

## TD2 : Intégration

---

### Exercice 1

Justifier la convergence de  $I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{1+t^2} dt$ ,  $I_2 = \int_0^1 \frac{e^t - 1}{t\sqrt{t}} dt$ ,  $I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{t+1}{t^3 + \sqrt{t}} dt$  et  $I_4 = \int_0^{+\infty} \frac{t}{\operatorname{sh}(t)} dt$ .

### Exercice 2 (CCP PSI 2018)

1. Trouver  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  tels que  $\frac{1+X+X^2}{X(X+1)^2} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{(X+1)^2}$
2. Justifier l'existence de  $I = \int_0^1 t \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor dt$ .
3. Calculer  $I$ , sachant que  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .

### Exercice 3 (ICNA PSI 2019)

1. Pour quelle(s) valeur(s) de  $a$  et  $b$ ,  $\int_0^{+\infty} (\sqrt{t} + a\sqrt{t+1} + b\sqrt{t+2}) dt$  converge-t-elle? (\*)
2. Calculer cette intégrale quand elle converge.

### Exercice 4 (CCINP PSI 2023)

1. Soient  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $a < b$  et  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . On pose :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $I_n = \int_a^b f(x) \sin nx dx$ . Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ . (\*)
2. Soit  $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ .
  - a) Montrer que  $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt$  converge et en déduire que  $I$  converge. (\*)
  - b) Soit, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $K_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin nx}{x} dx$ . Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} K_n = I$ .
  - c) On introduit  $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin nx}{\sin x} dx$ . Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (J_n - K_n) = 0$ .
  - d) Montrer que, pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ ,  $J_{2p+1} = J_{2p-1}$ . (\*)
  - e) En déduire la valeur de  $I$ .

### Exercice 5 (Mines-Ponts PSI 2022)

Soit  $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ .

1. Montrer que  $f$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$  et préciser  $f'$ .
2. Déterminer des équivalents de  $f$  en 0 et  $+\infty$ . (\*)
3. Justifier la convergence de  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$  et calculer cette intégrale.

---

## Indications

### Exercice 3

1. on peut calculer une primitive puis DL avec la précision  $o(1)$  et discuter sur la valeur des coefficients.

### Exercice 4

1. IPP
2. a) IPP  
d)  $\sin(p) - \sin(q) = ?$

### Exercice 5

2. pour l'équivalent en  $+\infty$ , qui est  $\frac{e^{-x}}{x}$ , commencer par une IPP.