

TD4 : Algèbre linéaire

Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $\mathbb{R}^4 = \ker(A - I_4) \oplus \ker(A + I_4) \oplus \ker(A - 3I_4)$.

Exercice 2 (CCINP PSI 2022)

Soient E un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^{p-1} \neq 0$ et $f^p = 0$ pour un entier $p \geq 1$.

1. Existe-t-il $k \leq p$ tel que $f^k = 0$?
2. Montrer qu'il existe un vecteur $x_0 \in E$ tel que $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ soit libre. En déduire $p \leq n$. (*)
Que vaut f^n ?
3. On suppose qu'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f = g^2$, montrer que $2p - 1 \leq n$

Exercice 3 (CCINP PSI 2019)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

1. Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
2. Montrer que si $B^2 = A$ alors $\ker(A^2)$ est stable par B ; que peut-on en déduire ? (*)

Exercice 4 (CCINP PSI 2021)

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ non nul tel que $f^3 + f = 0$.

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker(f) \oplus \ker(f^2 + id)$ et $\ker(f^2 + id) \neq \{0\}$
2. Soit $x \in \ker(f^2 + id)$ non nul, montrer que $(x, f(x))$ est libre
3. Déterminer les dimensions de $\ker(f^2 + id)$ et $\ker(f)$.

4. Montrer qu'il existe une base \mathcal{B} de \mathbb{R}^3 dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

5. Trouver les $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f = u^2$? (*)

Exercice 5 (Mines-Ponts PSI 2022)

Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer M^n pour $n \geq 1$. (*)
2. Déterminer une base de $F = \text{Vect}\{M^n, n \geq 1\}$.
3. Montrer que le commutant de M est exactement F .

Indications

Exercice 2

2. dans une famille libre, aucun vecteur ne doit être nul

Exercice 3

2. utiliser la conclusion de l'exercice 2

Exercice 4

5. chercher des espaces stables par u pour simplifier la forme de la matrice de u avant d'introduire ses coefficients.

Exercice 5

1. écrire $M = I_3 + N$ et vérifier N nilpotente.