PSI2

DM1

(inspiré de Centrale TSI 2000 maths 1)

pour le lundi 16 septembre 2024

Partie I :

Pour tout $n \geq 2$, on pose :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \quad , \quad u_n = S_n - \ln(n) \quad \text{et} \quad v_n = S_{n-1} - \ln(n).$$

1. Montrer que : $\forall x > -1, \ln(1+x) \leqslant x$.

2. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. On notera γ leur limite commune.

3. Déterminer une valeur de n pour laquelle u_n est une valeur approchée de γ à 10^{-1} près.

4. a) Montrer l'égalité :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \int_0^1 \frac{1-t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t.$$

b) En déduire que :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \int_0^n \frac{1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}{x}\,\mathrm{d}x.$$

$$u_n = \int_0^1 \left[1 - \left(1-\frac{x}{n}\right)^n\right] \frac{\mathrm{d}x}{x} - \int_1^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

5. a) Démontrer l'inégalité :

$$\forall x \in [0,n], 0 \leqslant 1 - e^x \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \leqslant \frac{ex^2}{n}.$$

On pourra utiliser l'inégalité des accroissements finis.

b) Montrer, après avoir justifié l'existence des intégrales, que l'on a :

$$\gamma = \int_0^1 \left(1-e^{-x}\right) \frac{\mathrm{d}x}{x} - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Partie II :

On pose : $\forall x > 0$, $\varphi(x) = \dfrac{1}{1-e^{-x}} - \dfrac{1}{x}$.

1. Montrer que φ est prolongeable par continuité en 0 et bornée sur $\mathbb{R}^{+*}$.

2. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\varphi(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente.

3. On pose, pour $n \geqslant 2$ et $a > 0$:

$$I_n(a) = \int_a^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-nx}}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Montrer que $I_n(a)$ existe, pour tout $a > 0$, et que l'on a :

$$\forall a > 0, I_n(a) = \int_a^{na} \frac{e^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(n) - \int_a^{na} \frac{1-e^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x.$$

4. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-nx}}{x}\,\mathrm{d}x$ est convergente et que l'on a : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-nx}}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(n)$.

5. Montrer que : $v_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(e^{-x}-e^{-nx}\right)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$.

6. En déduire que : $\gamma = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\varphi(x)\,\mathrm{d}x$.