Révisions et compléments d'algèbre linéaire

La notation $\mathbb{K}$ désigne soit le corps des nombres réels, soit le corps des nombres complexes.

I Rappels d'algèbre linéaire

1. Bases et dimension

Définition : Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{F} = \{e_1, \ldots, e_n\}$, une famille de n vecteurs de E.

1. $\mathcal{F}$ est **génératrice** de E si

$$\forall u \in E, \exists (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n, u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$$

On le note $E = \mathrm{Vect}\{e_1, \ldots, e_n\}$

2. $\mathcal{F}$ est **libre** si

$$\forall (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = 0 \Rightarrow \forall i \in [\![1, n]\!], \alpha_i = 0$$

3. $\mathcal{F}$ est une **base** de E si $\mathcal{F}$ est libre et génératrice.
Dans ce cas, on note $n = \dim(E)$ la dimension de E

Exemple(s) :

I.1 Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels, en trouver une base et la dimension

a) $E_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y + z + t = x + 2y + 3z + 4t = 0\}$

b) $E_2 = \{P \in \mathbb{K}_3[X], P(0) = P'(1) \text{ et } P(1) = 0\}$

c) $E_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & a+b & 0 \\ 2c & 0 & a-b+c \end{pmatrix}, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$

d) $E_4 = \{\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 + \delta e_4, \alpha + \beta - \delta = 0\}$ où (e_1, e_2, e_3, e_4) est une base de E.

e) $E_5 = \mathrm{Vect}\{(1, 2, 1), (1, -1, -1), (-1, 4, 3)\}$

Théorème [I.1] : (Théorème de la base incomplète)
Soient E un espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{L}$ une famille libre de E et $\mathcal{G}$ une famille génératrice de E. Alors

on peut compléter $\mathcal{L}$ en une base de E à l'aide de vecteurs de $\mathcal{G}$

ie, il existe des vecteurs $g_1, \ldots, g_p \in \mathcal{G}$ tels que $\mathcal{F} \cup \{g_1, \ldots, g_p\}$ soit une base de E.

Remarque(s) :

I.2 Comme $\mathcal{L} = \emptyset$ est une famille libre, on peut extraire une base de E de toute famille génératrice de E.

Exemple(s) :

I.3 Soient $u = (0, 1, 2, 3)$, $v = (1, 0, 2, 3)$ et $w = (1, 2, 0, 3)$. Montrer que (u, v, w) peut être complété en une base de $\mathbb{R}^4$ puis la compléter.

Propriété [I.2] : Soient E un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{F}$ une famille de n vecteurs de E. Alors on a équivalence de

i. $\mathcal{F}$ est une base de E.

ii. $\mathcal{F}$ est génératrice de E.

iii. $\mathcal{F}$ est libre.

Exemple(s) :

I.4 Les familles suivantes forment-elles une base de $G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, x - 4y + t = y + z - t = 0\}$?

a) $((2,1,1,2),(1,1,1,1))$

b) $((2,1,1,2))$

c) $((2,1,1,2),(4,1,-1,0))$

2. Matrices

Définition : Matrice d'une application linéaire
Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies, $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathcal{B}_F = (f_1, \dots, f_n)$ des bases de E et F respectivement. Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$, on définie **la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$** par

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E \to \mathcal{B}_F}(f) = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \text{ avec } \forall j \in [\![1,p]\!]\,, f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} f_i$$

Cela signifie que la $j^{\text{ème}}$ colonne contient les coordonnées du vecteur $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}_F$.
Si f est un endomorphisme de E, on note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(f)$ la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E \to \mathcal{B}_E}(f)$.

Attention : Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ alors le nombre de colonnes de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E \to \mathcal{B}_F}(f)$ est la dimension de E ; la dimension de F est le nombre de ligne de cette matrice.

Exemple(s) :

I.5 Soit : $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y,z) = (2x - y + z, 3x + 2y - 3z)$

a) Écrire la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.

b) Soient $u_1 = (0,1,1)$, $u_2 = (1,0,1)$, $u_3 = (1,1,0)$, $v_1 = (1,1)$ et $v_2 = (1,-1)$. Écrire la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}_3 = (u_1,u_2,u_3)$ et $\mathcal{B}_2 = (v_1,v_2)$.

I.6 Soit f l'application qui à un polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ associe le reste de la division euclidienne de X^2P' par $X^4 - 1$.

a) Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

b) Justifier que $\mathcal{B} = (X, X+1, X^3, (X+1)^2)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

c) Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

Définition : Produit matriciel
Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant q}} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Le produit de A et B est la matrice $C = AB$ telle que $C = (c_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant q}} \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ avec

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!]\,, c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$$

Exemple(s) :

I.7 Si $(E_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors $E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l}$.

I.8 Trouver les matrices $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ telles que $\forall M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}), AMB = 0$.

Définition : Matrice d'une famille de vecteurs
Soient E un espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $x_1, \dots, x_p$ des vecteurs de E. La **matrice des vecteurs** $x_1, \dots, x_p$ **dans la base** $\mathcal{B}$ est définie par $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_p) = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ où

$$\forall j \in [\![1, p]\!] \, , x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i$$

Cela signifie que la $j^{\text{ème}}$ colonne contient les coordonnées du vecteur x_j dans la base $\mathcal{B}$.

Remarque(s) :

(I.9) On a donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E \to \mathcal{B}_F}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f(e_1), \dots, f(e_p))$.

(I.10) Dans le cas particulier d'un seul vecteur $x \in E$, $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ est un vecteur colonne qui contient les coordonnées du vecteur x dans la base $\mathcal{B}$.

Propriété [I.3] : Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies, $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ des bases de E et F respectivement, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $x \in E$. Si on pose $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E \to \mathcal{B}_F}(f)$, $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(x)$ et $Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f(x))$ alors on a

$$Y = AX$$

Exemple(s) :

(I.11) Soient $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

Déterminer une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Définition : Matrice de passage
Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ sont deux bases de E, la **matrice de passage** de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est la matrice

$$P(\mathcal{B} \to \mathcal{B}') = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(e'_1, \dots, e'_n)$$

La $j^{\text{ème}}$ colonne de $P(\mathcal{B} \to \mathcal{B}')$ contient donc les coordonnées du vecteur e'_j dans la base $\mathcal{B}$.

Propriété [I.4] : Changements de base

1. (**Coordonnées d'un vecteur**) : si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E, $P = P(\mathcal{B} \to \mathcal{B}')$, $x \in E$, $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $X' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(x)$ les vecteurs colonnes des coordonnées de x dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ alors

$$X = PX'$$

2. (**Application linéaire**) : si $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}'_E$ deux bases de E, $P = P(P(\mathcal{B}_E \to \mathcal{B}'_E)$, $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}'_f$ deux bases de F, $Q = P(\mathcal{B}_F \to \mathcal{B}'_F)$, $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E \to \mathcal{B}_F}(u)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'_E \to \mathcal{B}'_F}(u)$ alors

$$A = QA'P^{-1}$$

Exemple(s) :

(I.12) Écrire le lien existant entre les deux matrices de f dans l'exercice précédent.

Propriété [**I.5**] **:**

1. Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Si $(x_1,\dots,x_n)$ est une famille génératrice de E alors
$$\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Vect}\{f(x_1),\dots,f(x_n)\}$$

2. Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ alors
$$\mathrm{Im}(A)=\mathrm{Vect}\{C_1,\dots,C_p\}$$
où C_j sont les colonnes de A.

Exemple(s) :

I.13 Déterminer une base de $\mathrm{Im}(A)$ où $A=\begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

I.14 Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Montrer que $\mathrm{rg}(A)=1$ si et seulement si il existe deux matrices colonnes $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ non nulles telles que $A=XY^T$.

II Produit et somme de sous-espaces vectoriels

1. Produit de sous-espaces vectoriels

Définition [**II.1**] **:** Soient $E_1,\dots,E_p$ des espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$ et $E=\prod_{i=1}^{p} E_i$. On définit une loi de composition interne sur E notée $+$ par
$$(x_1,x_2,\dots,x_p)+(y_1,y_2,\dots,y_p)=(x_1+y_1,x_2+y_2,\dots,x_p+y_p)$$
et une loi de composition externe par
$$\lambda.(x_1,x_2,\dots,x_p)=(\lambda.x_1,\lambda.x_2,\dots,\lambda.x_p)$$
L'ensemble E, muni de ces deux lois, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel appelé **espace produit** de E_1, E_2, …, E_p.

Remarque(s) :

II.1 Le vecteur nul de E est alors $0_E=(0_{E_1},0_{E_2},\dots,0_{E_p})$.

II.2 On retrouve ainsi la structure d'espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$.

Propriété [**II.2**] **:** Si $E_1,\dots,E_p$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies alors l'espace produit $\prod_{i=1}^{p} E_i$ est de dimension finie et
$$\dim\left(\prod_{i=1}^{p} E_i\right)=\sum_{i=1}^{p}\dim(E_i)$$

Remarque(s) :

II.3 On retrouve ainsi $\dim(\mathbb{K}^p)=p$.

II.4 Si $(e_{i,k})_{1\leqslant k\leqslant n_i}$ est une base de E_i alors une base de $E=\prod_{i=1}^{p} E_i$ est $(u_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ avec $n=n_1+\dots+n_p$ et $u_j=(\underbrace{0,\dots,0}_{\substack{i-1\\ \text{coord}}},\underset{\substack{\uparrow\\ i^{\text{ème}}}}{e_{i,j-(n_1+\dots+n_{i-1})}},\underbrace{0,\dots,0}_{\substack{p-i\\ \text{coord}}})$ si $n_1+\dots+n_{i-1}<j\leqslant n_1+\dots+n_{i-1}+n_i$ $(1\leqslant i\leqslant p)$.

2. Sous-espaces supplémentaires

Définition : Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, on dit que F et G sont supplémentaires (dans E) si

$$F \cap G = \{0\} \text{ et } E = F + G$$

On le note $E = F \oplus G$

Propriété [II.3] :

1. Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E alors $E = F \oplus G$ si et seulement si

$$\forall x \in E, \exists!(y,z) \in F \times G, x = y + z$$

2. Si E est un espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels de E alors les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

i. $E = F \oplus G$

ii. $F \cap G = \{0\}$ et $\dim E = \dim F + \dim G$.

iii. $F + G = E$ et $\dim E = \dim F + \dim G$.

Exemple(s) :

II.5 Trouver des supplémentaires des sous-espaces suivants

a) $H_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x - y + 2z = 0\}$

b) $H_2 = \{P \in \mathbb{R}_4[X], P(0) = P(1) = P(-1) = 0\}$

c) $H_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, (a,b) \in \mathbb{K}^2 \right\}$

II.6 Si $p \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $p \circ p = p$ alors $E = \ker(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$.

II.7 $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ (matrices symétriques et antisymétriques)

II.8 Si $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\deg(P) = n+1$ alors $\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}_n[X] \oplus P\mathbb{K}[X]$

II.9 Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe $p \leqslant n$ tel que $E = \ker(f^p) \oplus \mathrm{Im}(f^p)$ et étudier les endomorphismes induits par f sur ces deux sous-espaces.

Matrices par blocs :
si $E = E_1 \oplus E_2$ et $F = F_1 \oplus F_2$, $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ une base adaptée à la décomposition de E et $\mathcal{B}' = (\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_2)$ une base adaptée à la décomposition de F.
Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$, on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ avec $A_{ij} \in \mathcal{M}_{n_i,p_j}(\mathbb{K})$ si $p_j = \dim(E_j)$ et $n_i = \dim(F_i)$.
Si on note π_1 (resp. π_2) le projecteur sur F_1 parallèlement à F_2 (resp. sur F_2 parallèlement à F_1), alors A_{ij} est la matrice de l'application $f_{ij} : \begin{array}{ccc} E_j & \to & F_i \\ x & \mapsto & \pi_i(f(x)) \end{array}$.
Produit de matrices par blocs : si $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ avec $A_{ij} \in \mathcal{M}_{n_i p_j}(\mathbb{K})$ et $B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$ avec $B_{jk} \in \mathcal{M}_{p_j q_k}(\mathbb{K})$ alors on a $AB = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix}$

Opérations élémentaires sur les matrices :
On définit les matrices élémentaires de$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de la façon suivante :
- Pour $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$ d'inverse $T_{i,j}(-\lambda)$ (matrice de transvection)
- Pour $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{i,i}$ d'inverse $D_i(1/\lambda)$ (matrice de dilatation)
- Pour $i \neq j$, $P_{i,j} = I_n - (E_{i,i} + E_{j,j}) + (E_{i,j} + E_{j,i})$ d'inverse $P_{i,j}$ (matrice de transposition)

La multiplication d'une matrice A à gauche (resp. à droite) par une de ces matrices a un effet sur les lignes (resp. les colonnes) de A :

matrice $M =$	$T_{i,j}(\lambda)$	$D_i(\lambda)$	$P_{i,j}$
effet du produit par M à **gauche** sur les **lignes** de A	$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$	$L_i \leftarrow \lambda L_i$	$L_i \leftrightarrow L_j$
effet du produit par M à **droite** sur les **colonnes** de A	$C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$	$C_i \leftarrow \lambda C_i$	$C_i \leftrightarrow C_j$

Exemple(s) :

(II.10) On peut faire de même des « opérations par blocs » :
si A est inversible, montrer que $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \operatorname{rg}(A) + \operatorname{rg}(D - CA^{-1}B)$

3. Somme directe de p sous-espaces vectoriels

Définition : Soient $E_1, \dots, E_p$ p sous-espaces vectoriels de E. On note $E_1 + \cdots + E_p = \sum_{k=1}^{p} E_k$ la **somme** des sous-espaces $E_1, \dots, E_p$ définie par

$$\sum_{k=1}^{p} E_k = \{x \in E, \exists (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p, x = x_1 + \cdots + x_p\}$$

Remarque(s) :

(II.11) $\sum_{k=1}^{p} E_k = \operatorname{Vect}\left(\bigcup_{k=1}^{p} E_k\right)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E (pour l'inclusion) contenant tous les E_k.

Définition : Si $E_1, \dots, E_p$ sont p sous-espaces vectoriels de E tels que

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p, x_1 + \cdots + x_p = 0 \Rightarrow x_1 = \cdots = x_p = 0$$

on dit que la somme de E_k est **directe** ; on la note alors $E_1 \oplus \cdots \oplus E_p = \bigoplus_{k=1}^{p} E_k$

Attention : La somme des E_k est directe n'est pas équivalente à $E_i \cap E_j = \{0\}$ pour $i \neq j$. c/ex : trois droites 2 à 2 distinctes de $\mathbb{R}^3$.

Exemple(s) :

(II.12) Soient $E_k = \{x \mapsto P(x)e^{kx}, P \in \mathbb{K}[X]\}$, pour $k = 0, 1, 2$. Montrer que E_0, E_1 et E_2 sont en somme directe.

Propriété [II.4] : Soient $E_1, \dots, E_p$ p sous-espaces vectoriels de E. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

i. la somme des E_k est directe.

ii. $\forall x \in \sum_{k=1}^{p} E_k, \exists! (x_1, \dots, x_p) \in \prod_{k=1}^{p} E_k, x = x_1 + \cdots + x_p$

Exemple(s) :

(II.13) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = f$. Montrer que $E = \ker(f) \oplus \ker(f - id_E) \oplus \ker(f + id_E)$.

Propriété [II.5] : (bases, dimensions et sommes directes)

1. Si $E_1, \dots, E_p$ sont p sous-espaces vectoriels de E de dimensions finies et en somme directe alors $F = \bigoplus_{k=1}^{p} E_k$ est de dimension finie et

$$\dim F = \sum_{k=1}^{p} \dim(E_k)$$

de plus, si $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p$ sont des bases respectives de $E_1, \dots, E_p$ alors $(\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p)$ est une base de F appelée **base adaptée à la décomposition**

2. Si E est de dimension finie et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, si $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p$ sont des parties de $\mathcal{B}$ (non vides) telles que $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{p} \mathcal{B}_i$ et $i \neq j \Rightarrow \mathcal{B}_i \cap \mathcal{B}_j = \emptyset$ et si on note $E_i = \text{Vect}(\mathcal{B}_i)$ alors $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$.

3. Soient $E_1, \dots, E_p$ des sous-espaces vectoriels de dimensions finies de E. Alors

$$\dim\left(\sum_{i=1}^{p} E_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim(E_i)$$

4. Soient $E_1, \dots, E_p$ des sous-espaces vectoriels de E, espace de dimension finie. Alors on a équivalence de :

i. $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$.

ii. Les $(E_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ sont en somme directe <u>et</u> $\dim(E) = \sum_{i=1}^{p} \dim(E_i)$.

iii. $E = \sum_{i=1}^{p} E_i$ <u>et</u> $\dim(E) = \sum_{i=1}^{p} \dim(E_i)$.

<u>Exemple(s) :</u>

II.14 Soient $E = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(0) = P(1) = P(2) = 0\}$, $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(1) = P(2) = P(3) = 0\}$ et $G = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(X) = P(-X)\}$. Montrer que $\mathbb{R}_3[X] = E \oplus F \oplus G$ et déterminer une base $\mathbb{R}_3[X]$ adaptée à cette décompositon.

II.15 Soit E un espace vectoriel de dimension n, $(f_1, \dots, f_p) \in \mathcal{L}(E)^p$ tels que $f_1 + \dots + f_p = id_E$ et $\sum_{k=1}^{p} \text{rg}(f_i) \leqslant n$.

a) Montrer que $E = \text{Im}(f_1) \oplus \dots \oplus \text{Im}(f_p)$.

b) Montrer que $f_1, \dots, f_p$ sont des projecteurs et $i \neq j \Rightarrow f_i \circ f_j = 0$.

III Applications linéaires

1. Rang d'une application linéaire

<u>Théorème</u> [III.1] : (Théorème du rang – forme géométrique)
Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Si S est un supplémentaire de $\ker(u)$ dans E alors u induit un isomorphisme de S sur $\text{Im}(u)$, ie

$$\begin{array}{cccc} \tilde{u} & : & S & \longrightarrow & \text{Im}(u) \\ & & x & \longmapsto & u(x) \end{array} \text{ est un isomorphisme.}$$

<u>Conséquence</u> [III.2] : (Théorème du rang)
Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Si <u>E est de dimension finie</u> alors $\text{rg}(u)$ est fini et

$$\text{rg}(u) = \dim(E) - \dim(\ker(u))$$

<u>Remarque(s) :</u>

III.1 Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ alors $\text{rg}(A) = p - \dim(\ker(A))$. C'est donc le nombre de <u>colonnes</u> de A qui intervient dans cette formule !

<u>Exemple(s) :</u>

III.2 Étude du noyau puis de l'image d'une application linéaire : déterminer des bases du noyau puis de l'image de f, canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

(III.3) Étude de l'image puis du noyau : déterminer des bases de l'image puis du noyau de g, canoniquement associée à $B = \begin{pmatrix} -11 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$

Conséquence [III.3] : Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies égales et $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

i. u est un isomorphisme.
ii. u est injectif ($\ker(u) = \{0\}$)
iii. u est surjectif ($\mathrm{rg}(u) = \dim(F)$)

Attention : C'est faux pour un endomorphisme en dimension quelconque. c/ex : $P \mapsto XP$ et $P \mapsto P'$ sur $\mathbb{K}[X]$.

Exemple(s) :

(III.4) Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe $p \leqslant n$ tel que $E = \ker(f^p) \oplus \mathrm{Im}(f^p)$ et étudier les endomorphismes induits par f sur ces deux sous-espaces.

Propriété [III.4] : Soient E, F, G trois espaces vectoriels de dimensions finies, $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$.

1. $\mathrm{rg}(g \circ f) \leqslant \min(\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g))$
2. si f est un isomorphisme de E sur F alors $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(g)$.
3. si g est un isomorphisme de F sur G alors $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(f)$

Remarque(s) :

(III.5) On a en fait utilisé $\ker(f) \subset \ker(g \circ f)$ et $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$

Exemple(s) :

(III.6) Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $r \leqslant \min(n,p)$ et $J_r = \sum_{i=1}^{r} E_{i,i} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Montrer l'équivalence de

i. $\mathrm{rg}(A) = r$.
ii. il existe $(P,Q) \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$ tel que $A = PJ_rQ^{-1}$.

2. Applications linéaires et sommes directes

Propriété [III.5] : Soient E et F deux espaces vectoriels, $E_1, \dots, E_p$ des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = \bigoplus_{k=1}^{p} E_k$ et pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $u_i \in \mathcal{L}(E_i, F)$. Alors il existe une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que

$$\forall i \in [\![1,p]\!], u_{|E_i} = u_i$$

Remarque(s) :

(III.7) Si $\mathcal{B}_i$ est une base de E_i, $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p)$ et $\mathcal{B}'$ une base de F alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_p \end{pmatrix}$ où $A_i = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_i,\mathcal{B}'}(u_i)$

Si $x \in E$ et $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_p \end{pmatrix}$ alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u(x)) = AX = \begin{pmatrix} A_1X_1 + \dots + A_pX_p \end{pmatrix}$.

Exemple(s) :

(III.8) Soient $E_1, \dots, E_n$ des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = \bigoplus_{k=1}^{n} E_k$. Pour $i \in [\![1,n]\!]$, on note p_i l'endomorphisme de E tel que $p_{i|E_i} = id_{|E_i}$ et $p_{i|E_k} = 0$ si $i \neq k$. Alors p_i est le projecteur sur

E_i parallèlement à $\bigoplus_{j\neq i} E_j$.

De plus on a $\sum_{k=1}^{n} p_k = id_E$ et $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, i \neq j \Rightarrow p_i \circ p_j = 0$

3. Sous-espaces stables par un endomorphisme

Définition : Soient F un sous-espace vectoriel de E et $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que F est **stable par** f si $f(F) \subset F$, ie

$$\forall x \in F, f(x) \in F.$$

Dans ce cas, la restiction de f à F **induit** un endomorphisme de F défini par $\widetilde{f} : \left\{ \begin{array}{ccc} F & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right.$

Exemple(s) :

(III.9) Si E est un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E tel que toute droite de E est stable par f alors f est une homothétie.

Propriété [III.6] : Si u et v sont deux endomorphismes de E qui commutent ($u \circ v = v \circ u$) alors

$$\ker(u) \text{ et } \mathrm{Im}(u) \text{ sont stables par } v.$$

Exemple(s) :

(III.10) Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et p un projecteur de E. Montrer que $u \circ p = p \circ u$ si et seulement si $\ker(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont stables par u.

Propriété [III.7] : Soient E un espace vectoriel de dimension finie, F un sous-espace vectoriel de E et $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E telle que $\mathcal{B}_F = (e_1, \ldots, e_p)$ soit une base de F. On a équivalence de :

i. F est stable par f

ii. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ est triangulaire par blocs.

$A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ est alors la matrice dans la base $\mathcal{B}_F$ de l'endomorphisme de F induit par f.

Conséquence [III.8] : Si $E = \bigoplus_{k=1}^{p} E_k$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ alors tous les E_i sont stables par f si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonale par blocs dans toute base $\mathcal{B}$ adaptée à la décomposition

Exemple(s) :

(III.11) Si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E et $u \in \mathcal{L}(E)$ alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonale si et seulement si pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\mathrm{Vect}\{e_i\}$ est stable par u.

(III.12) Avec les mêmes notations, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est triangulaire supérieure si et seulement si pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\mathrm{Vect}\{e_1, \ldots, e_i\}$ est stable par u.

(III.13) Si A est triangulaire supérieure et inversible alors A^{-1} est aussi triangulaire supérieure.

4. Polynômes d'endomorphisme et de matrice carrée

Définition :

1. Soient E un espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $u^k = \begin{cases} id_E & \text{si } k = 0 \\ u \circ u^{k-1} & \text{si } k \geqslant 1 \end{cases}$

Si $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, on définit l'endomorphisme $P(u)$ par

$$P(u) = \sum_{k=0}^{d} a_k u^k = a_d u^d + a_{d-1} u^{d-1} + \cdots + a_1 u + a_0 id_E$$

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $A^k = \begin{cases} I_n & \text{si } k = 0 \\ A \times A^{k-1} & \text{si } k \geqslant 1 \end{cases}$

Si $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, on définit la matrice $P(A)$ par

$$P(A) = \sum_{k=0}^{d} a_k A^k = a_d A^d + a_{d-1} A^{d-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I_n$$

Attention :
- *$P(u)$ n'a de sens que si u est un endomorphisme, $P(A)$ seulement si A est une matrice carrée.*
- *Ne pas oublier de rajouter id_E (ou I_n) : $u + 1$ n'a aucun sens si $u \in \mathcal{L}(E)$.*

Propriété [III.9] : (Règles de calcul sur les polynômes d'endomorphisme et polynômes de matrice)

1. Soient E un espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$.

$$\begin{cases} \forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2, \forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2, (\alpha P + \beta Q)(u) = \alpha P(u) + \beta Q(u) \\ \forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2, (PQ)(u) = P(u) \circ Q(u) \\ P(u) = id_E \text{ si } P = 1 \end{cases}$$

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\begin{cases} \forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2, \forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2, (\alpha P + \beta Q)(A) = \alpha P(A) + \beta Q(A) \\ \forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2, (PQ)(A) = P(A) \times Q(A) \\ P(A) = I_n \text{ si } P = 1 \end{cases}$$

Attention : On $P(u)(x) \neq P(u(x))$: la notation $P(u(x))$ (ou $P(AX)$) n'a aucun sens !

Conséquence [III.10] :

1. Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, $\mathbb{K}[u] = \{v \in \mathcal{L}(E), \exists P \in \mathbb{K}[X], v = P(u)\}$ (l'ensemble des polynômes en u) est un sous-espace vectoriel, stable par composition, de $\mathcal{L}(E)$ sur lequel la composition est commutative.
En particulier $\forall P \in \mathbb{K}[X], P(u) \circ u = u \circ P(u)$.

2. Pour tout polynôme P de $\mathbb{K}[X]$, $\ker(P(u))$ et $\mathrm{Im}(P(u))$ sont des sous-espaces vectoriels de E stables par u.

Remarque(s) :

III.14 Soient E est un espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}$ une base de E, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Si $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ alors $P(A) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(P(u))$.
Inversement, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et si u est l'endomorphisme canoniquement associé à A, alors $P(u)$ est l'endomorphisme canoniquement associé à $P(A)$.

Propriété [III.11] : Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles qu'il existe $Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $B = Q^{-1}AQ$. Alors pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, on a
$$P(B) = Q^{-1}P(A)Q.$$
On en déduit en particulier que $P(A)$ et $P(B)$ sont elles aussi semblables.

Définition :

1. Soient E un espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. On dit que P est **un polynôme annulateur de** u si
$$P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$
2. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. On dit que P est **un polynôme annulateur de** A si
$$P(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}.$$

Remarque(s) :

III.15 Si P et Q sont deux polynômes annulateurs de A (ou de u) et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ alors $\alpha P + \beta Q$ est aussi un polynôme annulateur de A (ou de u).
Si R est un polynôme quelconque alors PR est annulateur de A (ou de u).
S'il existe un polynôme annulateur non nul de u, il n'est jamais unique !

III.16 Il existe un polynôme annulateur de A de degré p si et seulement si la famille $(I_n, A, \dots, A^p)$ est liée.
Chercher un polynôme annulateur de A est donc équivalent à chercher une relation de liaison sur les puissances de A.

Propriété [III.12] :

1. Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Il existe un polynôme annulateur non nul de u.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Il existe un polynôme annulateur non nul de A.

Exemple(s) :

III.17 Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur non nul de A et $p = \deg(P)$. Alors $\mathbb{K}[A] = \mathrm{Vect}\left\{I_n, A, \dots, A^{p-1}\right\}$

III.18 Utilisation d'un polynôme annulateur pour calculer l'inverse d'une matrice (ou d'un endomorphisme) : si $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_pX^p$ est un polynôme annulateur de A tel que $a_0 = P(0) \neq 0$ alors A est inversible et A^{-1} est un polynôme en A.
Application à $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $a_{i,j} = \begin{cases} \alpha & \text{si } i = j \\ \beta & \text{sinon} \end{cases}$

III.19 Utilisation d'un polynôme annulateur pour calculer les puissances d'une matrice (ou d'un endomorphisme) : soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $P = X(X-1)(X-2)$ soit annulateur de A ; calculer A^p (pour $p \in \mathbb{N}$). Même question avec A annulée par $P = (X-1)^2(X-2)$.

III.20 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(I_2 + \frac{1}{n}A\right)^n$.

Remarque(s) :

III.21 Si A est inversible, il existe des polynômes annulateurs de A qui s'annulent en 0 ; ex : $X^2 - X$ est annulateur de I_n.

III.22 On peut utiliser un polynôme annulateur de A pour calculer $Q(A)$ avec Q un polynôme quelconque (et pas seulement $Q = X^p$).

IV Formes linéaires et hyperplans

1. Hyperplans dans un espace vectoriel de dimension finie

Définition : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une **forme linéaire** sur E est une application linéaire de E vers $\mathbb{K}$.

Remarque(s) :

IV.1 Si E est un espace vectoriel de de dimension finie p, f une forme linéaire sur E et $\mathcal{B}$ une base de E alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ (matrice ligne).

Exemple(s) :

IV.2 Soit e un vecteur non nul de E, espace vectoriel de dimension finie. Montrer qu'il existe une forme linéaire φ sur E telle que $\varphi(e) = 1$.

Définition [**IV.1**] **:** Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et H un sous-espace vectoriel de E. On dit que H est un **hyperplan** de E s'il vérifie une des trois propriétés équivalentes (donc les trois) suivantes :

i. Il existe une droite D de E telle que $E = H \oplus D$.
ii. Il existe une forme linéaire non nulle φ sur E telle que $H = \ker(\varphi)$.
iii. $\dim(H) = n - 1$

Exemple(s) :

IV.3 Les hyperplans de $\mathbb{R}^2$ sont les droites ; les hyperplans de $\mathbb{R}^3$ sont les plans.

IV.4 $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y - 2z = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^4$.

IV.5 $\{P \in \mathbb{K}[X], P(0) + P''(1) = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{K}[X]$.

Propriété [**IV.2**] **:** Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et H un hyperplan de E. Il existe $a_1, \dots, a_n$ des scalaires non tous nuls tels que

$$x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n \in H \text{ si et seulement si } a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$$

L'équation $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$ est une **équation cartésienne de H dans la base $\mathcal{B}$**. Une telle équation est unique à une constante multiplicative près.

Remarque(s) :

IV.6 On retrouve les équations cartésiennes des droites dans $\mathbb{R}^2$ et des plans dans $\mathbb{R}^3$.

IV.7 On a en fait prouvé que si φ et ψ sont deux formes linéaires non nulles sur E alors $\ker(\varphi) = \ker(\psi)$ si et seulement si il existe $\lambda \neq 0$ tel que $\psi = \lambda\varphi$.

2. Trace d'une matrice carrée et d'un endomorphisme

Définition : Pour $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit sa **trace**, notée $\mathrm{Tr}(A)$, par $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

Propriété [**IV.3**] **:**

1. Tr est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, ie $\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \forall(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, \mathrm{Tr}(\alpha A + \beta B) = \alpha\,\mathrm{Tr}(A) + \beta\,\mathrm{Tr}(B)$
2. $\forall(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, \mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$
3. $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(A^T)$

Attention : $\operatorname{Tr}(AB) \neq \operatorname{Tr}(A)\operatorname{Tr}(B)$ *et* $\operatorname{Tr}(ABC) = \operatorname{Tr}(BCA) = \operatorname{Tr}(CAB) \neq \operatorname{Tr}(ACB)$ *; c/ex :* $A = C^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Conséquence [IV.4] : Si A et B sont deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors $\operatorname{Tr}(A) = \operatorname{Tr}(B)$.

Attention : La réciproque est fausse ; c/ex $A = I_2$ *et* $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *ne sont pas semblables.*

Définition [IV.5] : Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On appelle **trace** de f la trace de toute matrice de f dans une base de E : $\operatorname{Tr}(f) = \operatorname{Tr}(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$ pour toute base $\mathcal{B}$ de E.

Attention : La trace n'est définie que pour un endomorphisme en dimension finie : la trace de l'application linéaire $P \in \mathbb{R}_n[X] \longmapsto (P(0), \ldots, P(n)) \in \mathbb{R}^{n+1}$ *n'existe pas.*

Conséquence [IV.6] : Si f et g sont deux endomorphismes de E, espace vectoriel de dimension finie, alors on a :

1. $\operatorname{Tr}(\alpha f + \beta g) = \alpha \operatorname{Tr}(f) + \beta \operatorname{Tr}(g)$ pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$.
2. $\operatorname{Tr}(g \circ f) = \operatorname{Tr}(f \circ g)$.

Exemple(s) :

IV.8 Soient E un espace vectoriel de dimension finie et p un projecteur de E. Alors on a $\operatorname{Tr}(p) = \operatorname{rg}(p)$.
La réciproque est fausse ; c/ex : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice telle que $\operatorname{Tr}(A) = \operatorname{rg}(A)$ mais $A^2 \neq A$.

V Déterminants

1. Propriétés des déterminants

Définition :

1. Soient E un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B}$ une base de E. Le **déterminant dans la base** $\mathcal{B}$ est l'unique application $\det_{\mathcal{B}} : E^n \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que
   - $\det_{\mathcal{B}}$ est linéaire par rapport à chacune de ses variables.
   - $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n) = 0$ s'il existe $i \neq j$ tels que $x_i = x_j$.
   - $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$
2. **Déterminant d'une matrice carrée :** det est l'unique application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vers $\mathbb{K}$ telle que
   - $(C_1, \ldots, C_n) \mapsto \det(C_1, \ldots, C_n)$ est linéaire par rapport à chacune des colonnes C_j.
   - $\det(C_1, \ldots, C_n) = 0$ s'il existe $i \neq j$ tels que $C_i = C_j$.
   - $\det(I_n) = 1$.

Propriété [V.1] :

1. $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \forall \lambda \in \mathbb{K}, \det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.
2. $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, \det(AB) = \det(A) \times \det(B)$.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si $\det(A) \neq 0$.
   Si A est inversible alors $\det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det(A)}$.
4. $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \det\left(A^T\right) = \det(A)$.

Attention : Pour $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$*, on a* $\det(AB) = \det(BA)$*. Ce résultat n'est pas valable pour* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *et* $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

Conséquence [**V.2**] **:** Soient E un espace vectoriel de dimension finie n, $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$ et $\mathcal{B}$ est une base de E quelconque. Alors

$$(u_1, \dots, u_n) \text{ est une base de } E \text{ si et seulement si } \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) \neq 0,$$

Définition [**V.3**] **:** Soient E un espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}$ une base de E et $f \in \mathcal{L}(E)$, le **déterminant de** f, noté $\det(f)$ est défini par

$$\det(f) = \det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$$

Ce scalaire est indépendant de la base $\mathcal{B}$ de E.

Exemple(s) :

(V.1) Si F et G sont deux espaces supplémentaires de E, espace vectoriel de dimension finie, et s la symétrie par rapport à F parallèlement à G alors $\det(s) = (-1)^{\dim(G)}$.

Attention : Le déterminant n'est défini que pour un endomorphisme en dimension finie : l'application linéaire $P \in \mathbb{R}_n[X] \longmapsto (P(0), \dots, P(n)) \in \mathbb{R}^{n+1}$ *n'a pas de déterminant.*

Propriété [**V.4**] **:** Soit E un espace vectoriel de dimension finie n.

1. $\forall f \in \mathcal{L}(E), \forall \lambda \in \mathbb{K}, \det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$
2. $\forall (f, g) \in \mathcal{L}(E)^2, \det(f \circ g) = \det(f) \times \det(g)$.
3. $\forall f \in \mathcal{L}(E), \det(f) \neq 0 \Leftrightarrow f \in \mathcal{GL}(E)$ et si $f \in \mathcal{GL}(E), \det(f^{-1}) = \dfrac{1}{\det(f)}$

Attention : On a en particulier $\det(f \circ g) = \det(g \circ f)$ *si* f *et* g *sont deux endomorphismes de* E *; ce n'est pas valable pour* $f \in \mathcal{L}(E, F)$ *et* $g \in \mathcal{L}(F, E)$.

2. Calculs de déterminants

Rappels :
- ◇ Un déterminant est nul si et seulement si ses lignes (ou colonnes) sont liées.
- ◇ Si on échange deux lignes (ou deux colonnes) d'un déterminant, on le multiplie par -1.
- ◇ On ne change pas la valeur d'un déterminant en ajoutant à une ligne (resp. une colonne) une combinaison linéaire des autres lignes (resp. colonnes).
- ◇ Si on mulitplie une ligne (ou une colonne) d'un déterminant par $\lambda \in \mathbb{K}$, on multiplie le déterminant par λ.

Propriété [**V.5**] **:** Soient $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $(h, k) \in [\![1, n]\!]^2$. Pour $(p, q) \in [\![1, n]\!]^2$, on note $\Delta_{p,q}$, le déterminant de la matrice extraite de A en supprimant la $p^{\text{ème}}$ ligne et la $q^{\text{ème}}$ colonne :

$$\Delta_{p,q} = \det (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant n \\ i \neq p \text{ et } j \neq q}}$$

1. **(Développement suivant la $h^{\text{ème}}$ ligne)** : $\det(A) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} (-1)^{h+j} a_{h,j} \Delta_{h,j}$
2. **(Développement suivant la $k^{\text{ème}}$ colonne)** : $\det(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{i,k} \Delta_{i,k}$

Conséquence [**V.6**] **:** Si $A = (a_{i,k})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est triangulaire alors $\det(A) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$

Propriété [V.7] : (Déterminant de Vandermonde)
Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. On a
$$\det\left(x_i^{j-1}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (x_j - x_i)$$

Propriété [V.8] : (Interpolation de Lagrange)
Soient $n+1$ scalaires 2 à 2 distincts, $a_0, \dots, a_n$. Alors

1. L'application $\varphi : P(X) \in \mathbb{K}_n[X] \longmapsto (P(a_0), \dots, P(a_n))$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ sur $\mathbb{K}^{n+1}$.
2. Si $(y_0, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$, alors il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que $\forall i \in [\![0, n+1]\!]\,, P(a_i) = y_i$.
3. Si on définit $L_k(X) = \displaystyle\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} \frac{X - a_j}{a_k - a_j}$, pour $k \in [\![0, n]\!]$, la famille $\mathcal{B}_L = (L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ appelée **famille des polynômes interpolateurs de Lagrange aux points** $a_0, \dots, a_n$.
   De plus $L_k(a_i) = \delta_{i,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
4. Pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$, on a
$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} P(a_k) L_k(X)$$
   ie les coordonnées de P dans la base $\mathcal{B}_L$ sont $(P(a_0), \dots, P(a_n))$
5. On a en particulier $1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} L_k(X)$
6. L'unique polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$ tel que $\forall i \in [\![0, n]\!]\,, P(a_i) = y_i$ est $P(X) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} y_i L_i(X)$.

Remarque(s) :

(V.2) Lien entre l'interpolation de Lagrange et les déterminants de Vandermonde : si $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ sont $n+1$ scalaires deux à deux distincts, le déterminant du système $\forall i \in [\![0, n]\!]\; P(\alpha_i) = y_i$ où les inconnues sont les $n+1$ coefficients du polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ est un déterminant de Vandermonde

Exemple(s) :

(V.3) Soient $a_0, \dots, a_n$ des réels et $P_k = (X + a_k)^n$. Montrer que $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ si et seulement si les a_i sont deux à deux distincts.

Propriété [V.9] : (Matrices triangulaires par blocs)
Soient $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ (carrée), $C \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$ (carrée) et $B \in \mathcal{M}_{p,n-k}(\mathbb{K})$. Alors on a
$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det(A) \times \det(C)$$

Remarque(s) :

(V.4) On aussi $\det\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix} = \det(A) \times \det(C)$ si A et C sont carrées.