

ΠΣΙ2.ALI en saturation.**Proposition de correction.****EXERCICE B.**

1) La masse est sur le trait horizontal bas. e est alors le potentiel de l'entrée, s le potentiel de la sortie et on note u le potentiel du nœud entre l'entrée et la sortie. La LDN en ce point donne :

$$jC\omega(e - u) + \frac{1}{R}(0 - u) + \frac{1}{R}(s - u) = 0$$

On peut alors sortir : $u = \frac{jRC\omega e + s}{2 + jRC\omega}$

On reconnaît aussi un PDT : $s = \frac{u}{1 + jRC\omega}$

On peut éliminer u entre les deux équations et on sort la fonction de transfert :

$$\underline{H} = \frac{jRC\omega}{1 + 3jRC\omega + (jRC\omega)^2} = \frac{1}{3 + j\left(RC\omega - \frac{1}{RC\omega}\right)}$$

écriture 1 écriture 2

2) On reconnaît maintenant le montage à ALI comme étant un non-inverseur. En supposant l'ALI idéal en régime linéaire, un PDT permet d'obtenir :

$$\frac{s}{e} = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

Première méthode en restant en RSP :

Si des oscillations sinusoïdales existent à une certaine pulsation, alors la notation complexe est vérifiée à cette pulsation. On doit donc avoir :

$$\frac{1}{3 + j\left(RC\omega - \frac{1}{RC\omega}\right)} = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

complexe réel

Donc le complexe est en fait réel donc $RC\omega = 1$, et on sort aussi $\frac{R_2}{R_1} = 2$.

L'équation de cette méthode est de ne pas préciser les véritables conditions expérimentales.

Seconde méthode en passant en régime quelconque.

L'écriture 1 de la fonction de transfert permet d'obtenir en utilisant le PDT toujours valable :

$$(RC)^2 \ddot{s} + 3RC \dot{s} + s = RC \dot{e} = RC \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1} \right) \dot{s}$$

Soit :

$$(RC)^2 \ddot{s} + RC \left(2 - \frac{R_2}{R_1} \right) \dot{s} + s = 0$$

Pour obtenir un OH, il faut la condition $(\alpha) : \frac{R_2}{R_1} = 2$, et la pulsation des oscillations est $\omega = \frac{1}{RC}$.

3) Le problème est que la condition (α) est impossible à obtenir expérimentalement.

Si $\frac{R_2}{R_1} = 2^-$, on obtient des oscillations pseudo-sinusoïdales décroissantes qui s'éliminent rapidement.

Si $\frac{R_2}{R_1} = 2^+$, on obtient des oscillations pseudo-sinusoïdales divergentes qui sont alors limitées par la saturation de la sortie de l'ALI. L'amplitude de la sinusoïde est alors la tension de saturation.

EXERCICE C.

1 et 2) Il est d'usage de considérer le quadripole actif comme la chaîne directe A, soit ici le montage à ALI. On reconnaît un montage inverseur et on obtient $A = \frac{e}{s} = -\frac{R'}{R}$ en supposant l'ALI idéal en zone linéaire.

3) Cela va être beaucoup plus compliqué car on a un quadripole à 3 étages.

On suppose l'existence d'un RSP(ω) et on adopte la notation complexe, mais sans souligner les grandeurs complexes.

On note u le potentiel du premier nœud à gauche entre 2 condensateurs, v le potentiel du nœud suivant. On va maintenant appliquer 3 fois la LDN : aux deux nœuds précédents, puis à l'entrée de la chaîne directe (ce n'est pas un vrai nœud, il y a en fait un PDT, mais la LDN est plus simple).

On obtient successivement :

$$\begin{aligned} jRC\omega(e + v) &= (1 + 2jRC\omega)u \\ jRC\omega(u + s) &= (1 + 2jRC\omega)v \\ jRC\omega v &= (1 + jRC\omega)s \end{aligned}$$

IL ne reste plus qu'à éliminer u et v entre les trois équations pour obtenir la fonction de transfert harmonique B de la chaîne de retour. Si on considère e donné, on a un système linéaire à 3 inconnues u, v et s. On peut donc sortir s.

PAR CONTRE, CE N'EST PAS FACILE...

Il faut éliminer u entre les deux premières équations pour sortir v en fonction de e et s. On reporte alors dans la dernière. J'ai conduit les calculs en posant $x = RC\omega$.

On obtient, en faisant très attention :

$$B = \frac{s}{e} = \frac{(jx)^3}{(1 - 6x^2) + jx(5 + (jx)^2)}$$

Le dénominateur est écrit sous la forme habituelle Re+jIm. Le numérateur est imaginaire.

4) Pour qu'un RSP de pulsation ω puisse exister, il faut $A.B=1$ à cette même pulsation.

Comme A est réel, il faut que B le soit aussi, comme le numérateur de B est imaginaire, il faut donc que le dénominateur de B soit aussi imaginaire, ce qui donne $1 - 6x^2 = 0$.

Cela donne bien $\omega = \frac{1}{RC\sqrt{6}}$

On reporte alors dans l'égalité $AB=1$ et on sort $R'/R=29$.

Cette dernière inégalité n'est pas physiquement rigoureusement réalisable. Par contre, ici, on ne peut pas étudier la stabilité car on a un système d'ordre 3, beaucoup plus compliqué à gérer que le cas du cours (ordre 2). Il faudra faire des simulations ou des expériences au voisinage de la frontière pour voir s'il y a stabilité : cf page suivante.

Quand on passe en equa diff, on obtient :

$$(RC)^3 \left(1 + \frac{R'}{R}\right) \ddot{s} + 6(RC)^2 \dot{s} + 5(RC) \dot{s} + s = 0$$

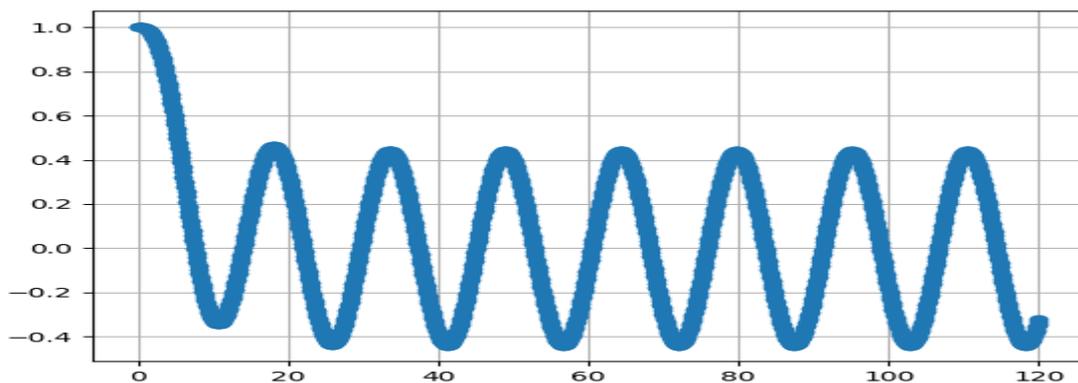
Un exemple de script python en prenant $RC=1s$ est :

```
import numpy as np
import scipy.integrate as integr
import matplotlib.pyplot as plt

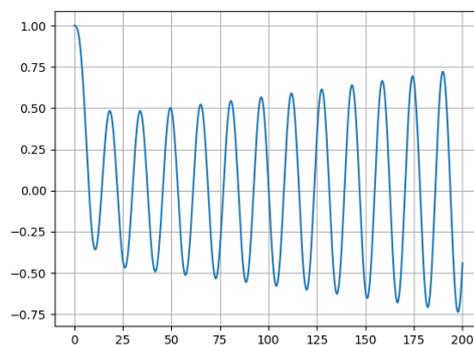
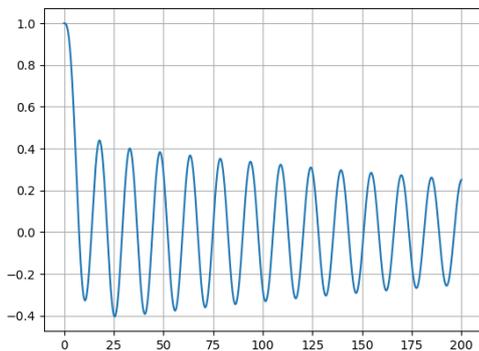
def f(xy,t):
    return [xy[1],xy[2],(-6*xy[2]-5*xy[1]-xy[0])/31]
```

```
t=np.linspace(0.0,200.0,num=1200)
#print t
sol=integr.odeint(f,[1.0,0.0,0.0],t)
plt.grid()
plt.plot(t,sol[:,0])
plt.show()
```

Pour $R_2/R_1=29$, on obtient :



Pour $R_2/R_1=28$ et 30 , on obtient des pseudo-oscillations convergentes ou divergentes :



Comme l'égalité $R_2/R_1=29$ est impossible à vérifier expérimentalement, il faudra se mettre en régime légèrement divergent donc pour $R_2/R_1=29^+$. La divergence sera limitée par la saturation des ALI.

EXERCICE D.

1) En régime sinusoïdal de pulsation ω , les admittances de deux dipôles en parallèle s'ajoutent. Donc : $\underline{Y}(C_b || C_s) = jC_b\omega + jC_s\omega = j(C_b + C_s)\omega = jC_{eq}\omega$ donc $C_{eq} = C_b + C_s$.

2) On peut raisonner en régime quelconque mais cela va être assez long. Il est plus rapide de supposer un régime sinusoïdal permanent de pulsation ω et de calculer U par la LDN au noeud supérieur. Il y a 3 branches :

$$\frac{1}{R_b + jL\omega}(0 - \underline{U}) + jC_{eq}\omega(0 - \underline{U}) + \frac{1}{-R_n}(0 - \underline{0}) = 0$$

Ce qui donne :

$$\underline{U} \left\{ 1 + \left(jC_{eq}\omega - \frac{1}{R_n} \right) (R_b + jL\omega) \right\} = 0$$

On repasse alors en notation réelle avec les méthodes habituelles et on obtient :

$$LC\ddot{u} + \left(R_b C_{eq} - \frac{L}{R_n} \right) \dot{u} + \left(1 - \frac{R_b}{R_n} \right) u = 0 \quad a = LC \quad b = \left(R_b C_{eq} - \frac{L}{R_n} \right) \quad c = \frac{R_b}{R_n}$$

3) Pour obtenir des oscillations sinusoïdales, une condition nécessaire (mais pas suffisante) et que $b=0$, ce qui conduit à $R_n = R_b Q$.

4) Il faut en plus que $(1-c) > 0$, ce qui donne $Q > 1$. $Q_{lim} = 1$.

5) Les deux conditions précédentes permettent d'écrire l'équation différentielle sous la

forme : $\ddot{u} + \omega_o^2 u = 0$, avec $\omega_o = \sqrt{\frac{1-c}{a}} = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{Q^2}}{LC_{eq}}}$ dont la solution est une sinusoïde de pulsation $\omega_o = 2\pi f$

Si Q est suffisamment grand, un dl à l'ordre 1 en $1/Q^2$ donne : $\omega_o = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{Q^2}}{LC_{eq}}} \approx \left(1 - \frac{1}{2Q^2} \right) \sqrt{\frac{1}{LC_{eq}}}$

Si $Q > 8$, alors $\frac{1}{2Q^2} < \frac{1}{128} < 1\%$ et donc $\omega_o = \sqrt{\frac{1}{LC_{eq}}}$ à mieux que 1% près.

7) On calcule $C_{eq} \approx 67,5 \text{ nF}$, ce qui donne $C_s \approx 57,5 \text{ nF}$ et $Q = 67$, valeur satisfaisante.

8 et 9) En fait, on ne peut pas régler $b=0$ strictement. Il est soit légèrement positif ou négatif. Le premier cas donne un régime pseudo-sinusoïdal amorti qui ne donnera pas d'oscillations permanentes.

Il faut donc $b < 0$, ce qui conduit à un régime transitoire pseudo-sinusoïdal divergent. L'amplitude des oscillations sera limitée par la saturation de l'AO.

Exrcice E.Extrait centrale 2010 psi.

1) Nommons A, de potentiel u par rapport à la masse le nœud commun à R, C₁ et L.
La LDN en A donne :

$$\frac{1}{R}(V_S - u) + jC_1\omega(V_R - u) + \frac{1}{jL\omega}(0 - u) = 0$$

C₁ et C₂ sont en série donc un PDT donne avec $2C=C_1=C_2$: $V_R = \frac{1}{2}u$

On élimine u entre les deux équations et on obtient la forme proposée avec :

$$\beta_o = \frac{1}{2} \quad Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Il s'agit d'un filtre passe-bande d'ordre 2, de gain maximal β_o , de pulsation de résonance ω_o , de bande passante $\Delta\omega = \frac{\omega_o}{Q}$.

2) On reconnaît un montage non inverseur. Calcul donne : $\underline{\alpha} = k = 1 + \frac{R_2}{R_1}$

La FTBO est donc maintenant : $\underline{H} = \underline{\alpha} \cdot \underline{\beta}$

3) Si on ferme l'interrupteur et on suppose la présence d'un RSP(ω), alors la notation complexe est valide et $\underline{V}_R = \underline{V}_E$ donc $\underline{H}=1$.

On résoud alors cette équation qui donne alors 2 informations :

$$R_2 = R_1 \quad \text{et} \quad \omega = \omega_o$$

4) On réécrit : $\underline{V}_E = \underline{\alpha} \cdot \underline{\beta} \underline{V}_E$

Produit en croix, multiplication par $j\omega$. On sort :

$$\underline{V}_E \{j\omega\omega_o + Q(j\omega)^2 + Q\omega_o^2\} = k\beta_o\omega_o j\omega \underline{V}_E$$

Au lieu de simplifier, on repasse en réel, ce qui donne finalement :

$$\dot{V}_E + \frac{\omega_o}{Q}(1 - k\beta_o)\dot{V}_E + \omega_o^2 V_E = 0$$

Soit finalement : $\dot{V}_E + \frac{\omega_o}{2Q}\left(1 - \frac{R_2}{R_1}\right)\dot{V}_E + \omega_o^2 V_E = 0$

Pour avoir un OH de pulsation ω_o , il faut $R_2=R_1$. Soit le résultat déjà trouvé avec le RSP.

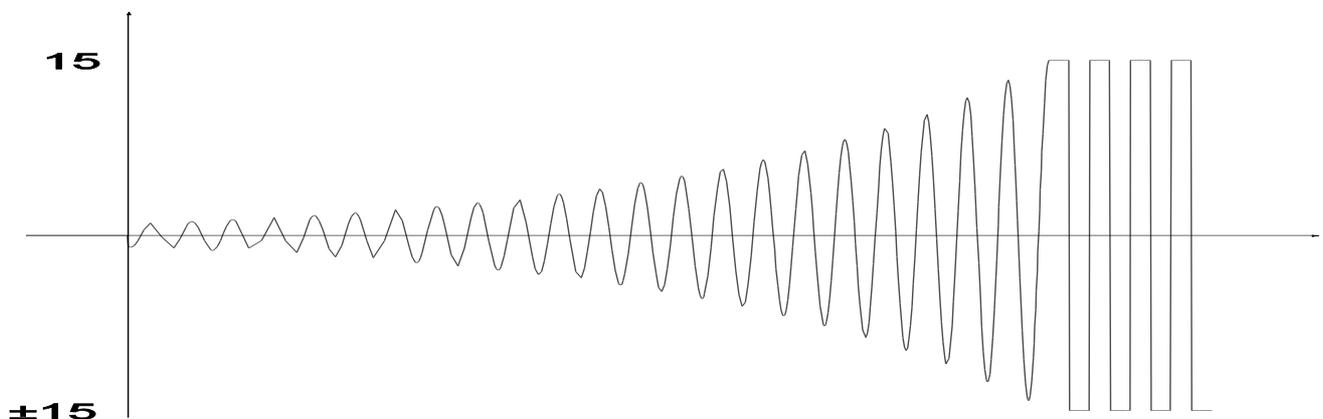
5) Physiquement, l'égalité précédente n'est pas atteignable. : R_2 sera toujours un peu différent de R_1 . Un peu moins et une perturbation quelconque est atténuée. Un peu plus grand et une perturbation est amplifiée.

Les oscillations démarrent sur un signal très faible, un « bruit », qui est amplifié à condition que le système électronique présente une légère instabilité soit ici R_2 légèrement supérieur à R_1 .

Mathématiquement la solution de l'équation différentielle diverge puisque qu'elle s'écrit sous la forme du produit d'une exponentielle croissante et d'une fonction sinusoïdale.

Le phénomène qui limite l'évolution de l'amplitude des oscillations est la non linéarité du fonctionnement de l'amplificateur opérationnel dès que la tension de sortie atteint la valeur de saturation.

L'allure de la tension de sortie est :



Sur cet exemple, on voit les paliers de saturation en régime permanent pas vraiment sinusoïdal. La fréquence sera légèrement plus faible que calculée et on verra les harmoniques dans le spectre.

Exer G.

1) Le circuit de la figure 8 commute pour $e_3=V_0$. Sur un pic, il devrait commuter deux fois. Or, si on regarde la structure temporelle d'un pic, on aura plusieurs double-commutations sur un seul pic, 2 sur l'exemple fourni. Si on met un compteur derrière, il comptera 2 battements au lieu d'un. Il faut empêcher la seconde commutation.

2a et b) La LDN en termes de potentiel donne : $V^+ = \frac{R_8 e_4 + R_7 e_3}{R_8 + R_7}$

On souhaite que $s_4(t) = +V_{sat}$. On doit alors avoir $V^+ > V_0$.

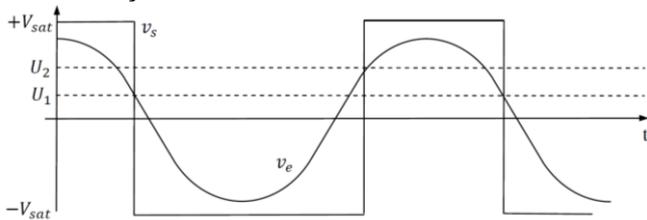
On obtient alors : $e_4 > U_1 = \left(1 + \frac{R_7}{R_8}\right) V_0 - \frac{R_7}{R_8} V_{sat}$

On souhaite que $s_4(t) = -V_{sat}$. On doit alors avoir $V^+ < V_0$.

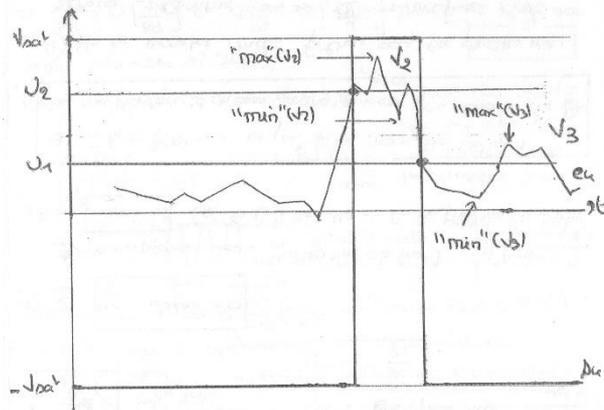
On obtient alors : $e_4 < U_2 = \left(1 + \frac{R_7}{R_8}\right) V_0 + \frac{R_7}{R_8} V_{sat}$

On remarque $U_1 < U_2$.

2c)



2d)



Il faut : " $\max(V_3) < U_2 < \max(V_2)$ " et " $\min(V_3) < U_1 < \min(V_2)$ "

H.Résolution graphique d'un oscillateur.**1) Réglage de la chaîne directe**

Pour un montage amplificateur inverseur \underline{A} est un réel négatif.

Si il existe un RSP à une certaine pulsation, on peut utiliser la notation complexe à cette pulsation. On doit alors avoir $\underline{A}\underline{B}=1$ or ici $\underline{A} \in \mathbb{R}^-$ donc il faut $\underline{B} \in \mathbb{R}^-$

Vu la courbe de déphasage, la seule solution est $\arg(\underline{B})=180^\circ$ lorsque $x=0,4$

On a alors -30 dB soit $|\underline{B}|=10^{\frac{-30}{20}} \approx 0,032 \Rightarrow \underline{B}=-0,032$.

$\underline{A} = \frac{1}{\underline{B}} \approx -31$ Aux erreurs de lecture près évidemment.

2)

On peut utiliser la LDN au premier noeud E (potentiel u), au second noeud F (potentiel v), et au noeud S_1 . Pour ce dernier point C et R sont en série et on peut utiliser un PDT, ce que je vais faire .

LDN en E : $jC\omega(\underline{S}_2 - \underline{u}) + jC\omega(\underline{v} - \underline{u}) + \frac{1}{R}(0 - \underline{u}) = 0$

soit finalement : $jx(\underline{S}_2 + \underline{v}) = (1 + 2jx)\underline{u}$ (α)

LDN en F : $jC\omega(\underline{u} - \underline{v}) + jC\omega(\underline{S}_1 - \underline{v}) + \frac{1}{R}(0 - \underline{v}) = 0$

soit finalement : $jx(\underline{S}_1 + \underline{u}) = (1 + 2jx)\underline{v}$ (β)

PDT en S_1 : $\underline{S}_1 = \left(\frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega}} \right) \underline{v} = \left(\frac{jx}{1 + jx} \right) \underline{v}$ (γ)

(γ) permet de sortir $\underline{v} = \dots$ que l'on reporte dans (β) pour sortir $\underline{u} = \dots$

On reporte les deux derniers résultats dans (α) et on sort la fonction de transfert. Cependant, le calcul est lourd et n'est pas demandé.

Prenons la formule donnant \underline{B}

a) Aux très basses fréquences, soit $x \rightarrow 0$, $\underline{B} \approx \frac{-x^3}{-j} = -jx^3$

ce qui correspond à un gain nul (cohérent avec chute), une pente de $+60$ dB/décade (difficile à mesurer) et un argument de -90° ou $(180+90)=270^\circ$, compatible.

b) Aux hautes fréquences, le gain tend vers 1, gain en dB et phase nuls, ce qui semble être le cas.

On a vu à la question précédente que \underline{B} doit être réelle négative.

a) Partie imaginaire nulle, donc $6x^2 = 1$, soit $x = \frac{1}{\sqrt{6}} \approx 0,41$ soit une valeur très proche de celle mesurée sur le graphe.

b) On reprend alors $\underline{B} = \frac{1}{1-5\sqrt{6}} = -\frac{1}{29} \approx -0,034$. valeur proche de celle mesurée à la question 1.

3) En fait, il faut tout recommencer. La chaîne de retour n'est pas à vide (à cause de la résistance R_1), donc le PDT utilisé à la question 2 n'est pas valide. La résistance R_1 intervient dans le calcul de \underline{B} . L'aspect graphique ne marche pas plus.

Le plus simple pour s'en sortir est de mettre un suiveur à la sortie de B et dont on branche la sortie en A. Dans ce cas, elle est à vide. Maintenant, c'est bon...

I. Proposition de solution.

1a) C'est un montage à résistance négative, cf cours. Dans l'hypothèse du régime linéaire, on calcule:

$$Z_e = -\frac{R_1 R_3}{R_2}$$

1b) Il faut que la tension de sortie notée s de l'ALI reste dans l'intervalle $[-V_{sat} + V_{sat}]$.

La loi d'Ohm aux bornes de R_1 donne : $V_e - s = R_1 I_e = \frac{R_1}{Z} V_e$ et on sort : $s = \frac{R_2 + R_3}{R_3} V_e$

Donc $|s| < V_{sat}$ revient à $|V_e| < \frac{R_3}{R_2 + R_3} V_{sat}$.

1c) La caractéristique en zone linéaire $I_e = f(V_e)$ est donc un segment de droite de pente négative et passant par l'origine compris entre les abscisses $-\frac{R_3}{R_2 + R_3} V_{sat}$ et $\frac{R_3}{R_2 + R_3} V_{sat}$.

2a) Pour obtenir une équation différentielle, le mieux est de supposer l'existence d'un RSP de pulsation ω et d'utiliser la notation complexe. La LDM donne : $V_e = Z_e I_e = -\left(R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}\right) I_e$

En multipliant par $jC\omega$, on obtient : $I_e + C(R + Z_e)j\omega I_e + LC(j\omega)^2 I_e = 0$

On repasse au réel, et on obtient après mise en forme :

$$\ddot{I}_e + \frac{(R + Z_e)}{L} \dot{I}_e + \omega_0^2 I_e = 0 \text{ avec } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

2b) On a un OH de pulsation ω_0 si $R + Z_e = 0$, ce qui est possible mathématiquement :

$$R = \frac{R_1 R_3}{R_2}$$

2c) Physiquement, on ne fera qu'approcher la condition précédente.

Si $R + Z_e = 0^+$, on obtient des pseudo-sinusoïdes convergentes vers 0 et l'oscillateur s'écroule. Le régime permanent est $I_e = 0$.

Si $R + Z_e = 0^-$, on obtient des pseudo-sinusoïdes divergentes dont l'amplitude sera contrôlée par la saturation de l'ALI. L'oscillateur fonctionne. Les oscillations démarrent à partir d'une perturbation quelconque.