1. Calcul d'une intégrale

Le but de cette question est de calculer $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4}$.

a) Justifier la convergence de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4}$ et $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\,\mathrm{d}t}{1+t^4}$.
Calculer J ; on pourra remarquer que $1+t^4 = 1+(t^2)^2$.

b) Montrer par un changement de variable que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{1+t^4}$.

c) Factoriser le polynôme $1+X^4$ en produit de facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$.

d) Calculer $I - J\sqrt{2} + I$ et en déduire la valeur de I.

2. Etude d'une fonction

Dans cette partie, on s'intéresse à F, définie par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(t^2+i)x^2}}{t^2+i}\,\mathrm{d}t$$

a) Montrer que $F(x)$ existe pour tout réel x.

Dans la suite, on admettra que F est continue sur $\mathbb{R}^+$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que

$$\forall x > 0, F'(x) = -2x \int_0^{+\infty} e^{-(t^2+i)x^2}\,\mathrm{d}t$$

Les 5/2 peuvent démontrer ces résultats.

b) En admettant $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, montrer que $F'(x) = -\sqrt{\pi}e^{-ix^2}$ pour $x > 0$.

c) Justifier que $\forall x > 0, |F(x)| \leqslant \dfrac{\sqrt{\pi}}{2x}$ et en déduire la limite de F en $+\infty$.

3. Les intégrales de Fresnel

a) Déduire de ce qui précède que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ix^2}\,\mathrm{d}x$ converge et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+i} = \sqrt{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-ix^2}\,\mathrm{d}x$.

b) Déterminer la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ix^2}\,\mathrm{d}x$.

c) Que valent $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(t^2)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$?