Correction du DS1

PROBLEME (inspiré de Mines Sup 2003) : Partie I

1. a) Comme $k \neq 0$, $\displaystyle\int_0^\pi \cos(kx)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\sin(kx)}{k}\right]_0^\pi = 0$ et, par linéarité de l'intégrale, $\boxed{\displaystyle\int_0^\pi f_n(t)\,\mathrm{d}t = 0}$

b) On a $f_n(x) = \mathrm{Re}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^n e^{ikx}\right)$ et comme $e^{ix} \neq 1$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^n e^{ikx} = e^{ix}\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}} = e^{i\frac{n+1}{2}x}\frac{-2i\sin\frac{nx}{2}}{-2i\sin\frac{x}{2}}$ d'où on déduit $f_n(x) = \dfrac{\cos\left(\frac{n+1}{2}x\right)\sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{\sin\frac{x}{2}} = \dfrac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left[\sin\left(\dfrac{2n+1}{2}x\right) - \sin\left(\dfrac{x}{2}\right)\right] = \boxed{-\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}g_n(x)}$
Le résultat étant donné, on pouvait aussi le prouver par récurrence sur n.

c) On a $\lim\limits_0 g_n = \lim\limits_0 (1+2f_n) = 2n+1$ donc on prolonge par continuité g_n par $\boxed{g_n(0) = \lim\limits_{x\to 0} g_n(x) = 2n+1}$
On peut aussi déterminer cette limite à partir de l'expression de g_n et en utilisant $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$

d) On a, pour $n \geqslant 1$, $g_n = 1 + 2f_n$ donc $u_n = \pi + 2\displaystyle\int_0^\pi f_n(t)\,\mathrm{d}t = \pi$ (avec **I.1.a**) ; comme $u_0 = \displaystyle\int_0^\pi \mathrm{d}t = \pi$, on a $\boxed{u_n = \pi \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}}$

2. a) On a, pour $x \neq 0$, $g(x) \underset{0}{=} \dfrac{1 - \frac{x^2}{2\alpha^2} - 1 + o(x^2)}{\frac{x}{2} + o(x^2)} = -\dfrac{\frac{x}{\alpha^2} + o(x)}{1 + o(x)} = -\dfrac{x}{\alpha^2} + o(x)$. Comme $g(0) = 0$, on peut aussi écrire $g(x) \underset{x\to 0}{=} g(0) - \dfrac{x}{\alpha^2} + o(x)$ et ce $\mathrm{DL}_1(0)$ prouve que g est dérivable en 0 et $\boxed{g'(0) = \dfrac{-1}{\alpha^2}}$

b) Comme $\sin\dfrac{x}{2} \neq 0$ si $x \in]0,\pi]$, g est $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\pi]$ et $g'(x) = \dfrac{-\sin\frac{x}{\alpha}}{\alpha\sin\frac{x}{2}} + \left(\cos\dfrac{x}{\alpha} - 1\right)\dfrac{-\cos\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}$

c) Comme $\cos\dfrac{x}{\alpha} - 1 \underset{0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2\alpha^2}$, on obtient $\lim\limits_0 g' = -\dfrac{2}{\alpha^2} + \dfrac{1}{\alpha^2} = g'(0)$ donc $\boxed{g \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0,\pi]}$

d) Les fonctions g et cos sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$ donc $v_n = \left[g(x)\dfrac{-\cos(2n+1)\frac{x}{2}}{\frac{2n+1}{2}}\right]_0^\pi + \displaystyle\int_0^\pi g'(x)\frac{\cos(2n+1)\frac{x}{2}}{\frac{2n+1}{2}}\,\mathrm{d}x$, donc $|v_n| = \dfrac{2}{2n+1}\left|\displaystyle\int_0^\pi g'(x)\cos(2n+1)\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \boxed{\dfrac{2}{2n+1}\displaystyle\int_0^\pi |g'(x)|\,\mathrm{d}x}$ par inégalité triangulaire sur les intégrales.

e) On en déduit, par encadrement, $\boxed{\lim v_n = 0}$ puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2n+1} = 0$.

3. a) Avec **I.1.b**, par linéarité de l'intégrale, on a $X_n = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^\pi \cos\frac{x}{\alpha}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^\pi g_n(x)\cos\frac{x}{\alpha}\,\mathrm{d}x = -\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\pi}{\alpha} + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{x}{\alpha} - 1 + 1\right)\mathrm{d}x$ donc $\boxed{X_n = -\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\pi}{\alpha} + \dfrac{1}{2}(v_n + u_n)}$

b) Comme $\lim u_n = \pi$ et $\lim v_n = 0$, on a $\boxed{\lim X_n = -\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\pi}{\alpha} + \dfrac{\pi}{2}}$

c) On a $\displaystyle\int_0^\pi \cos(kx)\cos\frac{x}{\alpha}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^\pi \left[\cos\left(k+\frac{1}{\alpha}\right)x + \cos\left(k-\frac{1}{\alpha}\right)x\right]\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\left(k+\frac{1}{\alpha}\right)x}{k+\frac{1}{\alpha}} + \frac{\sin\left(k-\frac{1}{\alpha}\right)x}{k-\frac{1}{\alpha}}\right]_0^\pi$, car $k \pm \dfrac{1}{\alpha} \neq 0$, donc $\displaystyle\int_0^\pi \cos(kx)\cos\frac{x}{\alpha}\,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^k}{2}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{\alpha}}{k+\frac{1}{\alpha}} - \frac{\sin\frac{\pi}{\alpha}}{k-\frac{1}{\alpha}}\right) = \boxed{\frac{(-1)^k\alpha\sin\frac{\pi}{\alpha}}{2}\left(\frac{1}{1+k\alpha} + \frac{1}{1-k\alpha}\right)}$

d) Avec l'expression de f_n, par linéarité de l'intégrale, on a $\boxed{X_n = \dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\pi}{\alpha}\displaystyle\sum_{k=1}^n (-1)^k\left(\frac{1}{1+k\alpha} + \frac{1}{1-k\alpha}\right)}$

Partie II

1. a) Comme $u \mapsto \dfrac{1}{1+u^\alpha}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, I_α est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et $I'_\alpha(x) = \dfrac{1}{1+x^\alpha} > 0$ donc on en déduit $\boxed{I_\alpha \text{ est croissante sur } \mathbb{R}^+}$

b) Si $u > 0$, on a $1 + u^\alpha \geqslant u^\alpha > 0$ donc $0 \leqslant \dfrac{1}{1+u^\alpha} \leqslant \dfrac{1}{u^\alpha}$ puis $I_\alpha(x) - I_\alpha(1) = \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{d}u}{1+u^\alpha} \leqslant \int_1^x u^{-\alpha}\,\mathrm{d}u$, si $x \geqslant 1$.
Ce qui donne $I_\alpha(x) - I_\alpha(1) \leqslant \left[\dfrac{u^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^x \boxed{\leqslant \dfrac{1}{\alpha-1}}$ car $\alpha - 1 > 0$.

c) I_α est croissante et majorée (sur $\mathbb{R}^+$) par $I_\alpha(1)+\dfrac{1}{\alpha-1}$ donc $\boxed{I_\alpha \text{ converge en } +\infty}$ par théorème de la limite monotone.

2. a) L'application $u\mapsto u^\alpha$ est une bijection $\mathcal{C}^1$, strictement croissante de $\left[x^{1/\alpha},1\right]$ sur $[x,1]$ donc par changement de variable, on a $\displaystyle\int_x^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t=\int_{x^{1/\alpha}}^1 \frac{u^{\alpha(\beta-1)}}{1+u^\alpha}\alpha u^{\alpha-1}\,\mathrm{d}u=\boxed{\alpha\int_{x^{1/\alpha}}^1\frac{\mathrm{d}u}{1+u^\alpha}}$

b) On a $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^{1/\alpha}=0$ et I_α est continue en 0 donc, par composition des limites, on a $\boxed{\lim_0 J=\alpha I_\alpha(1)}$

3. a) On pose cette fois $t=u^{-\alpha}$: la fonction $u\mapsto u^{-\alpha}$ est $\mathcal{C}^1$ bijective et strictement décroissante de $[x,1]$ sur $\left[1,x^{-1/\alpha}\right]$ et on trouve $\displaystyle K(x)=\int_{x^{-1/\alpha}}^1\frac{u^{\alpha\beta}}{1+u^{-\alpha}}(-\alpha)u^{-1-\alpha}\,\mathrm{d}u=-\alpha\int_{x^{-1/\alpha}}^1\frac{\mathrm{d}u}{1+u^\alpha}$ donc on en conclut $\boxed{K(x)=\alpha(I_\alpha(x^{-1/\alpha})-I_\alpha(1))}$

b) On a $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{-1/\alpha}=+\infty$ donc par composition des limites, $\boxed{\lim_0 K=\alpha(\lim_{+\infty} I_\alpha-I_\alpha(1))}$

4. a) On a $\sigma_n(t)=\dfrac{1-(-1)^{n+1}t^{n+1}}{1+t}$ (car $t\neq -1$) donc (avec $t\geqslant 0$) $\left|\sigma_n(t)-\dfrac{1}{1+t}\right|=\dfrac{t^{n+1}}{1+t}\ \boxed{\leqslant t^{n+1}}$

b) On a $\displaystyle |J(x)-J_n(x)|=\left|\int_x^1\left(\frac{1}{1+t}-\sigma_n(t)\right)t^{\beta-1}\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_x^1\left|\frac{1}{1+t}-\sigma_n(t)\right|t^{\beta-1}\,\mathrm{d}t\leqslant\int_x^1 t^{n+\beta}\,\mathrm{d}t=\left[\frac{t^{n+\beta+1}}{n+\beta+1}\right]_x^1$, par inégalité triangulaire et car $x<1$; donc $\boxed{|J(x)-J_n(x)|\leqslant\dfrac{1}{n+\beta+1}}$

On trouve de même, $\displaystyle |K(x)-K_n(x)|\leqslant\int_x^1 t^{n-\beta}\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{n-\beta+1}$

c) $\displaystyle J_n(x)+K_n(x)=\sum_{k=0}^n(-1)^k\int_x^1 t^{k+\beta-1}\,\mathrm{d}t+\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\int_x^1 t^{k-\beta}\,\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^n(-1)^k\left[\frac{t^{k+\beta}}{k+\beta}\right]_x^1+\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\left[\frac{t^{k+1-\beta}}{k+1-\beta}\right]_x^1$, donc $\displaystyle\lim_0(K_n+J_n)=\sum_{k=0}^n(-1)^k\frac{\alpha}{1+k\alpha}+\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k+1}\frac{\alpha}{1-(k+1)\alpha}=\alpha+\alpha\sum_{k=1}^n(-1)^k\left(\frac{1}{1+k\alpha}+\frac{1}{1-k\alpha}\right)$ ce qui donne $\boxed{\lim_0(J_n+K_n)=\alpha+\dfrac{2X_n}{\sin\frac{\pi}{\alpha}}}$

d) On a $\displaystyle\lim_0(J+K)=\alpha\lim_{+\infty}I_\alpha$ d'après **II.2** et **II.3** donc, en ajoutant les deux inégalités de **II.4.b** et en faisant tendre x vers 0, on obtient, par inégalité triangulaire, $\displaystyle\left|\alpha\lim_{+\infty}I_\alpha-\alpha-\frac{2X_n}{\sin\frac{\pi}{\alpha}}\right|\leqslant\frac{1}{n+1+\beta}+\frac{1}{n+1-\beta}$ pour tout n donc, en faisant tendre n vers $+\infty$ cette fois, on trouve $\displaystyle\alpha\lim_{+\infty}I_\alpha=\alpha+\frac{2}{\sin\frac{\pi}{\alpha}}\lim X_n$, ce qui donne, avec **I.3.d**,

$$\boxed{\lim_{+\infty}I_\alpha=\frac{\pi}{\alpha\sin\frac{\pi}{\alpha}}=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^\alpha}}$$

Exercices :

1. On raisonne par récurrence sur $n\geqslant 1$:

- $\displaystyle\sum_{k=1}^1 k^3=1^3=1$ et $\dfrac{1^2 2^2}{4}=1$ donc l'égalité est vraie pour $n=1$.
- si on suppose l'égalité vraie au rang $n\in\mathbb{N}^*$ alors on obtient $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}k^3=(n+1)^3+\sum_{k=1}^n k^3\overset{\text{HR}}{=}(n+1)^3+\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ puis $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}k^3=\frac{(n+1)^2}{4}[4(n+1)+n^2]=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$ donc l'égalité est vraie au rang $n+1$.

Par principe de récurrence, on a bien $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\sum_{k=1}^n k^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}}$

2. a) On a $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\dfrac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ donc $\boxed{\dfrac{1}{2\sqrt{n+1}}\leqslant\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\leqslant\dfrac{1}{2\sqrt{n}}}$

b) On en déduit $u_{n+1}-u_n=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}-2\sqrt{n+1}+2\sqrt{n}\leqslant 0$ donc (u_n) décroit.

De même, $v_{n+1}-v_n=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}-2\sqrt{n+2}+2\sqrt{n+1}\geqslant 0$ et (v_n) croît.

Enfin, $0\leqslant u_n-v_n=2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{n}}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ donc $\boxed{(u_n)\text{ et }(v_n)\text{ sont adjacentes}}$ ce qui permet de montrer qu'elles $\boxed{\text{convergent vers }\ell\in\mathbb{R}}$

c) $w_n=S_{4n}-S_n=u_{4n}+4\sqrt{n}-u_n-2\sqrt{n}=u_{4n}-u_n+2\sqrt{n}$; de plus $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{4n}-u_n)=\ell-\ell=0$ donc $\boxed{\lim w_n=+\infty}$ et $\dfrac{w_n}{2\sqrt{n}}=1+\dfrac{u_{4n}-u_n}{2\sqrt{n}}\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$ donc $\boxed{w_n\underset{n\to+\infty}{\sim}2\sqrt{n}}$

3. a) $e^x-1-\ln(1+x)\underset{0}{=}\left(1+x+\dfrac{x^2}{2}\right)-1-\left(x-\dfrac{x^2}{2}\right)+o\left(x^2\right)=x^2+o\left(x^2\right)$ donc $\boxed{e^x-1-\ln(1+x)\underset{0}{\sim}x^2}$

b) On en déduit $e^{x^2}-1-\ln\left(1+x^2\right)\underset{0}{\sim}x^4$ donc on cherche un $\mathrm{DL}_4(0)$ du numérateur :

$\cos(x)-\left(1-x^2\right)^{1/2}=1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}-\left(1-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{8}x^4\right)+o\left(x^4\right)=\dfrac{x^4}{6}+o\left(x^4\right)\sim\dfrac{x^4}{6}$. Par quotient d'équivalents, on a $\dfrac{\cos(x)-\sqrt{1-x^2}}{e^{x^2}-1-\ln\left(1+x^2\right)}\sim\dfrac{x^4/6}{x^4}$ et $\boxed{\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos(x)-\sqrt{1-x^2}}{e^{x^2}-1-\ln\left(1+x^2\right)}=\dfrac{1}{6}}$

4. a) sh, ch et arctan sont $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$; arccos est $\mathcal{C}^0$ sur $[-1,1]$ et on a $\dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)}\in]0,1]$ pour $x\geqslant0$ donc par composition $x\mapsto\arccos\dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)}$ est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}^+$ et $\boxed{f\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+)}$

b) sh, ch et arctan sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$; arccos est $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$ et on a $\dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)}\in]0,1[$ pour $x\neq0$ donc par composition $x\mapsto\arccos\dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et $\boxed{f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^*)}$

c) On a $f'(x)=\dfrac{\mathrm{ch}(x)}{1+\mathrm{sh}^2(x)}-\dfrac{-\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}^2(x)}\times\dfrac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}}}=\dfrac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{ch}^2(x)}-\dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}^2(x)}\times\dfrac{|\mathrm{ch}(x)|}{\sqrt{\mathrm{ch}^2(x)-1}}$ puis $(\mathrm{ch}^2-\mathrm{sh}^2=1)$ $f'(x)=\dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)}-\dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}\times\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{sh}^2(x)}}=0$ et $\sqrt{\mathrm{sh}^2(x)}=|\mathrm{sh}(x)|$. On en déduit $f'(x)=0$ si $x>0$ et $f'(x)=\dfrac{2}{\mathrm{ch}\,x}$ si $x<0$.

d) Comme $\mathbb{R}^{+*}$ est un intervalle, on en déduit que f est constante sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc sur $\mathbb{R}^+$ par continuité en 0. Comme $f(0)=-\arccos(1)=0$, on en déduit $f=0$ sur $\mathbb{R}^+$. On en déduit $\forall x\geqslant0,\arctan(\mathrm{sh}\,x)=\arccos\left(\dfrac{1}{\mathrm{ch}\,x}\right)$. Enfin, comme $x\mapsto\arctan(\mathrm{sh}\,x)$ est impaire et $x\mapsto\arccos\left(\dfrac{1}{\mathrm{ch}\,x}\right)$ est paire, on a $\arctan(\mathrm{sh}\,x)=-\arccos\left(\dfrac{1}{\mathrm{ch}\,x}\right)$, pour $x<0$.

5. a) $f(x+2)=\lfloor x+2\rfloor-\left\lfloor\dfrac{x}{2}+1\right\rfloor-\left\lfloor\dfrac{x+1}{2}+1\right\rfloor=\lfloor x\rfloor+2-\left\lfloor\dfrac{x}{2}\right\rfloor-1-\left\lfloor\dfrac{x+1}{2}\right\rfloor-1=f(x)$ car 1 et 2 sont des entiers. Ainsi $\boxed{f\text{ est 2-périodique}}$

b) Si $x\in[0,1[$, on a $f(x)=0-0-0=0$ et si $x\in[1,2[$, $f(x)=1-0-1=0$. Ainsi, f est nulle sur $[0,2[$ donc sur $\mathbb{R}$ par 2-périodicité, ce qui donne $\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\lfloor x\rfloor=\left\lfloor\dfrac{x}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\dfrac{x+1}{2}\right\rfloor}$

6. Les solutions de l'équation homogène $y'-\tan(x)y=0$ sont de la forme $y(x)=\alpha\exp(-\ln|\cos(x)|)=\dfrac{\alpha}{\cos(x)}$ avec une constante $\alpha\in\mathbb{R}$.

On peut remarquer qu'une solution particulière de l'équation complète est $y_p(x)=\tan(x)$ (*que l'on peut aussi déterminer par variation de la constante, ie en la cherchant sous la forme* $y_p(x)=\dfrac{\lambda(x)}{\cos(x)}$ *avec* λ *dérivable*)

Les solutions sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ de l'équation complète sont donc définies par $\boxed{y(x)=\dfrac{\alpha}{\cos(x)}+\tan(x)\text{ avec }\alpha\in\mathbb{R}}$

7. a) $P(1)=3-\alpha$ donc $\boxed{P(1)=0\text{ si et seulement si }\alpha=3}$

b) On vérifie $P(1)=P'(1)=P''(1)=0$ et $P'''(1)\neq0$ donc $\boxed{1\text{ est racine triple de }P}$

c) Après calculs, on trouve $\boxed{P=(X-1)^3(X^3+X+1)}$

d) On a $X^3+X+1=(X-x_1)(X-x_2)(X-x_3)$ (racines éventuellement complexes) donc $x_1+x_2+x_3=0$ (examiner le coefficient de X^2) et $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_3}=\dfrac{x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3}{x_1x_2x_3}=\dfrac{1}{-1}=-1$ (avec les coefficients de X et constant cette fois)

8. a) On résout le système linéaire $\left\{\begin{array}{l} x-y+z-t=0 \\ x+y+2z-3t=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x-y+z-t=0 \\ 2y+z-2t=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z=2t-2y \\ x=3y-t \end{array}\right.$ donc on en déduit $u \in F \Leftrightarrow \exists (y,t) \in \mathbb{R}^2, u=(3y-t,y,2t-2y,t)=y(3,1,-2,0)+t(-1,0,2,1)$ puis, par définition d'une combinaison linéaire, $F=\mathrm{Vect}\{(3,1,-2,0),(-1,0,2,1)\}$. Les deux vecteurs $(3,1,-2,0)$ et $(-1,0,2,1)$ sont linéairement indépendants car non colinéaires donc constituent une base de F et $\boxed{\dim(F)=2}$

b) Si on écrit P sous la forme $P=aX^3+bX^2+cX+d$ alors $P \in G \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a+b+c+d=0 \\ c=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} c=0 \\ d=-a-b \end{array}\right.$ donc $P \in G \Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, P=aX^3+bX^2-a-b=a(X^3-1)+b(X^2-1)$ puis $G=\mathrm{Vect}\{X^3-1,X^2-1\}$. La famille (X^3-1,X^2-1) est libre (polynômes de degrés étagés) donc constitue une base de G et $\boxed{\dim(G)=2}$

9. a) $\boxed{u(x,y,z)=(2x-y+2z,x+2z,-2x+2y-3z)}$

b) $w=(x,y,z) \in \ker(u-id) \Leftrightarrow x-y+2z=0$ donc $w=(y-2z,y,z)=y(1,1,0)+z(-2,0,1)$; il suffit donc de prendre $\boxed{w_1=(1,1,0) \text{ et } w_2=(-2,0,1)}$ par exemple.

De même $w=(x,y,z) \in \ker(u-id) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 5x-y+2z=0 \\ x+3y+2z=0 \\ -2x+2y=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x-y=0 \\ 2x+z=0 \end{array}\right.$ donc $w=(x,x,-2x)$, ie $w=x(1,1,-2)$ donc il suffit de prendre $\boxed{w_3=(1,1,-2)}$

c) $\det_{\mathcal{B}_c}(w_1,w_2,w_3)=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}=-4 \neq 0$ donc $\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$

Comme $u(w_1)=w_1$, $u(w_2)=w_2$ et $u(w_3)=3w_3$, on a $\boxed{D=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}$

d) $\boxed{M=PDP^{-1} \text{ avec } P=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}}$

e) On a $M^n=PD^nP^{-1}$ avec $D^n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$. On vérifie alors que $M^n=a_nI_3+b_nM=P(a_nI_3+b_nD)P^{-1}$ si et seulement si $aI_3+bD=D^n$. On cherche donc a_n,b_n de sorte que $\left\{\begin{array}{l} a_n+b_n=1 \\ a_n+3b_n=3^n \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a_n=\dfrac{3-3^n}{2} \\ b_n=\dfrac{3^n-1}{2} \end{array}\right.$

On a donc $\boxed{M^n=\dfrac{3-3^n}{2}I_3+\dfrac{3^n-1}{2}M \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}}$

10. a) En développant par la première colonne, on a $D_n=\alpha D_{n-1}-\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \alpha & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \alpha & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \alpha \end{vmatrix}_{n-1}$ donc en développant de dernier déterminant par sa première ligne, on trouve $\boxed{D_n=\alpha D_{n-1}-D_{n-2}}$

b) La suite $(D_n)_{n\geqslant 1}$ vérifie une relation de récurrence linéaire à deux termes dont l'équation caractéristique est la suivante : $X^2-2X\cos\theta+1=0$; $\Delta=4(\cos^2\theta-1)=-4\sin^2\theta<0$ car $\theta \in]0,\pi[$. Les racines de cette équations sont donc $X=\cos\theta \pm i\sin\theta=e^{\pm i\theta}$. Ainsi il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que, pour $n \geqslant 1$, on ait $D_n=a\cos(n\theta)+b\sin(n\theta)$; on trouve alors a et b à partir de $D_1=2\cos\theta$ et $D_2=4\cos^\theta-1$. Ainsi a et b sont solutions de $\left\{\begin{array}{l} a\cos\theta+b\sin\theta=2\cos\theta \\ a\cos 2\theta+b\sin 2\theta=4\cos^2\theta-1 \end{array}\right.$; comme $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$, on en déduit (avec $2\cos\theta L_1-L_2$) l'égalité $a(2\cos^2\theta-\cos 2\theta)=1$ donc $a=1$ puis $b=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$ (avec $\sin\theta>0$ car $\theta \in]0,\pi[$). On déduit donc $D_n=\cos(n\theta)+\dfrac{\cos\theta\sin(n\theta)}{\sin\theta}$ donc $\boxed{D_n=\dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}}$

c) A_n est inversible si et seulement si $D_n \neq 0$ donc si et seulement si $(n+1)\theta \notin \pi\mathbb{Z}$ ce qui donne la condition nécessaire et suffisante $\boxed{\theta \neq \dfrac{k\pi}{n+1} \text{ avec } k \in [\![1,n]\!]}$