x} \Leftrightarrow u = \dfrac{u+\sqrt{u^2+4a}}{2}$: $u \mapsto \dfrac{u+\sqrt{u^2+4a}}{2}$ est $\mathcal{C}^1$, strictement croissante et bijective de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $]\sqrt{a},+\infty[$ donc (CV équivalentes) $\displaystyle\int_{\sqrt{a}}^{+\infty} f\left(\left|x - \frac{a}{x}\right|\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} f(u)\left(1 + \frac{u}{\sqrt{u^2+4a}}\right)$ qui CV puisque $\left|f(u)\left(1 + \dfrac{u}{\sqrt{u^2+4a}}\right)\right| \leqslant 2|f(u)|$.
En posant $u = \dfrac{a}{x} - x$ sur $]0,\sqrt{a}[$, on finit par $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(u)\,\mathrm{d}u$.

Exercice 40 *[sujet]*

1. On pose (justifier !) $t = n\pi + \dfrac{\pi}{2} + x$: $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2|\cos t|} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{1+(n\pi+\frac{\pi}{2}+x)^2|\sin x|} \leqslant \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{1+(n\pi)^2|\sin x|}$. Sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\sin x \geqslant \dfrac{2}{\pi}x$ donc $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{1+(n\pi)^2|\sin x|} = 2\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{1+(n\pi)^2\sin x} \leqslant \int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{1+2n^2\pi x} = \frac{\ln(1+n^2\pi^2)}{2n^2\pi} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ donc la série est AC.
2. La fonction est $\mathcal{CM}^0$ et positive sur $[0,+\infty]$ donc si $x > 0$, il existe N tel que $(N+1)\pi \geqslant x$ puis $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=0}^{N}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)\,\mathrm{d}t$; la fonction est positive, les « intégrales partielles » sont majorées donc f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 41 *[sujet]*

1. Poser (justifier !) $t = \pi - x$ sur la partie $x \in \left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$ puis on trouve $I = \dfrac{\pi}{\sqrt{1+a^2}}$
2. On pose $x = n\pi + u$ puis en utilisant $n\pi + u \geqslant n\pi$, on obtient $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{\pi}{\sqrt{1+(n\pi)^3}}$ (avec $a = (n\pi)^{3/2}$) ; on en déduit $u_n = O\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$ donc $\sum u_n$ est AC
3. On prouve l'intégrabilité comme dans l'exercice précédent puisque la fonction est à nouveau positive.

Exercice 42 *[sujet]* On pose $t = n\pi + u$ (justifier !) $u_n = \displaystyle\int_0^\pi \frac{n\pi + u}{1 + (n\pi + u)^6 \sin^2 u}\,\mathrm{d}u \leqslant \int_0^\pi \frac{(n+1)\pi}{1 + (n\pi)^6 \sin^2 u}\,\mathrm{d}u = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ (même calcul que dans l'exercice précédent) ; on conclut à l'intégrabilité de la même façon puisque la fonction est positive.

Exercice 43 *[sujet]* **1.** $|I_n| \overset{\text{IPP}}{=} \left|\left[f(t)\dfrac{-\cos(nt)}{n}\right]_a^b + \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_a^b f'(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \dfrac{1}{n}\left(|f(a)| + |f(b)| + \displaystyle\int_0^b |f'(t)|\,\mathrm{d}t\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

2. a) fait en cours

b) $x \mapsto \dfrac{\sin nx}{x}$ est prolongeable par continuité en 0 donc K_n existe et $K_n \overset{u=nt}{=} \displaystyle\int_0^{n\pi/2} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u \xrightarrow[n\to+\infty]{} I$

c) On vérifie que $h(t) = \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{\sin t}$ se prolonge en une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ (faire des DL de h et h' pour vérifier la continuité puis la classe $\mathcal{C}^1$) ; on a alors $J_n - K_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} h(t)\sin nt\,\mathrm{d}t$ puis on utilise Q1.

d) $\sin(2n+3)t - \sin(2n+1)t = 2\sin t\cos(n+1)t$ donne $J_{2n+3} = J_{2n+1}$ donc $J_{2n+1} = J_1 = \dfrac{\pi}{2}$

e) On en déduit que (K_n) tend vers $\dfrac{\pi}{2}$ et $I = \dfrac{\pi}{2}$

Exercice 44 *[sujet]* **1.** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u = \sin(1) + \int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u^2}\,\mathrm{d}u$ et $\left|\dfrac{\sin u}{u^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{u^2}$.

2. v_n existe car $\sin^2 u \underset{0}{\sim} u^2$. $v_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1 - \cos 2u}{2\pi u}\,\mathrm{d}u + \int_1^{n\pi/2} \frac{\mathrm{d}u}{2\pi u} - \int_1^{n\pi/2} \frac{\cos 2u}{2\pi u}\,\mathrm{d}u$; tous les termes ont une limite finie quand $n \to +\infty$ à part $\displaystyle\int_1^{n\pi/2} \frac{\mathrm{d}u}{2\pi u} \sim \frac{\ln n}{2\pi}$

3. Par DL, $\varphi(0) = 0$ puis vérifier la classe $\mathcal{C}^1$ de φ par un DL de φ' en 0.
u_n existe car $\dfrac{\sin^2 u}{\tan u} \underset{0}{\sim} u$ et $\left|\dfrac{\sin^2 \pi nx}{\tan \pi x}\right| \leqslant \dfrac{1}{\tan \pi x} \xrightarrow[x\to 1/2^-]{} 0$. On a $u_n - v_n = \displaystyle\int_0^{1/2} \varphi(x)\frac{1 - \cos(2\pi nx)}{2}\,\mathrm{d}x \overset{\text{IPP}}{=} \frac{1}{2}\int_0^{1/2} \varphi(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{4n\pi}\int_0^{1/2} \varphi'(x)\sin(2\pi nx)\,\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{=} O(1)$ car $\left|\displaystyle\int_0^{1/2} \varphi'(x)\sin(2\pi nx)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^{1/2} |\varphi'(x)|\,\mathrm{d}x$. On en déduit $u_n \sim v_n \sim \dfrac{\ln n}{2\pi}$.

Exercice 45 *[sujet]* **1.** $\ln(\sin t) \underset{0}{=} \ln(t) + \ln(1 + o(1)) \sim \ln t$

2. En posant $u = \dfrac{\pi}{2} - t$, on vérifie $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\cos t)\,\mathrm{d}t$ donc $J = 2I$

3. $J = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{\sin 2t}{2}\right)\,\mathrm{d}t \overset{u=2t}{=} -\frac{\pi}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\int_0^\pi \ln(\sin u)\,\mathrm{d}u$ puis $\displaystyle\int_{\pi/2}^\pi \ln(\sin u)\,\mathrm{d}u \overset{t=\pi-u}{=} I$ donc au final on trouve $I = -\dfrac{\pi}{2}\ln 2$

Exercice 46 *[sujet]* **1.** $t \mapsto \dfrac{\sin^3 t}{t^2}$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, tend vers 0 en 0 et $O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ en $+\infty$

2. $\sin^3 t = \dfrac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)$ donc (les intégrales CV) $I = \displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{3}{4}\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{4}\int_x^{+\infty} \frac{\sin 3t}{t^2}\,\mathrm{d}t\right)$ puis poser $u = 3t$ dans la seconde (et relation de Chasles)

3. $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t^2} - \dfrac{1}{t}$ est prolongeable par continuité en 0 donc $\displaystyle\lim_{x\to 0}\int_x^{3x} \left(\frac{\sin t}{t^2} - \frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t = 0$ et $I = \dfrac{3}{4}\displaystyle\lim_{x\to 0}\int_x^{3x} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \frac{3}{4}\ln 3$

Exercice 47 *[sujet]* **1.** $\mathcal{CM}^0$ sur $]0, +\infty[$, $\xrightarrow[x\to 0]{} 0$ et $\underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

2. $\sin^5 x = \dfrac{1}{16}(\sin 5x - 5\sin 3x + 10\sin x)$; après chgts de variables $u = 5x$ et $u = 3x$, on trouve $a = -\dfrac{5}{16}$ et $b = \dfrac{15}{16}$

3. $t \mapsto \dfrac{\sin t - t}{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et tend vers 0 en 0 et $+\infty$ donc est bornée (à savoir prouver !)

4. On en déduit $\displaystyle\lim_{A\to 0}\int_A^{5A} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \lim_{A\to 0}\int_A^{5A} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln(5)$ puis $I = -\dfrac{5}{16}\ln 3 + \dfrac{15}{16}\ln 5$

Exercice 48 *[sujet]* **1.** Par IPP (à justifier), $\int_1^{+\infty}\frac{\cos(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\int_1^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ sont de même nature et $\left|\frac{\sin(t)}{t}\right|\leqslant\frac{1}{t^2}$, donc intégrable sur $[1,+\infty[$

2. $\frac{\cos(\alpha t)-\cos(\beta t)}{t}\xrightarrow[t\to 0]{}0$ donc int sur $]0,1]$; l'intégrale sur $[1,+\infty[$ existe aussi par IPP (cf Q1). On vérifie, pour $x>0$, $\int_x^{+\infty}\frac{\cos(\alpha t)-\cos(\beta t)}{t}\,\mathrm{d}t \underset{v=\beta t}{\overset{u=\alpha t}{=}} \int_{\alpha x}^{+\infty}\frac{\cos(u)}{u}\,\mathrm{d}u-\int_{\beta x}^{+\infty}\frac{\cos(v)}{v}\,\mathrm{d}v=\int_{\alpha x}^{\beta x}\frac{\cos(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ puis comme $t\mapsto\frac{\cos(t)-1}{t}$ se prolonge par continuité en 0, on a $\lim_{x\to 0}\int_{\alpha x}^{\beta x}\frac{\cos(t)-1}{t}\,\mathrm{d}t=0$, ce qui donne $I_{\alpha,\beta}=\lim_{x\to 0}\int_{\alpha x}^{\beta x}\frac{\mathrm{d}t}{t}=\ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$

Exercice 49 *[sujet]* **1.** Pour I_n : $\mathcal{CM}^0$ sur $]0,\pi]$ et $\underset{0}{\sim}\ln x$ donc intégrable. Pour J_n : $\mathcal{CM}^0$ sur $]0,\pi]$ et $\xrightarrow[x\to 0]{}2n$ donc intégrable

2. IPP (justifier !) $I_n=-\frac{1}{2n}J_n$

3. $J_{n+1}=J_n$ si $n\geqslant 1$

4. fait en cours

5. Si $n\geqslant 1$ $I_n=-\frac{1}{2n}J_1=-\frac{\pi}{n}$

Exercice 50 *[sujet]* $t\mapsto\frac{\sin^2 t}{t^2}$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $]0,+\infty[$, $\xrightarrow[x\to 0]{}1$ et $\underset{+\infty}{=}O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ donc intégrable ; égalité et CV de la première intégrale : IPP (justifier !)

Exercice 51 *[sujet]* **1.** $\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ CV (cf cours) donc $\int_1^{+\infty}\frac{\sin(t)-\lambda}{t}\,dt$ CV si et seulement si $\int_1^{+\infty}\frac{\lambda}{t}\,\mathrm{d}t$ CV, ce qui n'arrive que pour $\lambda=0$.

2. On pose $F(x)=\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u$; il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $nT\leqslant x<(n+1)T$ (c'est $n=\left\lfloor\frac{x}{T}\right\rfloor$) et on a $F(x)=n\int_0^T f(u)\,\mathrm{d}u+\int_{nT}^x f(u)\,\mathrm{d}u$; comme f est continue et T-périodique, elle est bornée (et atteint ses bornes) sur le segment $[0,T]$ puis sur $\mathbb{R}$. On a donc $\left|\int_{nT}^x f(u)\,\mathrm{d}u\right|\leqslant T\|f\|_\infty$ (bornée) et donc avec $\lambda=\frac{1}{T}\int_0^T f(u)\,\mathrm{d}u$ (valeur moyenne de f), on a $F(x)=\lambda x+O(1)$. On fait alors une IPP avec $u'(t)=f(t)-\lambda$ et $v(t)=\frac{1}{t}$: on a $u(t)v(t)=\frac{F(t)-\lambda t}{t}\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$ donc $\int_1^{+\infty}\frac{f(t)-\lambda}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\int_1^{+\infty}\frac{F(t)-\lambda t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ sont de même nature et la seconde converge car $\frac{F(t)-\lambda t}{t^2}=O\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

Reste l'unicité : si l'intégrale CV aussi pour un $\mu\in\mathbb{R}$, par linéarité, $\int_1^{+\infty}\frac{\mu-\lambda}{t}\,\mathrm{d}t$ est CV donc $\lambda-\mu=0$.

Exercice 52 *[sujet]* **1.** $f(t)\underset{0}{=}1+o(1)$ donc $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\underset{0}{=}0+x+o(x)$ et $\lim_0 g=1$.

2. Avec $F(x)=\int_0^x ft)\,\mathrm{d}t=xg(x)$, (IPP) $\int_0^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t=\Big[F(t)g(t)\Big]_0^x-\int_0^x F(t)g'(t)\,\mathrm{d}t=xg(x)^2-\int_0^x tg(t)\left(-\frac{1}{t}g(t)+\frac{f(t)}{t}\right)$ c
et regrouper

3. f^2 est $\mathcal{CM}^0$ sur $[0,+\infty[$ et $\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{t^2}$ donc intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Puis $xg(x)^2\geqslant 0$ donc (Cauchy-Schwarz) $\int_0^x g(t)^2\,\mathrm{d}t\leqslant 2\left(\int_0^x f(t)^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}\left(\int_0^x g(t)^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}$ et en divisant $\int_0^x g(t)^2\,\mathrm{d}t\leqslant 4\int_0^x f(t)^2\,\mathrm{d}t$ (même si $g^2=0$) puis $\int_0^x g(t)^2\,\mathrm{d}t\leqslant 4\int_0^{+\infty} f(t)^2\,\mathrm{d}t$; « intégrales partielles » d'une fonction positive majorées donc intégrable.

Exercice 53 *[sujet]* Les deux fonction sont $\mathcal{CM}^0$ sur $]0,+\infty[$, $t^{\alpha+1}f'(t)\xrightarrow[t\to 0]{}0$ car $\alpha+1>0$ et $t^\alpha f(t)\underset{0}{=}O\left(\frac{1}{t^{-\alpha}}\right)$ intégrable sur $]0,1]$ car $-\alpha<1$. Par IPP $x^{\alpha+1}f(x)=\int_0^x t^{\alpha+1}f'(t)\,\mathrm{d}t+(\alpha+1)\int_0^x t^\alpha f(t)\,\mathrm{d}t$; Par hypothèse, $\int_0^{+\infty}t^\alpha f(t)\,\mathrm{d}t$ CV et par négativité de f', $\int_0^x t^{\alpha+1}f'(t)\,dt$ a une limite dans $\mathbb{R}^-\cup\{-\infty\}$ donc $x^{\alpha+1}f(x)$ a une limite dans $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$. Si la limite est non nulle, on a $\frac{1}{t}\underset{+\infty}{=}O(t^\alpha f(t))$ ce qui contredit l'intégrabilité de $t\mapsto t^\alpha f(t)$. La limite est nulle donc on a l'égalité, la CV des intégrales (et les intégrabilités car f' est de signe fixe).

Exercice 54 *[sujet]* On pose $g(t) = \dfrac{f(t)}{\sqrt{t}}$ et $h(t) = \dfrac{f(t)}{t}$ puis on vérifie $f'(t) = \sqrt{t}g'(t) + \dfrac{1}{2}h(t)$ et $f'(t)^2 = (\sqrt{t}g'(t))^2 + \dfrac{1}{4}(h(t))^2 + \dfrac{1}{2}(g^2)'(t)$ car $\sqrt{t}g'(t)h(t) = g'(t)g(t)$. En intégrant sur $[1, x]$, on arrive à $\displaystyle\int_1^x h(t)^2\,\mathrm{d}t \leqslant 4\int_1^x f'(t)^2\,\mathrm{d}t \leqslant 4\int_0^{+\infty} f'(t)^2\,\mathrm{d}t$, les « intégrales partielles » de $h^2 \geqslant 0$ sont majorées donc intégrable.

Exercice 55 *[sujet]* **1.** $x^n e^{\omega x} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ car $\mathrm{Re}(\omega) < 0$ puis $I_n \overset{\text{IPP}}{=} \left[x^n \dfrac{e^{\omega x}}{\omega}\right]_0^{+\infty} - \dfrac{n}{\omega} I_{n-1}$ donc $I_n = (-1)^{n+1}\dfrac{n!}{\omega^{n+1}}$.

Comme $\omega^3 = 1$, on en déduit $\mathrm{Im}(I_{3n+2}) = 0$ donc $0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^{3n+2}\,\mathrm{Im}(e^{\omega x})\,\mathrm{d}x \overset{t=x^3}{=} \frac{1}{3}\int_0^{+\infty} t^n\,\mathrm{Im}(e^{\omega t^{1/3}})\,\mathrm{d}t$; il suffit donc de prendre $f(t) = \dfrac{1}{3}e^{-t^{1/3}/3}\sin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}t^{1/3}\right)$ (qui est bien continue sur $\mathbb{R}^+$).

2. Par linéarité on a $\displaystyle\int_a^b f(t)P(t)\,\mathrm{d}t = 0$ pour tout polynôme P donc avec le polynôme P donné par le résultat admis ($\varepsilon > 0$ fixé), on a $\displaystyle\int_a^b f(t)^2\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)(f(t) - P(t))\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon(b-a)\|f\|_\infty$ donc $\displaystyle\int_a^b f(t)^2\,\mathrm{d}t = 0$ et $f = 0$ (car f^2 est continue et positive)

Exercice 56 *[sujet]* On a $\displaystyle\int_0^A f(x+1) - f(x-1)\,\mathrm{d}x = -\int_{-1}^1 f(u)\,\mathrm{d}u + \int_{A-1}^{A+1} f(u)\,\mathrm{d}u$; pour $\varepsilon > 0$, si A grand alors $|f(u)| \leqslant \varepsilon$ sur $[A-1, +\infty[$ donc $\left|\displaystyle\int_{A-1}^{A+1} f(u)\,\mathrm{d}u\right| \leqslant 2\varepsilon$ donc tend vers 0 si A tend vers $+\infty$. On en déduit $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x+1) - f(x-1)\,\mathrm{d}x = -\int_{-1}^1 f(u)\,\mathrm{d}u$. On fait de même sur l'autre partie et on trouve $I = 0$.

Exercice 57 *[sujet]* $t \mapsto e^{-t^2}e^{-xt}$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $[0, +\infty[$, $\underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donc intégrable pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Pour $x > 0$, $0 \leqslant f(x) \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$ donc $\lim\limits_{+\infty} f = 0$.

Exercice 58 *[sujet]* **1.** Si $f \to L > 0$ alors $\displaystyle\int_0^x f^2(t)\,\mathrm{d}t \to +\infty$ et $f(x)\displaystyle\int_0^x f^2(t)\,\mathrm{d}t \to +\infty$ ce qui est absurde.

2. $f(t) = (1+t)^{-1/3}$ convient (avec $\ell = 3$)

3. On a $g'(x) = f^2(x)$ donc l'hypothèse est $\sqrt{g'(x)}g(x) \to \ell$ ou bien $g'(x)g^2(x) \to \ell^2$, ce qui signifie $\dfrac{1}{3}(g^3(x))' \to \ell^2$.

Si $\lim\limits_{+\infty} h' = 0$ alors $|h'(t)| < \varepsilon$ pour $x \geqslant A$ donc $\left|\dfrac{h(x) - h(0)}{x}\right| = \left|\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x h'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^A |h'(t)|\,\mathrm{d}t + \varepsilon \leqslant 2\varepsilon$ pour $x \geqslant B \geqslant A$, car A étant fixé, l'intégrale $\displaystyle\int_0^A |h'(t)|\,\mathrm{d}t$ est une constante et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^A |h'(t)|\,\mathrm{d}t = 0$. On a donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{h(x) - h(0)}{x} = 0$ donc $\dfrac{1}{x}h(x) \to 0$.

On utilise cette propriété avec $h(x) = \dfrac{1}{3}g^3(x) - \ell^2 x$: on a bien $h'(x) \to 0$ par hypothèse et $\dfrac{1}{x}h(x) = \dfrac{1}{3x}g^3(x) - \ell^2$; on en déduit successivement $g^3(x) \sim 3x\ell^2$ puis $g(x) \sim (3x\ell^2)^{1/3}$ et enfin $f(x) \sim \dfrac{\ell}{g(x)} \sim \left(\dfrac{\ell}{3x}\right)^{1/3}$.

Exercice 59 *[sujet]* **1.** Étudier la fonction

2. $\mathcal{CM}^0$ sur $]1, +\infty[$, $\underset{1}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2(x-1)}}$ et $\underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$ donc intégrable. Poser $u = \sqrt{x^2 - 1}$ (justifier !) $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{\pi}{2}$.

3. $\dfrac{m}{n\sqrt{n^2 - m^2}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{m}{n^2}$ donc (reste de) série AC.

Par comparaison intégrale : $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2 - m^2}} \leqslant \frac{1}{n\sqrt{n^2 - m^2}} \leqslant \int_{n-1}^n \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2 - m^2}}$ puis $\displaystyle\int_{m+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2 - m^2}} \leqslant \frac{S_m}{m} \leqslant \int_m^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2 - m^2}}$ (CV par chgt de variable qui suit) ; on pose (justifier !) $x = mu$ et par encadrement, on arrive à $\lim\limits_{m\to+\infty} S_m = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{u^2 - 1}} = \frac{\pi}{2}$.