Correction du DM2

1. a) Les deux fonctions $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^4}$ et $t \mapsto \dfrac{t}{1+t^4}$ sont $\mathcal{CM}^0$ sur $[0,+\infty[$, de plus $\dfrac{1}{1+t^4} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^4}$ et $\dfrac{t}{1+t^4} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^3}$ donc $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^4}$ et $t \mapsto \dfrac{t}{1+t^4}$ sont intégrables sur $\mathbb{R}^+$ et $\boxed{I \text{ et } J \text{ existent}}$

On a $J = \left[\dfrac{1}{2}\arctan(t^2)\right]_0^{+\infty}$ donc $\boxed{J = \dfrac{\pi}{4}}$

b) On pose $u = \dfrac{1}{t}$: la fonction $u \mapsto \dfrac{1}{u}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ strictement décroissante et bijective de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc $I = \displaystyle\int_{+\infty}^{0} \frac{-1/u^2}{1+1/u^4}\,\mathrm{d}u$ donc $\boxed{I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t}$

c) $X^4+1 = (X^2+1)^2 - 2X^2 = \boxed{(X^2+X\sqrt{2}+1)(X^2-X\sqrt{2}+1)}$ les deux polynômes sont sans racines réelles donc irréductibles sur $\mathbb{R}$.

Comme $1+X^4$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, on pouvait dès le début dire que sa décomposition comporte deux facteurs de degré 2 sans racines réelles.

d) $I - J\sqrt{2} + I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-t\sqrt{2}+t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t\sqrt{2}+t^2} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\left(t+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}} = 2\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+(1+t\sqrt{2})^2}$

donc $2I - J\sqrt{2} = \left[\sqrt{2}\arctan(1+t\sqrt{2})\right]_0^{+\infty} = \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$. On en déduit $\boxed{I = \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}}$

2. a) Pour $x \geqslant 0$ fixé, la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-(t^2+i)x^2}}{t^2+i}$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $[0,+\infty[$ et $\left|\dfrac{e^{-(t^2+i)x^2}}{t^2+i}\right| \leqslant \dfrac{1}{|t^2+i|} = \dfrac{1}{\sqrt{t^4+1}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$

donc $\boxed{t \mapsto \dfrac{e^{-(t^2+i)x^2}}{t^2+i} \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}^+ \text{ si } x \geqslant 0}$

b) On a, pour $x > 0$, $F'(x) = -2xe^{-ix^2}\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2x^2}\,\mathrm{d}t$. On pose $u = xt$: la fonction $u \mapsto \dfrac{t}{x}$ est $\mathcal{C}^1$ strictement croissante et bijective de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$ donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2x^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\frac{\mathrm{d}u}{x}$, puis $\boxed{F'(x) = -\sqrt{\pi}e^{-ix^2} \text{ pour } x > 0}$

c) Pour $x > 0$ et $t > 0$, on a $\left|\dfrac{e^{-(t^2+i)}}{t^2+i}\right| = \dfrac{e^{-t^2x^2}}{\sqrt{1+t^4}} \leqslant e^{-t^2x^2}$. La fonction $t \mapsto e^{-t^2x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ pour $x > 0$ (vu à la question précédente ou bien $\mathcal{CM}^0$ sur $[0,+\infty[$ et $o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ en $+\infty$ si $x > 0$). On a donc $|F(x)| \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2x^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2x}$. On en déduit $\boxed{\lim\limits_{+\infty} F = 0}$

3. a) La fonction F' est $\mathcal{C}^0$ sur $]0,+\infty[$ et une de ses primitives, la fonction F, admet des limites finies en 0 et $+\infty$ donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} F'(t)\,\mathrm{d}t$ converge. On a donc $\lim\limits_{+\infty} F - F(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} F'(t)\,\mathrm{d}t$ ie $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+i} = \sqrt{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-ix^2}\,\mathrm{d}x}$

b) On a $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+i} = \int_0^{+\infty} \frac{t^2-i}{1+t^4}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4} - i\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^4} = I(1-i)$. Avec la valeur de I, on en déduit $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ix^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}(1-i)}$

c) En identifiant partie réelle et partie imaginaire, on justifie la convergence des deux intégrales de Fresnel et leur valeur : $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(t^2)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}}$

Ceci constitue donc un nouvel exemple de fonction qui ne tend pas vers 0 en $+\infty$ mais dont l'intégrale est convergente.