L'usage des calculatrices est interdit

Le sujet comporte un problème et des exercices indépendants.
La propreté des copies, la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et des justifications données tiendra une part prépondérante dans la notation !

PROBLEME

On considère α un réel tel que $\alpha > 1$. Le but du problème est de justifier l'existence et de calculer la limite en $+\infty$ de la fonction I_α définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ I_\alpha(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}u}{1+u^\alpha}$.

Partie I : Résultats préliminaires

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit les deux fonctions f_n et g_n sur $]0,\pi]$ par

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \cos(kx) \quad \text{et} \quad g_n(x) = \frac{\sin\left(\dfrac{(2n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)}$$

a) Calculer $\displaystyle\int_0^\pi \cos(kx)\,\mathrm{d}x$, pour $k \in \mathbb{N}^*$, et en déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^\pi f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

b) Montrer que si $x \in]0,\pi]$ et $n \geqslant 1$, on a $f_n(x) = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} g_n(x)$.

c) En déduire que g_n est prolongeable par continuité en 0. On notera encore g_n la fonction ainsi prolongée. Quelle est alors la valeur de $g_n(0)$?

d) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^\pi g_n(t)\,\mathrm{d}t$.
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \pi$.

2. On définit sur $[0,\pi]$ la fonction g par :

$$\forall x \in]0,\pi],\ g(x) = \frac{\cos\left(\dfrac{x}{\alpha}\right) - 1}{\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)} \quad \text{et} \quad g(0) = 0$$

a) Montrer que g est dérivable en 0 et préciser $g'(0)$.

b) Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\pi]$ et calculer g'.

c) Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$.

d) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \displaystyle\int_0^\pi g(x) \sin\left((2n+1)\frac{x}{2}\right)\,\mathrm{d}x$.

Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, qu'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|v_n| \leqslant \dfrac{A}{2n+1}$.

e) En déduire la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $X_n = \displaystyle\int_0^\pi f_n(x) \cos\left(\frac{x}{\alpha}\right)\,\mathrm{d}x$.

a) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $X_n = -\dfrac{\alpha}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{\alpha}\right) + \dfrac{1}{2}v_n + \dfrac{1}{2}u_n$.

b) En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} X_n = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)$.

c) Pour $k \geqslant 1$, calculer $\displaystyle\int_0^\pi \cos(kx)\cos\left(\frac{x}{\alpha}\right)\,\mathrm{d}x$.

d) En déduire que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $X_n = \dfrac{\alpha}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{\alpha}\right)\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\left[\frac{1}{1+k\alpha} + \frac{1}{1-k\alpha}\right]$.

Partie II : Calcul de $\lim\limits_{+\infty} I_\alpha$

On pose dans la suite du problème $\beta = \dfrac{1}{\alpha}$, donc $0 < \beta < 1$.
On définit sur $]0,1]$ les fonctions φ et ψ par :

$$\forall t \in]0,1],\ \varphi(t) = \frac{t^{\beta-1}}{1+t} \quad \text{et} \quad \psi(t) = \frac{t^{-\beta}}{1+t}$$

Enfin, pour $x \in]0,1]$, on pose

$$J(x) = \int_x^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad K(x) = \int_x^1 \psi(t)\,\mathrm{d}t$$

1. a) Montrer que la fonction I_α est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

b) En remarquant que si $u \geqslant 1$, on a $\dfrac{1}{1+u^\alpha} \leqslant u^{-\alpha}$, montrer que $x \mapsto I_\alpha(x) - I_\alpha(1)$ est majorée sur $[1,+\infty[$.

c) En déduire que I_α admet une limite finie en $+\infty$.

2. a) Démontrer que si $x \in]0,1[$, on a $\displaystyle\int_x^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \alpha \int_{x^{1/\alpha}}^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+u^\alpha}$; on pourra poser $t = u^\alpha$.

b) En déduire que J est prolongeable par continuité en 0 et que $J(0) = \alpha I_\alpha(1)$ (en notant encore J la fonction prolongée).

3. a) Montrer que si $x \in]0,1[$, on a $K(x) = \alpha\left(I_\alpha\left(x^{-1/\alpha}\right) - I_\alpha(1)\right)$.

b) En déduire que K est prolongeable par continuité en 0 et que $K(0) = \alpha\left(\lim\limits_{+\infty} I_\alpha - I_\alpha(1)\right)$ (en notant encore K le prolongement).

4. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$, on pose $\sigma_n(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^k$. Puis, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0,1]$, on pose $J_n(x) = \displaystyle\int_x^1 \sigma_n(t) \times t^{\beta-1}\,\mathrm{d}t$ et $K_n(x) = \displaystyle\int_x^1 \sigma_{n-1}(t) \times t^{-\beta}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0,1]$, $\left|\sigma_n(t) - \dfrac{1}{1+t}\right| \leqslant t^{n+1}$.

b) En déduire que pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0,1]$, on a $|J(x) - J_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{n+1+\beta}$ et $|K(x) - K_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{n+1-\beta}$.

c) Calculer $J_n(x) + K_n(x)$ et en déduire que $\lim\limits_{x \to 0} J_n(x) + K_n(x) = \alpha + \dfrac{2X_n}{\sin\left(\dfrac{\pi}{\alpha}\right)}$ (on pourra utiliser **I.3.d**).

d) Justifier l'existence de la limite quand x tend vers $+\infty$ de $I_\alpha(x)$ et déterminer la valeur de cette limite.

Fin du Problème

EXERCICES

1. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$, $u_n = S_n - 2\sqrt{n}$ et $v_n = S_n - 2\sqrt{n+1}$

a) Montrer, pour $n \geqslant 1$, que $\dfrac{1}{2\sqrt{n+1}} \leqslant \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$

b) Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?

c) Soit $w_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{4n} \frac{1}{\sqrt{k}}$. Exprimer w_n à l'aide de n et de deux termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ puis en déduire la limite et un équivalent de w_n quand n tend vers $+\infty$.

3. a) À l'aide d'un développement limité, déterminer un équivalent en 0 de $e^x - 1 - \ln(1+x)$.

b) En déduire la limite en 0 de $\dfrac{\cos(x) - \sqrt{1-x^2}}{e^{x^2} - 1 - \ln(1+x^2)}$

4. Soit f définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \arctan(\operatorname{sh}(x)) - \arccos\left(\dfrac{1}{\operatorname{ch}(x)}\right)$.

a) Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.

b) Sur quel ensemble f est-elle dérivable ?

c) Déterminer $f'(x)$; simplifier l'expression au maximum.

d) En déduire une relation entre $\arctan(\operatorname{sh}(x))$ et $\arccos\left(\dfrac{1}{\operatorname{ch}(x)}\right)$.

5. On définit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \lfloor x \rfloor - \left\lfloor \dfrac{x}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \dfrac{x+1}{2} \right\rfloor$.

a) Montrer f est 2-périodique.

b) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor = \left\lfloor \dfrac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{x+1}{2} \right\rfloor$.

6. Trouver l'expression générale (la plus simple possible, c'est-à-dire sans logarithme) des solutions sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ de l'équation différentielle du premier ordre suivante $(E)\ :\ y' - y\tan(x) = 1$.

7. Soit $P = X^6 - 3X^5 + 4X^4 - \alpha X^3 + 2X - 1$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Déterminer α de sorte que 1 soit racine de P.

On suppose cette condition réalisée pour la suite.

b) Calculer l'ordre de multiplicité m de la racine 1 de P.

c) Trouver Q tel que $P = (X-1)^m Q$.

d) Calculer la somme des racines (complexes) de Q et la somme des inverses de ses racines.

8. Déterminer une base et la dimension des espaces vectoriels suivants :

a) $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | x - y + z - t = 0 \text{ et } x + y + 2z - 3t = 0\}$

b) $G = \{P \in \mathbb{R}_3[X] | P(1) = 0 \text{ et } P'(0) = 0\}$

9. Soient $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à M.

a) Donner l'expression de $u(x,y,z)$ pour un vecteur $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

b) Déterminer trois vecteurs w_1, w_2 et w_3 tels que $\ker(u - id) = \operatorname{Vect}\{w_1, w_2\}$ et $\ker(u + 3id) = \operatorname{Vect}\{w_3\}$ (id désigne l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$).

c) Montrer que $\mathcal{B} = (w_1, w_2, w_3)$ soit une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la matrice D de u dans la base $\mathcal{B}$.

d) Donner P, la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base $\mathcal{B}$, ainsi que la relation liant les matrices M, D et P.

e) Justifier qu'il existe, pour $n \in \mathbb{N}$, des réels a_n et b_n tels que $M^n = a_n I_3 + b_n M$; déterminer les valeurs de a_n et b_n en fonction de n.

10. Soient θ un réel, $\theta \in]0, \pi[$, et, pour $n \geqslant 1$, $A_n = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{i,j} = \begin{cases} 2\cos\theta & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si } |i-j| = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

On pose $D_n = \det(A_n) = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \alpha & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \alpha & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \alpha \end{vmatrix}$ avec $\alpha = 2\cos\theta$.

a) En commençant par développer le déterminant D_n par sa première colonne, déterminer une relation entre D_n, D_{n-1} et D_{n-2}.

b) En déduire la valeur de D_n en fonction de n et θ.

c) Pour quelles valeurs de θ la matrice A_n est-elle inversible ?

Fin du sujet