TD3 : Intégration

Exercice 1

1. Montrer la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$

2. La fonction $t \mapsto \dfrac{\operatorname{ch}\left(\sqrt{t}\right)\ln t}{\sqrt{t}+\cos t}$ est-elle intégrable sur $]0,1]$?

3. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t^2-1)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$ est-elle convergente ?

4. Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$

a) On suppose $\beta > 0$. Déterminer la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^\alpha e^{-t^\beta}\,\mathrm{d}t$.

b) Toujours avec $\beta > 0$, déterminer la nature de $\displaystyle\int_0^1 t^\alpha e^{-t^\beta}\,\mathrm{d}t$.

En déduire la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t^\beta}\,\mathrm{d}t$ en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta > 0$.

c) Étudier la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t^\beta}\,\mathrm{d}t$ dans les cas $\beta < 0$ et $\beta = 0$.

Exercice 2 (IMT PSI 2019)

Justifier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1 - t\arctan\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$ puis la calculer.

Exercice 3 (CCP PSI 2010)

Déterminer la limite en 0 de $tf(t)$ où $f(t) = \exp\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}} + \ln t\dfrac{\sin t}{t}\right)$.

f est-elle intégrable sur $]0,1]$?

Exercice 4

Soit f continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$ telle que $t \mapsto f(t)e^{-\alpha t}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x > \alpha$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n f(t) e^{-xt}\,\mathrm{d}t$ est convergente. *(*)*

Exercice 5 (CCP PSI 2018)

1. Montrer que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ existe.

2. Montrer que $I = \dfrac{3}{4}\displaystyle\lim_{x\to 0}\int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t$. *(*)*

3. Déterminer la valeur de I. *(*)*

Indications

Exercice 4

1. *pour appliquer le théorème de comparaison, on dispose, dans cet exercice, d'une fonction supplémentaire par rapport à celles vues en cours.*

Exercice 5

2. *commencer par* $I = \displaystyle\lim_{x\to 0}\int_x^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ *et linéariser* $\sin^3 t$

3. *introduire* $\displaystyle\int_x^{3x} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ *pour « compenser »* $\dfrac{\sin t}{t}$ *au voisinage de* 0.