Physique 1 - Mines Ponts PSI - Proposition de corrigé

Corrigé rédigé par Jean Maysonnave, relu par Stéphane Ravier. N'hésitez pas à nous signaler par mail (JMaysonnave@ac-creteil.fr) toute coquille ou erreur !

I. Installation du spa

1. La pompe sert à remplir tout le volume du spa entre d_{int} et d_{ext}, donc D_p est tel que :

$$D_p = \frac{\pi H\left((d_{ext}/2)^2 - (d_{int}/2)^2\right)}{t_g} = \frac{3\times 1}{4\times 10\times 60}\left(2^2-2\right) = \frac{3\times 2}{2\times 2\times 10\times 2\times 3\times 10}$$

On en déduit $D_p \sim 2{,}5$ L.s^{-1}

2. En δt secondes, un volume $\delta V = D_p\delta t$ est ajouté associé à une quantité de matière $\delta n = \dfrac{\rho_{air}\delta V}{M}$. La variation de pression $\delta P = \delta n\dfrac{RT}{V}$ (à température et volume constants), peut donc être reliée à δt via :

$$\delta t = \frac{\delta V}{D_p} = \frac{M\delta n}{\rho_{air}D_p} = \frac{MV\delta P}{\rho_{air}RTD_p} = \frac{V\delta P}{D_pP_0}$$

avec $P_0 = \dfrac{\rho_{air}RT}{M} = 1$ bar. On en déduit le temps d'ouverture de la valve de surpression lorsque $\delta P = 0{,}1$ bar avec $V = \pi H\left((d_{ext}/2)^2 - (d_{int}/2)^2\right) = 3{,}1\times 1\times(1^2 - 1/2) = 1{,}5\text{m}^3$ soit :

$$\delta t = \frac{1{,}5\times 10^{-1}}{2{,}5.10^{-3}\times 1} = \frac{3\times 0{,}5}{5\times 0{,}5}.10^2 = 60\text{s}$$

3. Le gonflage du spa se fait à $T_1 = 15$°C à la pression de gonflage P_1 jusqu'au volume V. On a donc : $P_1V = nRT_1$. Si la température monte au cours de la journée, et que le volume du spa reste constant, le seuil d'ouverture de la vanne de surpression est atteint pour une température T_2 telle que $(P_1+\delta P)V = nRT_2$. On en déduit :

$$T_2 = \frac{P_1+\delta P}{P_1}T_1 = \frac{1{,}1}{1}\times 288 = 317\text{K} \sim 44°C$$

4. On gagne 2°C par heure. Il faut donc 10h. On peut évaluer le temps de chauffage nécessaire de l'eau avec la puissance de chauffage indiquée P_c. Si on effectue un bilan thermique sur l'eau du spa en négligeant toute perte, l'eau atteint sa température de consigne $T_F = 40$°C, à partir de sa température initiale $T_I = 20$°C en un temps Δt tel que :

$$\Delta t = \frac{m_{eau}c_e(T_F-T_I)}{P_c} = \frac{\rho_{eau}V_0c_e(T_F-T_I)}{P_c} = \frac{10^3\times 1{,}1\times 4.10^3\times 2\times 10}{2{,}5.10^3} \sim 4.10^4\text{s} \sim 11\text{h}$$

(où $V_0 = \pi\left(\dfrac{d_{int}}{2}\right)^2 H = 3\times\dfrac{2}{4}\times 0{,}75 = 1{,}1$ m^3 est le volume d'eau). Ces deux durées sont cohérentes.

5. La puissance surfacique Φ due au Soleil arrivant à la surface de la Terre peut être vue comme constante sur l'échelle de temps d'une journée. Donc le moment de la journée où le chauffage par le Soleil est le plus efficace correspond à la situation où il est le plus proche du zénith. Dans ce cas, les rayons solaires arrivent avec l'angle θ le plus élevé par rapport à un plan horizontal de sorte que la puissance reçue $P = \Phi S\cos\theta$ (pour une surface S) est maximale.

6. Les questions 6 à 8 ne semblent pas exactement dans l'esprit du programme de PSI. La question 7, par exemple, qui apparaît assez rapidement dans le sujet, est assez ardue

La forme d'onde proposée est celle d'une onde plane progressive harmonique. Le caractère progressif est très légitime pour décrire une onde associée au rayonnement solaire, l'onde se déplacant sur une très grande distance, sans obstacle. Strictement, il s'agit en revanche plus d'une onde sphérique que d'une onde plane. Mais le diamètre angulaire de la Terre vu du Soleil est extrêmement faible. Il est donc très raisonnable de supposer les rayons solaire arrivant sur la Terre parallèles entre eux. D'un point de vue de la Terre, tout se passe donc comme si l'onde était plane. Le rayonnement solaire est associé à un spectre étendu. On peut travailler en régime harmonique si le rayonnement solaire peut-être décomposé en série de Fourier. C'est possible car il est périodique.

La polarisation est liée à l'interaction entre le rayonnement et l'atmosphère. Les molécules de l'atmosphère réagissent au

champ électromagnétique incident de manière privilégiée suivant certaines directions de l'espace. Le rayonnement induit une séparation de charges dans certaines molécules d'air : un moment dipolaire apparaît alors.
La pulsation ω_0 correspond à la pulsation de résonance du moment dipolaire induit : c'est la pulsation du rayonnement incident pour lequel l'effet dipolaire est maximal.

7. On peut effectuer un bilan d'énergie d'un système constitué de l'air dans un volume infinitésimal compris entre x et $x+dx$, de section S. On a donc :

$$dU(t+dt)-dU(t)=(\epsilon_\omega(x)-\epsilon_\omega(x+dx))Sdt-nSdx\mathscr{P}(x)dt$$

On se place en régime stationnaire donc $dU(t+dt)=dU(t)$.

De plus, $\mathscr{P}$ et $\epsilon_\omega(x)$ sont reliés. En effet $\epsilon_\omega(x)=\left\langle\vec{\Pi}(x).\vec{e}_x\right\rangle$ où $\vec{\Pi}(x).\vec{e}_x$ représente ici la projection du vecteur de Poynting suivant la direction de propagation. Ici donc :

$$\epsilon_\omega(x)=\left\langle\frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}.\vec{e}_x\right\rangle=\left\langle\frac{E^2}{\mu_0 c}\right\rangle=\frac{E_0^2}{2\mu_0 c}$$

car d'après la relation de structure pour une OPPH dans le vide $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont orthogonaux avec $B=E/c$.
finalement on a :

$$\mathscr{P}=\frac{p_0^2\omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3}=\frac{e^4}{12m^2\pi\epsilon_0 c^3}\frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2}E_0^2=\frac{2\mu_0 ce^4}{12m^2\pi\epsilon_0 c^3}\frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2}\epsilon_\omega$$

Le bilan d'énergie se réécrit donc :

$$0=-\frac{d\epsilon_\omega}{dx}Sdxdt-nSdxdt\times\frac{2\mu_0 ce^4}{12m^2\pi\epsilon_0 c^3}\frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2}\epsilon_\omega$$

ou encore

$$\frac{d\epsilon_\omega}{dx}+\frac{\epsilon_\omega}{H_\omega}=0$$

Cette équation admet pour solution :

$$\epsilon_\omega(x)=\epsilon_\omega(0)\exp(-x/H_\omega)$$

avec $H_\omega=\frac{6m^2\pi\epsilon_0 c^2}{n\mu_0 e^4}\frac{(\omega_0^2-\omega^2)^2}{\omega^4}=\frac{6m^2\pi}{n\mu_0^2e^4}(\kappa^2-1)^2$.
On a enfin :

$$[H_\omega]=\left[\frac{6m^2\pi}{n\mu_0^2e^4}(\kappa^2-1)^2\right]=\left[\frac{6m^2\pi}{n\mu_0^2e^4}\right]=\left[\frac{m^2}{n\mu_0^2e^4}\right]=\frac{M^2}{L^{-3}\left[\mu_0\right]^2A^4T^4}=\frac{M^2}{L^{-3}.M^2.L^2.A^{-4}.T^{-4}.A^4.T^4}=L$$

(l'unité de μ_0 est précisée en fin d'énoncé)

8. Pour évaluer H_ω, on peut donc prendre la pulsation $\omega=2\pi c/\lambda$ associé à la couleur verte ($\lambda=540.10^{-9}$m), de sorte que :

$$\kappa=\frac{\omega_0}{\omega}=\frac{\omega_0\lambda}{2\pi c}=\frac{2,3.10^{16}\times5,4.10^{-7}}{2\times3,1\times3.10^8}\sim10$$

de sorte que $(\kappa^2-1)^2\sim10^4$. Puis :

$$n=\frac{N}{V}=\frac{\mathcal{N}_AP}{RT}=\frac{6.10^{23}\times10^5}{8\times3.10^2}\sim2,5.10^{25}\text{m}^{-3}$$

Enfin, à l'aide des données de fin d'énoncé :

$$H_\omega\sim\frac{6\times10^{-60}\times3}{2,5.10^{25}\times4^2\times3^2\times10^{-14}\times1,6^4.10^{-76}}.10^4=\frac{10^{-60}}{2,5\times4\times2\times1,6^4.10^{-65}}.10^4=\frac{10^8}{2\times1,6^4}\sim5.10^3\text{km}$$

Cette longueur caractéristique est très grande devant 100 km. L'effet de l'augmentation d'altitude sur le chauffage du spa est donc négligeable.

II. Utilisation du spa

9. Dans le cadre de l'ARQS ou en régime stationnaire, on peut montrer que le flux thermique Φ dans un matériau régi par la conduction satisfait l'équation :

$$\Delta T=R_{th}\Phi$$

où Φ est le flux thermique établi entre deux parois d'un matériau exposé à une différence de température ΔT.

Pour les parois verticales, le flux thermique se met sous la forme : $\Phi_p = -\lambda_{air}\frac{\partial T}{\partial r}2\pi r h_e$. En ARQS ou régime stationnaire, ce flux est constant de sorte que :

$$T_{ext} - T_{int} = \int_{d_{int}/2}^{d_{ext}/2} \frac{\partial T}{\partial r} dr = -\frac{\Phi_p}{\lambda_{air}2\pi h_e}\int_{d_{int}/2}^{d_{ext}/2}\frac{dr}{r} = -\frac{\Phi_p}{\lambda_{air}2\pi h_e}\ln\left(\frac{d_{ext}}{d_{int}}\right)$$

On en déduit :

$$R_p = \frac{1}{\lambda_{air}2\pi h_e}\ln\left(\frac{d_{ext}}{d_{int}}\right)$$

Pour le tapis, la résistance thermique est donnée par celle en géométrie cartésienne, à savoir :

$$R_t = \frac{e_h}{\lambda_h \pi d_{int}^2/4}$$

10. On effectue un bilan thermique pour l'ensemble de l'eau contenue dans le spa entre t et $t+dt$, soit :

$$mc_e dT_{int} = -\frac{T_{int}-T_{ext}}{R_{tot}}dt$$

qui se remet sous la forme :

$$\frac{d(T_{int}-T_{ext})}{dt} + \frac{T_{int}-T_{ext}}{\tau} = 0$$

avec $\tau = R_{tot}mc_e = R_{tot}\rho_{eau}c_e h_e \pi d_{int}^2/4$. La solution est donc bien de la forme $T_{int}(t) - T_{ext} = (T_{int}(0)-T_{ext})\exp(-t/\tau)$.
La résistance évoquée ci-dessus correspond à l'association en parallèle de :

— $R_p + R_{pc} + R_h$ (association série de la résistance conductive de l'air des parois + de la résistance convective due aux échanges eau-parois intérieures + de la résistance convective due aux échanges air-parois extérieures) ;
— R_t due au tapis d'herbe ;
— R_s due aux échanges convectifs entre la surface de l'eau et l'air.

Soit :

$$\frac{1}{R_{tot}} = \frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_t} + \frac{1}{R_p + R_{pc} + \frac{1}{h_a \pi d_{int} h_e}} = \frac{10^2}{6} + \frac{10^2}{5} + \frac{2}{3 + \frac{1}{10\times 3\times 0,7\times 1}} = 35\mathrm{W.K^{-1}}$$

(le dernier terme est en fait négligeable). On peut en déduire la valeur de τ :

$$\tau = R_{tot}\rho_{eau}c_e h_e \pi d_{int}^2/4 = \frac{10^3\times 4,2.10^3\times 3\times 2\times 0,7}{3,5.10\times 4} = 2,1\times 3\times 2.10^4 = 1,2.10^5\mathrm{s}$$

soit $\tau \sim 30$h. Il faut à peu près une journée entière pour que le spa redevienne froid.

11. Il faut calculer la nouvelle résistance thermique totale, le reste du raisonnement restant identique. Notons la R'_{tot}. On a alors :

$$\frac{1}{R'_{tot}} = \frac{1}{\frac{e_s}{\lambda_a \pi d_{int}^2/4}} + \frac{1}{R_t + \frac{e_t}{\lambda_a \pi d_{int}^2/4}} + \frac{1}{R_p + R_{pc} + \frac{1}{h_a \pi d_{int} h_e}}$$

Il n'a a plus d'échange convectif entre la surface de l'eau et l'air mais la couverture. R_s disparaît au profit de $\frac{e_s}{\lambda_a \pi d_{int}^2/4} = \frac{0,25\times 4}{2,5.10^{-2}\times 3\times 2} = \frac{10^2}{15} \sim 7\mathrm{K.W^{-1}}$. Entre le tapis d'herbe et le fond du spa a été placée une nouvelle résistance en série, à savoir $\frac{e_t}{\lambda_a \pi d_{int}^2/4} = \frac{5.10^{-3}\times 4}{2,5.10^{-2}\times 3\times 2} = \frac{1}{2,5\times 3} \sim 0,15\mathrm{K.W^{-1}}$. D'où :

$$\frac{1}{R'_{tot}} = \frac{1}{7} + \frac{1}{5.10^{-2}+0,15} + \frac{2}{3} \sim 6\mathrm{W.K^{-1}}$$

Le nouveau temps caractéristique est donc :

$$\tau' = \frac{R_{tot}}{R'_{tot}}\tau = \frac{35}{6}\times 30 \sim 180h$$

L'isolation est bien meilleure.

12. Il faut exactement compenser les pertes thermiques soit fournir une puissance :

$$P_0 = \frac{T_{int}-T_{ext}}{R'_{tot}} = (38-25)\times 6 = 90\mathrm{W}$$

13. Le profil de potentiel dans le cylindre est uniquement donné par l'équation de Laplace (le conducteur est neutre) : $\Delta V = 0$
Cette équation se résout sous la forme : $V(x) = ax + b = \frac{V(L) - V(0)}{L}x + V(0)$, où l'axe (Ox) représente l'axe longitudinal du barreau. La résistance thermique est définie telle que : $R_{él} = \frac{V(0) - V(L)}{i}$. Or $i = jS = -\sigma S \frac{dV}{dx} = -\sigma S a = \sigma S \frac{V(0) - V(L)}{L}$, d'où l'on déduit :

$$R_{él} = \frac{L}{\sigma S}$$

14. Le PFD appliqué à un électron donne : $m\frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - \frac{m\vec{v}}{\tau_d}$
On résout l'équation homogène et on cherche une solution particulière, ce qui donne : $\vec{v} = \vec{A}\exp(-t/\tau_d) - \frac{e\tau_d}{m}\vec{E}$
Pour un temps grand devant τ_d, la vitesse de l'électron est bien constante, car elle tend vers :

$$\vec{v}_\infty = -\frac{e\tau_d}{m}\vec{E}$$

A partir de cette vitesse on peut en déduire la conductivité via la loi d'Ohm locale $\vec{j} = \sigma\vec{E}$ soit :

$$\sigma = \frac{n_e e^2 \tau_d}{m}$$

15. On étudie le mouvement d'un électron entre deux collisions. Il est juste soumis au champ électrique de sorte que sa variation de quantité de mouvement est $d\vec{p} = -e\vec{E}dt$. Sa vitesse juste avant la collision suivante est donc :

$$\vec{v} = \vec{v}_0 - \frac{e\vec{E}}{m}\delta t$$

Si on prend la moyenne sur un grand nombre de collisions, on obtient :

$$\langle\vec{v}\rangle = \langle\vec{v}_0\rangle - \frac{e\vec{E}}{m}\langle\delta t\rangle = -\frac{e\vec{E}}{m}\langle\delta t\rangle$$

La moyenne des vitesses juste après une collision est nulle car la direction est aléatoire. En revenant à la question précédente, on voit que τ_d peut s'identifier à $\langle\delta t\rangle$. On peut donc voir τ_d comme le temps moyen entre deux collisions.
Si la température augmente, le nombre de collisions s'accroît et donc τ_d diminue. Ainsi σ diminue et la résistance s'accroît.

16. Ce montage est un comparateur simple, qui fonctionne donc en régime saturé. V_s bascule chaque fois que $\epsilon = V_+ - V_-$ passe par zéro.
Or $V_+ = \frac{R_1}{R_1+R_2}V_0$ car $i_+ = 0$ (on peut donc faire un ont diviseur de tension). De même, $V_- = \frac{R_1}{R_1+R_{th}}V_0$ car $i_- = 0$. Le changement d'état de saturation se produit donc quand $V_+ = V_-$, soit $R_2 = R_{th}$ ce qui donne :

$$T_c = T_{ref} + \frac{R_2 - R_0}{\alpha R_0}$$

La variation relative de T_c due à R_2 est telle que :

$$\frac{dR_2}{R_2} = \frac{dT_c}{T_c} = \frac{1}{273+38} \sim 3.10^{-3}$$

17. On peut placer ces deux interrupteurs en série de sorte à ce que tous les deux soit fermés dans le domaine de température entre T_{min} et T_{max}. L'un des deux serait fermé tant que la température est supérieure à T_{min} tandis que l'autre serait fermé tant que la température est inférieure à T_{max}.

18. On va donc chercher à évaluer la variation de volume relative $\Delta V/V$ d'une bulle d'air sous l'effet de la variation de pression hydrostatique $\Delta P = \rho_e g h_e$ associée à la hauteur d'eau du spa. Si on assimile l'air dans la bulle à un gaz parfait, on peut dire que le produit PV de la bulle est constant, soit $d(PV) = 0$ d'où :

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{\Delta P}{P} = -\frac{\rho_e g h_e}{P_0} = -\frac{10^3 \times 10 \times 0{,}75}{10^5} = -0{,}075$$

19. On peut évaluer le nombre de Reynolds. Ici :

$$Re = \frac{\rho_e R V}{\eta_e} = \frac{10^3 \times 10^{-3} \times 0{,}3}{10^{-3}} = 3.10^2$$

et 10^3 si on prend une vitesse de $0,3$ m.s^{-1}. Sur la figure, on note que pour ces valeurs de Reynolds, le coefficient de traînée est environ constant égal à $C_x \sim 0,4$. La force de traînée s'exprime alors :

$$F_t = \frac{1}{2}\rho_e C_x S v_b^2$$

où $S = \pi R^2$ est la section droite de la bulle.

20. On peut écrire le PFD appliqué à une bulle de masse $m = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_a$, il donne :

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_a \frac{dv_b}{dt} = -\frac{1}{2}\rho_e C_x \pi R^2 v_b^2 - \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_a g + \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_e g$$

le dernier terme correspondant à la poussée d'Archimède. Le poids de la bulle pourrait être négligé. En simplifiant par πR^2 et en réarrangeant les termes, on obtient :

$$\frac{dv_b}{dt} = -\frac{3\rho_e C_x}{8\rho_a R} v_b^2 + \frac{g\left(\rho_e - \rho_a\right)}{\rho_a}$$

et là on peut penser à une séparation de variables en essayant de s'appuyer sur les données de fin d'énoncé soit :

$$\frac{dv_b}{dt} = \frac{g\left(\rho_e - \rho_a\right)}{\rho_a}\left\{1 - \left(\frac{v_b}{v_1}\right)^2\right\}$$

avec $v_1 = \sqrt{\dfrac{8Rg(\rho_e - \rho_a)}{3C_x\rho_e}}$. Si on pose $x = \dfrac{v_b}{v_1}$ on obtient en séparant les variables (ici je suppose le C_x constant comme à la question 19, cela revient à supposer que le régime transitoire est très court) :

$$\frac{dx}{1 - x^2} = \frac{g\left(\rho_e - \rho_a\right)}{\rho_a v_1} dt$$

dont l'intégration donne :

$$argtanh(x) + cste = \frac{g\left(\rho_e - \rho_a\right)}{\rho_a v_1} t$$

Or $v_b(t = 0) = 0$, donc $x(t = 0) = 0$, d'où $cste = 0$. On obtient finalement :

$$v_b = v_1 \tanh\left(\frac{t}{\tau_b}\right)$$

avec :

$$v_1 = \sqrt{\frac{8Rg(\rho_e - \rho_a)}{3C_x\rho_e}} = \sqrt{\frac{8 \times 10^{-3} \times 10 \times 10^3}{3 \times 0,4 \times 10^3}} \sim \sqrt{7.10^{-2}} \sim 25\text{cm.s}^{-1}$$

et :

$$\tau_b = \frac{\rho_a v_1}{g\left(\rho_e - \rho_a\right)} = \frac{1,2 \times 0,25}{10 \times 10^3} = 30\mu\text{s}$$

Ce sont des valeurs qui sont assez proches de celles attendues. Le modèle semble donc raisonnable.

21. Si l'écoulement est incompressible, cela signifie que $\text{div}\vec{v} = 0$. Au vu des dépendances spatiales de $\vec{v}$, on obtient, d'après les données de fin d'énoncé :

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 v\right) = 0$$

soit $r^2 v = cste$. Or en $r = R$, la vitesse est $\dfrac{dR}{dt}$, d'où :

$$\vec{v} = \left(\frac{R}{r}\right)^2 \frac{dR}{dt}\vec{u}_r$$

22. Tout d'abord on peut calculer :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{2R}{r^2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 + \left(\frac{R}{r}\right)^2 \frac{d^2R}{dt^2}$$

et :

$$\frac{\partial v^2}{\partial r} = -4\frac{R^4}{r^5}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2$$

soit :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial v^2}{\partial r} = \left(-4\frac{R^4}{r^5} + \frac{2R}{r^2}\right)\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 + \left(\frac{R}{r}\right)^2 \frac{d^2R}{dt^2} = \frac{R}{r^2}\left\{\left(2 - 4\frac{R^3}{r^3}\right)\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 + R\frac{d^2R}{dt^2}\right\} = \frac{R}{r^2}\left\{\left(2 - 4\frac{R^3}{r^3}\right)\left(\frac{d\epsilon}{dt}\right)^2 + R\frac{d^2\epsilon}{dt^2}\right\}$$

Entre les accolades le premier terme est infiniment plus petit que le second, de sorte que dans l'équation de conservation de l'impulsion, on obtient :

$$\frac{\partial P}{\partial r} \sim -\rho_e \frac{R^2}{r^2}\frac{d^2\epsilon}{dt^2} \sim -\rho_e \frac{R_0^2}{r^2}\frac{d^2\epsilon}{dt^2}$$

On obtient donc l'équation souhaitée en posant :

$$\beta = \rho_e R_0^2$$

Dans la mesure où ϵ ne dépend que du temps, une intégration de cette équation différentielle par rapport à la variable r donne :

$$P = P_0 + \frac{\beta}{r}\frac{d^2\epsilon}{dt^2}$$

puis en $r = R$, on obtient la pression P_a, telle que :

$$P_a = P_0 + \frac{\beta}{R}\frac{d^2\epsilon}{dt^2} \sim P_0 + \frac{\beta}{R_0}\frac{d^2\epsilon}{dt^2}$$

23. Si l'évolution de la bulle est isentropique, on peut utiliser la loi de Laplace, qui s'écrit :

$$P_a V^\gamma = A$$

où P_a et $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ représente la pression à laquelle est soumise la bulle et V son volume. La constante A est obtenue en notant que pour $P_a = P_0$, on a $V = \frac{4}{3}\pi R_0^3$. Finalement, on a :

$$P_a = P_0\left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma} = P_0\left(\frac{1}{1+\frac{\epsilon}{R_0}}\right)^{3\gamma} \sim P_0\left(1 - 3\gamma\frac{\epsilon}{R_0}\right)$$

24. On égalise les deux expressions de P_a pour obtenir :

$$\frac{d^2\epsilon}{dt^2} + \frac{3\gamma P_0}{\beta}\epsilon = 0$$

C'est une équation harmonique associée à une fréquence d'oscillation :

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3\gamma P_0}{\beta}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3\gamma P_0}{\rho_e R_0^2}} = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{3\times 1{,}4\times 10^5}{10^3\times 10^{-6}}} = \frac{2}{6}.10^4 \sim 3.10^3\text{Hz}$$

Le temps caractéristique de diffusion dans la bulle est donné par :

$$\tau = \frac{R_0^2}{D} = \frac{\rho_a c_a R_0^2}{\lambda_a} = \frac{1{,}2\times 7{,}1.10^2\times 10^{-6}}{2{,}5.10^{-2}} \sim 3.10^{-2}\text{s}$$

Et la période d'oscillation vaut :

$$T = \frac{1}{f} \sim 3.10^{-4}\text{s}$$

La période d'oscillation est donc plus petite d'un ordre de grandeur du temps caractéristique de diffusion. On peut donc supposer la durée d'une oscillation est un temps largement insuffisant pour que le transfert thermique puisse s'être fait. De ce point de vue il est raisonnable de supposer la transformation isentropique.

25.

On peut appliquer le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble du fluide sur la durée d'une oscillation T, on obtient alors :

$$\Delta E_c = NW = N f_{trainee} d$$

D'abord N est le nombre de bulles dans le spa. Puis chacune de ces bulles exerce une force de traînée : $f_{trainee} = \rho_e \frac{4}{3}\pi R^3 g$ si on suppose que les bulles ont essentiellement un mouvement qui est celui du régime permanent : c'est bien raisonnable car la durée du régime transitoire est très courte (8 μs d'après la question 20). Par ailleurs $d = v_1 T$ représente la distance parcourue sur une période. Enfin $\Delta E_c = N < e_c >$ si on suppose que c'est la vibration des bulles qui explique la force de traînée. On en déduit une expression de $< e_c >$, à savoir :

$$< e_c > = \frac{4\pi}{3}\rho_e g R^3 v_1 T$$

Reste l'application numérique :

$$< e_c > = \frac{4 \times 3}{3} \times 10^3 \times 10 \times 10^{-9} \times 7.10^{-2} \times 3.10^{-4} \sim 9.10^{-15}\text{J}$$

Une bulle met environ 3 s pour atteindre la surface du spa en oscillant 3000 fois chaque seconde donc elle cède sur toute son ascension environ $9.10^{-15} \times 3.10^3 \times 3 = 10^{-10}$ J. C'est cette énergie qui semble être mise en jeu pour le brassage de l'eau par les bulles de spa.

*** FIN DU CORRIGE ***