Correction du DM1

(inspiré de Centrale TSI 2000 maths 1)

Partie I :

1. La fonction $h : x \mapsto \ln(1+x)$ est concave sur $]-1,+\infty[$ donc $h(x) \leqslant h(0) + h'(0)(x-0) = x$ ou étudier $x \mapsto x - \ln(1+x)$ (qui est minimale et nulle en 0)

2. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+1} + \ln(n) - \ln(n+1) = \dfrac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) \leqslant 0$ donc (u_n) décroît.

D'autre part, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{n} + \ln(n) - \ln(n+1) = \dfrac{1}{n} - \ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) \geqslant 0$ donc (v_n) croît. Enfin, $u_n - v_n = \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\boxed{(u_n) \text{ et } (v_n) \text{ sont adjacentes}}$

3. On a $0 \leqslant \gamma - v_n \leqslant u_n - v_n = \dfrac{1}{n}$ donc si $\dfrac{1}{n} \leqslant 10^{-1}$ alors v_n est une valeur approchée (par défaut) de γ à 10^{-1} près.

Il suffit pour cela de prendre $n \geqslant 10$: une valeur approchée à 10^{-1} près est donc $\boxed{v_{10} = \dfrac{7129}{2520} - \ln(11) \approx 0,5}$

4. a) On a $\dfrac{1-t^n}{1-t} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} t^k$ pour $t \in [0,1[$; les fonctions $t \mapsto t^k$ et $t \mapsto \dfrac{1-t^n}{1-t}$ sont continues sur $[0,1]$ (prolongeable par continuité en 1 pour la seconde) donc en intégrant, on obtient $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \frac{1-t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1}}$

b) Il suffit de poser $t = 1 - \dfrac{x}{n}$: $x \mapsto 1 - \dfrac{x}{n}$ est $\mathcal{C}^1$, bijective strictement décroissante de $[0,n]$ sur $[0,1]$ et on a $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \frac{1-t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^n \frac{1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}{x}\,\mathrm{d}x}$

On a alors $u_n = \displaystyle\int_0^n \frac{1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}{x}\,\mathrm{d}x - \int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{x}$ donc on a $\boxed{u_n = \displaystyle\int_0^1 \left(1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\right)\frac{\mathrm{d}x}{x} - \int_1^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \frac{\mathrm{d}x}{x}}$

5. a) On pose $h(x) = e^x\left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n = \exp\left[x - n\ln\left(1-\dfrac{x}{n}\right)\right]$ pour $x \in [0,n[$ donc, d'après **I.1**, on a $h(x) \leqslant 1$ si $x \in [0,n[$; ce qui reste valable pour $x = n$ puisque $h(n) = 0$. On a donc prouvé l'inégalité de gauche.

De l'autre côté, h est $\mathcal{C}^1$ sur $[0,n[$ et on a $h'(t) = -\dfrac{t}{n}e^t\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^{n-1} = -\dfrac{t}{n}\exp\left[t + (n-1)\ln\left(1-\dfrac{t}{n}\right)\right]$ donc, avec **I.1**, $|h'(t)| \leqslant \dfrac{t}{n}\exp\left(\dfrac{t}{n}\right) \leqslant \dfrac{ex}{n}$ si $t \in [0,x] \subset [0,n[$. On en déduit, par l'inégalité des accroissements finis appliquée à h sur $[0,x]$, $|h(0)-h(x)| \leqslant x \times \dfrac{ex}{n}$, ce qui donne le résultat sur $[0,n[$ car $h(0)-h(x) = 1-h(x) \geqslant 0$.

Le résultat reste aussi valable pour $x = n$ donc $\boxed{\forall x \in [0,n], 0 \leqslant 1 - e^x\left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n \leqslant \dfrac{ex^2}{n}}$

b) $x \mapsto \dfrac{e^{-x}}{x}$ est continue sur $[1,+\infty[$ et $0 \leqslant \dfrac{e^{-x}}{x} \leqslant e^{-x}$ donc, comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x$ existe, $\boxed{\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x \text{ existe}}$

$x \mapsto \dfrac{1-e^{-x}}{x}$ continue sur $]0,1]$ et prolongeable par continuité en 0 donc $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x \text{ existe}}$

$$u_n - \int_0^1 \left(1-e^{-x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x} + \int_1^{+\infty} e^{-x}\frac{\mathrm{d}x}{x} = \int_0^n \left(e^{-x} - \left(1-\frac{x}{n}\right)^n\right)\frac{\mathrm{d}x}{x} + \int_n^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x.$$

On utilise alors la question précédente : $0 \leqslant \displaystyle\int_0^n \left(e^{-x} - \left(1-\frac{x}{n}\right)^n\right)\frac{\mathrm{d}x}{x} \leqslant \frac{e}{n}\int_0^n xe^{-x}\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, car $\displaystyle\int_0^n xe^{-x}\,\mathrm{d}x \overset{\text{IPP}}{=} -ne^{-n} + 1 - e^{-n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Enfin $\displaystyle\int_n^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x$ est le reste d'une intégrale convergente donc tend vers 0 (ou bien $0 \leqslant \displaystyle\int_n^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n}\int_n^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n}$).

En passant à la limite on a bien $\boxed{\gamma = \displaystyle\int_0^1 \left(1-e^{-x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x} - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x}$

Partie II :

1. On vérifie que $\boxed{\lim\limits_{0} \varphi = \dfrac{1}{2}}$ puis $\lim\limits_{+\infty} \varphi = 1$ donc $|\varphi| \leqslant 2$ sur $[A, +\infty[$ et comme φ est (prolongée) continue sur $[0, A]$, elle y est bornée donc $\boxed{\varphi \text{ est bornée sur } \mathbb{R}^{+*}}$

2. La fonction $x \mapsto \varphi(x)e^{-x}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, prolongeable par continuité en 0 ; de plus $\varphi(x) = \dfrac{e^{-x} - 1 + x}{x(1 - e^{-x})} \geqslant 0$ d'après **I.1** et $0 \leqslant e^{-x}\varphi(x) \leqslant Ce^{-x}$ d'après **II.1** donc, comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x$ existe, $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\varphi(x)\,\mathrm{d}x \text{ existe}}$

3. Si $a > 0$, la fonction $x \mapsto \dfrac{e^{-x}}{x}$ est continue sur $[a, +\infty[$ et $0 \leqslant \dfrac{e^{-x}}{x} \leqslant e^{-x}$ sur $[1, +\infty[$ donc $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x$ existe.
De même, avec $0 \leqslant \dfrac{e^{-nx}}{x} \leqslant e^{-nx}$ sur $[1, +\infty[$ et $n > 0$, on vérifie que $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{x}\,\mathrm{d}x$ existe donc $\boxed{I_n(a) \text{ existe}}$
De plus, les deux intégrales étant convergentes, on a $I_n(a) = \displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x - \int_a^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{x}\,\mathrm{d}x$; en posant $u = nx$ ($x \mapsto nx$ est $\mathcal{C}^1$ bijectif strictement croissante de $[a, +\infty[$ sur $[na, +\infty[$), $I_n(a) = \displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x - \int_{na}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u = \int_a^{na} \frac{e^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x$.
Puis $I_n(a) = \displaystyle\int_a^{na} \frac{\mathrm{d}x}{x} - \int_a^{na} \frac{1 - e^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x$ donc $\boxed{I_n(a) = \ln(n) - \displaystyle\int_a^{na} \frac{1 - e^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x}$

4. La fonction $x \mapsto \dfrac{e^{-x} - e^{-nx}}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{-x} - e^{-nx}}{x} = n - 1$ donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x}\,\mathrm{d}x$ existe et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x}\,\mathrm{d}x$ aussi (déjà vu).
On en déduit $\lim\limits_{a \to 0} I_n(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x}\,\mathrm{d}x$. D'autre part, $x \mapsto \dfrac{1 - e^{-x}}{x}$ est continue et bornée, par M, sur $\mathbb{R}^{+*}$ (car tend vers 1 en 0 et 0 en $+\infty$) donc $0 \leqslant \displaystyle\int_a^{na} \frac{1 - e^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant (na - a) \times M$, ce qui signifie que $\lim\limits_{a \to 0} I_n(a) = \ln(n)$ et $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(n)}$

5. $v_n = S_{n-1} - \ln(n) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1 - t^{n-1}}{1 - t}\,\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-(n-1)x}}{1 - e^{-x}} e^{-x}\,\mathrm{d}x - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x}\,\mathrm{d}x$ en posant $t = e^{-x}$ ($x \mapsto e^{-x}$ est $\mathcal{C}^1$ bijectif strictement décroissant de $\mathbb{R}^+$ sur $]0, 1]$) puis, en regroupant les deux intégrales, $\boxed{v_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(e^{-x} - e^{-nx}\right) \varphi(x)\,\mathrm{d}x}$

6. Il suffit de montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-nx}\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0$ ce qui est vrai car, φ étant bornée ($|\varphi| \leqslant C$), on a $0 \leqslant e^{-nx}\varphi(x) \leqslant Ce^{-nx}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-nx}\,\mathrm{d}x$ existe donc $0 \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-nx}\varphi(x)\,\mathrm{d}x \leqslant C \int_0^{+\infty} e^{-nx}\,\mathrm{d}x = \frac{C}{n}$. On a donc bien $\boxed{\gamma = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\varphi(x)\,\mathrm{d}x}$