

MODÉLISATION CCINP – PSI

Etude d'un correcteur de facteur de puissance

Proposition de correction.

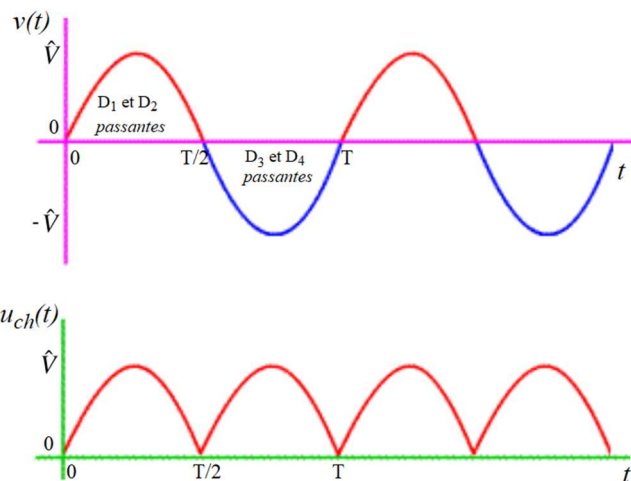
Merci de signaler erreurs et améliorations à paul-henri.bricout2@laposte.net

Partie I : Redresseur à capacité en tête

I.1. Présentation du montage

Q1. Avec la seule résistance R, lorsque D_1 et D_2 sont passantes $u_{ch}(t) = +v(t)$ et lorsque D_3 et D_4 sont passantes $u_{ch}(t) = -v(t)$.

Q2. Avec le circuit RC parallèle comme charge, il y a des intervalles de temps où toutes les diodes sont bloquées et où le condensateur se décharge dans la résistance avec une constante de temps $\tau = RC$. Il faut donc, comme admis dans l'énoncé, $\tau = RC \gg T$.



I.2. Spectre en courant de ligne

Q3. Code complété pour calculer la FFT et afficher la figure 3.

	Programme Python
1	# Fréquence d'échantillonnage
2	<code>Fe = 50e3</code>
3	# Nombre d'échantillons
4	<code>N = len(courant)</code>
5	# Calcul de la transformée de Fourier discrète
6	<code>fft_courant = np.fft.rfft(courant)*2/N</code>
7	# Module de la transformée de Fourier discrète
8	<code>mod_fft_courant = np.abs(fft_courant)</code>
9	# Vecteur fréquence
10	<code>freq=np.array([n*Fe/N for n in range(N//2)])</code> " d'après la documentation
11	
12	# Tracé du spectre
13	<code>plt.figure(1,figsize=(8,6))</code>
14	<code>plt.plot(freq , mod_fft_courant , color='gray', linewidth=2)</code>
15	<code>plt.xlim(0 , 700)</code> # valeurs de la figure 3
16	<code>plt.xlabel("Fréquence (Hz)" , fontsize=16)</code>
17	<code>plt.ylim(0.0 , 3.5)</code>
18	<code>plt.ylabel("Courant (A) , fontsize=16)</code>
19	<code>plt.tick_params(axis='both',labelsize=16)</code>
20	<code>plt.grid()</code>
21	<code>plt.show()</code>

Q4. On relève sur la figure 3 les amplitudes des harmoniques impairs :

Fréquence (Hz)	Amplitude \hat{I}_n (A)
50	3,0
150	1,3
250	0,55
350	0,45
450	0,3
550	0,1
650	0,1

Les harmoniques pairs sont nuls.

Q5. Il s'agit ici de considérations mathématiques.

La décomposition en série de Fourier est unique, et doit vérifier $i(t - T/2) = -i(t)$

Or $\cos(2\pi n f(t - T/2) + \varphi_n) = -\cos(2\pi n f t + \varphi_n)$ pour n impair

et $\cos(2\pi n f(t - T/2) + \varphi_n) = +\cos(2\pi n f t + \varphi_n)$ pour n pair, car $2\pi n f T/2 = \pi n$.

On a donc $i(t - T/2) + i(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \hat{I}_n \cos(2\pi n f t + \varphi_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{I}_n \cos(2\pi n f t + \varphi_n) = 0$,

$$i(t - T/2) + i(t) = 2 \sum_{p=1}^{\infty} \hat{I}_{2p} \cos(2\pi 2p f t + \varphi_{2p}) = 0 \quad \forall t$$

Pour avoir $i(t - T/2) = -i(t)$, il faut donc $\hat{I}_n = 0$ pour n pair (famille libre des fonctions cos).

On peut aussi conclure en multipliant par $\cos(2\pi 2p f t + \varphi_{2p})$ et en prenant la moyenne :

$$\langle (i(t - T/2) + i(t)) \cos(2\pi 2p f t + \varphi_{2p}) \rangle = \hat{I}_{2p}^2 = 0 \quad \text{pour tout } p.$$

I.3. Puissance moyenne fournie par le réseau

Q6. Par définition, et en remplaçant l'expression de la tension et de l'intensité

$$P = \langle v(t) \cdot i(t) \rangle = \left\langle \hat{V} \cos(2\pi f t) \sum_{n=1}^{\infty} \hat{I}_n \cos(2\pi n f t + \varphi_n) \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{V} \hat{I}_n \langle \cos(2\pi f t) \cos(2\pi n f t + \varphi_n) \rangle$$

Or $\langle \cos(2\pi f_1 t) \cos(2\pi f_2 t + \varphi_n) \rangle = 0$ si $f_1 \neq f_2$.

Donc $\langle \cos(2\pi f t) \cos(2\pi n f t + \varphi_n) \rangle = 0$ pour $n \neq 1$.

Il reste $P = \hat{V} \hat{I}_1 \langle \cos(2\pi f t) \cos(2\pi f t + \varphi_n) \rangle = \frac{1}{2} \hat{V} \hat{I}_1 \cos \varphi_1$ après linéarisation.

Q7. En supposant $\varphi_1 = 0$, $P = \frac{1}{2} \hat{V} \hat{I}_1$ avec $\hat{V} = 325 \text{ V}$ et $\hat{I}_1 = 3,0 \text{ A}$.

A.N. $P = 0,49 \text{ kW}$.

I.3. Modélisation du réseau

Q8. On souhaite enregistrer la fem $e(t)$ qui est la tension à vide du réseau. On peut donc l'enregistrer en débranchant la charge pour avoir $i(t) = 0$, et en affichant la tension $v(t)$ car dans ce cas $\underline{v}(t) = \underline{e}(t) - (r + j\lambda\omega)\underline{i}(t) = \underline{e}(t)$.

De plus, sur les oscilloscopes usuels, on peut afficher des tensions d'amplitude maximale 20 V (quatre carreaux à 5V/carreau). Il faut donc utiliser un diviseur de tension ou une sonde d'oscilloscope qui permet de diviser la tension par exemple par 20.

Q9. D'après le schéma électrique, $i(t)$ doit vérifier $e(t) - v(t) = ri(t) + \lambda \frac{di}{dt}(t)$.

Or, en première approximation, sur la figure 5, $e(t) - v(t)$ est proportionnel à $i(t)$. Le terme $\lambda \frac{di}{dt}(t)$ est donc négligeable devant $ri(t)$ ce qui conduit à mener les calculs avec $\lambda = 0$.

On estime par lecture du graphique les valeurs maximales : $(e(t) - v(t))_{\max} = 23 \text{ V}$ et

$$i_{\max} = 5,8 \text{ A} \text{ donc } r \approx \frac{(e(t) - v(t))_{\max}}{i_{\max}} = 4,0 \Omega$$

I.5. Pertes en ligne

Q10. $P_{\text{pertes}} = P_e - P_{ch} = P_e - P$ car on a admis que les diodes du pont de Graetz étaient idéales.

$$P_{\text{pertes}} = P_e - P = \langle e(t)i(t) \rangle - \langle v(t)i(t) \rangle = \langle e(t)i(t) - v(t)i(t) \rangle = \langle (e(t) - v(t))i(t) \rangle = \langle r.i^2(t) \rangle$$

$$P_{\text{pertes}} = r \langle i^2(t) \rangle$$

Or $i(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{I}_n \cos(2\pi nft + \varphi_n)$, et donc, d'après l'égalité de Parseval rappelée dans le

$$\text{formulaire, } P_{\text{pertes}} = r \langle i^2(t) \rangle = \frac{r}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \hat{I}_n^2.$$

Q11. Si l'intensité est sinusoïdale, $P_{\text{pertes}} = \frac{r}{2} \hat{I}_1^2$ et sinon $P_{\text{pertes}} = \frac{r}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \hat{I}_n^2 = \frac{r}{2} \hat{I}_1^2 + \frac{r}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \hat{I}_n^2$.

Or la puissance moyenne fournie par le réseau électrique $P = \frac{1}{2} \hat{U} \hat{I}_1 \cos \varphi_1$ ne dépend que du fondamental. Si elle reste la même, et que la forme de l'intensité n'est pas sinusoïdale, on ajoute en pertes $\frac{r}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \hat{I}_n^2$ due aux harmoniques.

On a donc intérêt à avoir une intensité sinusoïdale, sans harmoniques.

De plus, si le fondamental est en phase avec la tension $v(t)$, cela augmente le facteur de

puissance $\cos \varphi_1$ et permet de réduire l'amplitude \hat{I}_1 . On réduit alors le terme de pertes $\frac{r}{2} \hat{I}_1^2$

dû au fondamental.

Finalement, on a intérêt à avoir une intensité sinusoïdale et en phase avec la tension $v(t)$.

$$\text{La réduction de pertes relative est donc } \frac{P_{\text{pertes cas non sinus}} - P_{\text{pertes cas sinus}}}{P_{\text{pertes cas non sinus}}} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \hat{I}_n^2 - (\hat{I}_1^2)}{\sum_{n=1}^{\infty} \hat{I}_n^2} \text{ cas sinus en phase}$$

Partie II : Correcteur de facteur de puissance

II.1. Hacheur survolteur

Q12. Entre 0 et αT_H , le transistor est "fermé" et $u_{Tr}(t) = 0$ comme le rappelle l'énoncé.

La loi des mailles à droite donne donc $u_D(t) = -U_{ch} < 0$: la diode est bloquée.

La loi des mailles à gauche donne $u_L(t) = U_0 = L \frac{di_L}{dt}(t)$ d'où $i_L(t) = \frac{U_0}{L} t + i_L(0) = \frac{U_0}{L} t + I_{\min}$.

La diode étant bloquée, $i_D(t) = 0$ et la loi des nœuds donne $i_{Tr}(t) = i_L(t) = \frac{U_0}{L} t + I_{\min}$.

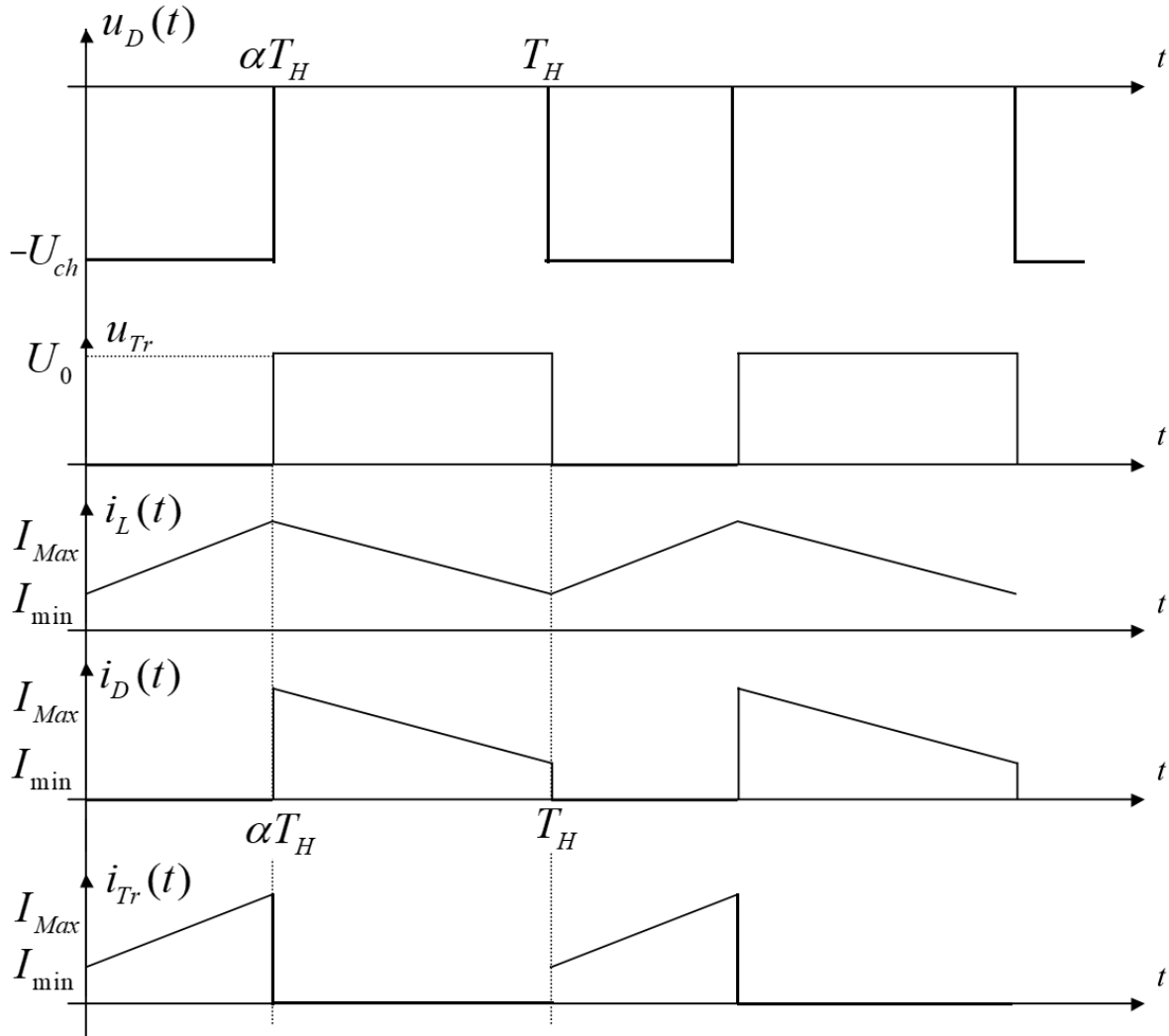
Q13. Entre αT_H et T_H , le transistor est "fermé" et $i_{Tr}(t) = 0$.

La loi des noeuds donne donc $i_D(t) = i_L(t)$. On suppose $i_L(t) > 0$ ne s'annulant jamais : la diode est passante (sinon on aurait une "source de courant" en circuit ouvert), d'où $u_D(t) = 0$ et $u_{Tr}(t) = U_{ch}$.

Il reste une maille pour laquelle $u_L(t) = U_0 - U_{ch} = L \frac{di_L}{dt}(t) < 0$ car survolteur, d'où

$$i_L(t) = \frac{U_0 - U_{ch}}{L}(t - \alpha T_H) + i_L(\alpha T_H) = \frac{U_0 - U_{ch}}{L}(t - \alpha T_H) + I_{Max} \text{ décroissante.}$$

Q14. Chronogrammes



Q15. En supposant le régime périodique atteint, les deux expressions précédentes de $i_L(t)$

permettent d'écrire $i_L(T_H) = I_{Max} = \frac{U_0}{L} T_H + I_{min}$ et

$$i_L(T_H) = \frac{U_0 - U_{ch}}{L}(1 - \alpha)T_H + I_{Max} = I_{min} = i_L(0).$$

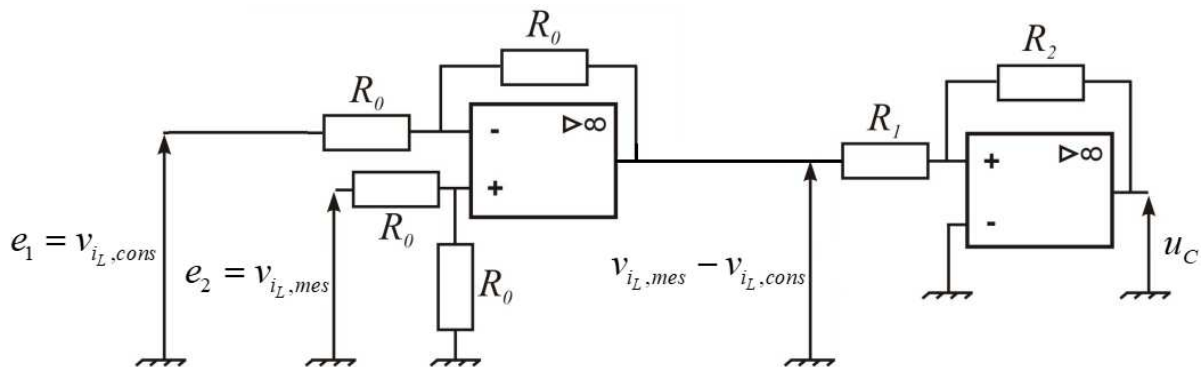
On en déduit $I_{Max} - I_{min} = \frac{U_0}{L} \alpha T_H = \frac{U_{ch} - U_0}{L}(1 - \alpha)T_H$, d'où $U_{ch} = \frac{U_0}{1 - \alpha} > U_0$.

Q16. De la question précédente, on tire $I_{Max} - I_{min} = \frac{U_0}{L} \alpha T_H$ d'où

$$L = \frac{U_0}{I_{Max} - I_{min}} \alpha T_H = 80 \cdot 10^{-3} H = 80 mH .$$

II.2 - Principe du correcteur de facteur de puissance et commande du transistor

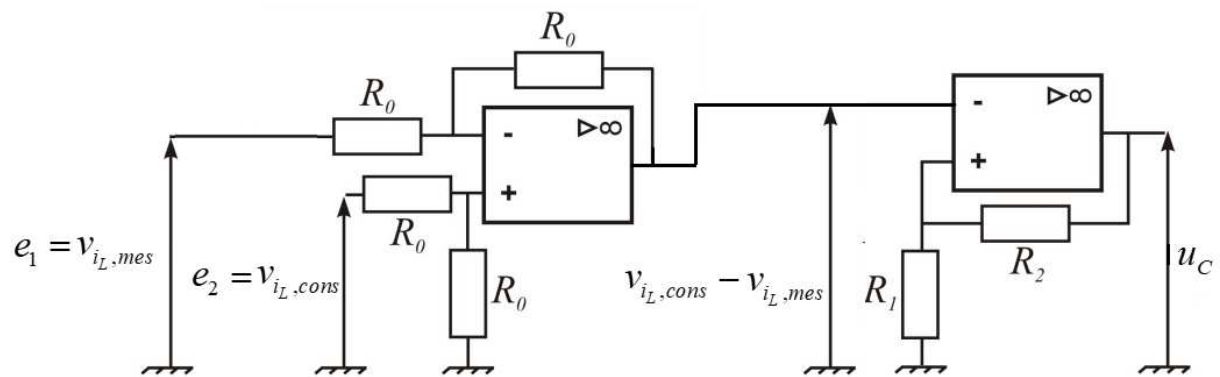
Q17. On forme $v_{i_L,mes} - v_{i_L,cons}$ grâce au soustracteur (montage 3) avec $e_2 = v_{i_L,mes}$; $e_1 = v_{i_L,cons}$. u_C doit passer à $+V_{sat}$ (resp. $-V_{sat}$) quand cette différence devient supérieure à Δ (resp. inférieure à $-\Delta$). On choisit donc le montage 1 comparateur à hystérésis non inverseur, pour lequel le seuil de basculement est $\Delta = e_{\uparrow} = \frac{R_1}{R_2} V_{sat}$.



Mais on pourrait aussi former $v_{i_L,cons} - v_{i_L,mes}$ grâce au soustracteur (montage 3) en prenant $e_1 = v_{i_L,mes}$; $e_2 = v_{i_L,cons}$.

u_C doit passer à $-V_{sat}$ (resp. $+V_{sat}$) quand cette différence devient supérieure à Δ (resp. inférieure à $-\Delta$). On choisirait alors le montage 2 comparateur à hystérésis inverseur avec

$$\Delta = e_{\uparrow} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat} .$$



II.3 – Mise en oeuvre

Q18. On observe sur la figure 9 des fluctuations de l'intensité autour de la forme sinusoïdale désirée. Cela est dû aux basculements du comparateur à hystérésis. Au voisinage du maximum, on observe une fluctuation crête à crête de l'ordre de $1,5A$, ce qui correspond à une fluctuation de $1,5V$ pour $v_{i_L,mes}$ car $k = 1,0 V \cdot A^{-1}$. Cette fluctuation correspond $2\Delta \approx 1,5V$ soit $\Delta \approx 0,75 V$.

Les fluctuations de l'intensité diminuent de la figure 9 à la figure 11, ce qui correspond donc à une diminution du seuil de basculement Δ .

Q19. Spectre de $i(t)$ pour la figure 9 :

- Une composante sinusoïdale de fréquence $f=50$ Hz et d'amplitude voisine de 3A, ce qui correspond à l'allure souhaitée.
- Hautes fréquences : des composantes de fréquences de l'ordre de $f_{fluctu} \approx 15f$ (14 ou 15 fluctuations sur une période T) et multiples de f_{fluctu} , correspondant aux fluctuations en "dents de scie", avec des amplitudes de l'ordre de 1A.

Lorsque que Δ diminue sur les graphes 10 et 11, on observe que :

- la composante basse fréquence (50Hz) reste sensiblement la même ;
- les composantes hautes fréquences ont des fréquences de plus en plus grandes et des amplitudes plus faibles : "dents de scie" plus serrées et plus fines.

Q20. On vient de relever que diminuer Δ fait basculer le comparateur à fréquence plus élevée, observation confirmée par l'énoncé au début de la partie suivante. Mais à cause de la saturation en vitesse (slew rate) des amplificateurs opérationnels, le comparateur à hystérésis ne peut pas basculer instantanément d'une tension de saturation à l'opposée, ce qui empêche de trop diminuer Δ .

II.4 - Dissipation thermique dans le transistor

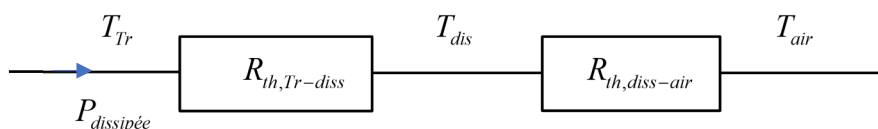
Q21. La droite d'ajustement affine coupe toutes les barres d'incertitudes associées aux mesures. On peut donc considérer le modèle affine comme cohérent avec les mesures.

Q22. La puissance thermique à évacuer, analogue à l'intensité en électrocinétique, doit traverser successivement l'interface transistor-dissipateur, le dissipateur lui-même, l'interface dissipateur-air. (On considère le transistor et l'air comme des thermostats, et on néglige le transfert par les faces du transistor qui ne sont pas en contact avec le dissipateur). Le schéma électrique analogue est donc une association série de résistances.

$$\frac{T_{Tr} - T_{air}}{P_{dissipée}} = R_{th,eq} = R_{th,Tr-diss} + \cancel{R_{th,diss}} + R_{th,diss-air}.$$

On néglige la résistance du dissipateur (métallique) devant celles des interfaces.

On suppose que dans l'énoncé, la température T_{dis} à la surface du dissipateur est donc celle du dissipateur.



Mais on a dans ce cas simplement $\frac{T_{dis} - T_{air}}{P_{dissipée}} = \frac{T_{dis} - T_{air}}{P_{cond} + P_{com}} = R_{th,diss-air}$, c'est-à-dire

$$T_{dis} = R_{th,diss-air} (P_{cond} + P_{com}) + T_{air}.$$

Or $P_{com} = 2E_{On/Off} / T = 2E_{On/Off} f$, donc $T_{dis} = R_{th,diss-air} \cdot 2E_{On/Off} f + R_{th,diss-air} P_{cond} + T_{air}$

Par identification, $a = 2R_{th,diss-air} E_{On/Off}$ et $b = R_{th,diss-air} P_{cond} + T_{air}$

Q23. On en déduit $P_{cond} = \frac{b - T_{air}}{R_{th,diss-air}} = \frac{20}{4} = 5W$ et $E_{On/Off} = \frac{a}{2R_{th,diss-air}} = \frac{5,5 \cdot 10^{-3}}{2 \times 4} = 0,7 \cdot 10^{-3} J$

Partie III - Contrôle du correcteur de facteur de puissance par Intelligence Artificielle

III.1 - Présentation du problème

Q24. Les différents éléments (télé, radiateur, éclairage, chauffe-eau) doivent tous être alimentés sous une tension de $230V_{\text{eff}}$, et sont donc câblés en dérivation.

Q25. Le radiateur et le chauffe-eau étant résistifs, ils obéissent à une équation du type $u(t) = R i(t)$: intensité et tension ont même forme (sinusoïdale) et sont de plus en phase.

Q26. Un radiateur a une puissance typique de 1 à 2kW. De même pour un "petit" chauffe-eau électrique d'un studio.

Q27. Chaque appareil a trois modes de fonctionnement ; il y a quatre appareils ; cela fait donc $3^4 = 81$ combinaisons possibles.

Q28. Lorsque $x_1 = 0$ et $x_2 = 0$, les seuls appareils susceptibles de fonctionner sont le radiateur et le chauffe-eau, tous deux résistifs et fonctionnant avec une intensité sinusoïdale. Il n'y a donc pas lieu d'utiliser un appareil pour supprimer des harmoniques, d'où le choix de $\Delta_{\text{opt}} = -1$.

Q29. Pour la combinaison $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, 2, 2, 2)$ tous les appareils fonctionnent à puissance maximale. Mais dans ce cas, la puissance consommée par le bloc télé et l'éclairage est négligeable devant celle qui est consommée par le radiateur et le chauffe-eau. Donc l'intensité absorbée par le bloc télé et l'éclairage est faible devant l'intensité du radiateur et du chauffe-eau, déjà sinusoïdale. Inutile là encore d'utiliser un appareil pour rendre le courant sinusoïdal, d'où le choix de $\Delta_{\text{opt}} = -1$.

III.2 - Contrôle du paramètre Δ avec un réseau de neurones

Q30. Les appareils peuvent communiquer par wi-fi, ou plus simplement par "courant porteur" (signal superposé à la tension d'alimentation électrique) étant donné qu'ils sont tous reliés au secteur.

Q31. Réseau de neurones

Avantages	Inconvénients
- Potentiellement une grande efficacité : peu d'erreurs - Réponse en temps constant (pas d'itérations en phase d'évaluation)	- Nécessite une phase d'apprentissage avec des données validées par un humain - On ne sait pas exactement comment est calculé le résultat : caractère "boîte noire"

Q32. Lors d'un apprentissage supervisé, le résultat doit, pour une entrée donnée, converger vers une valeur spécifiée. Dans la mesure où on souhaite ici pour une entrée un résultat précis (une commande qui permet d'obtenir un courant sinusoïdal), l'apprentissage supervisé peut être utilisé.

A contrario un apprentissage non supervisé organise les données en y cherchant des structures sous-jacentes, sans but défini auparavant, ce qui n'est pas intéressant ici.

Q33. Dérivée de la sigmoïde $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$.

Expression de la dérivée : $f'(x) = \frac{+e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$.

Programme Python

```
def f_prime(x) :
    return np.exp(-x) / (1+np.exp(-x))**2
```

III.4 - Phase d'inférence

Q34. Dimension des matrices :

W_2	4×4
W_3	1×4
B_2	4×1
b_3	scalaire

Q35. Avec les notations de l'énoncé

$$W_1 = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} & w_{14} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} & w_{24} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} & w_{34} \\ w_{41} & w_{42} & w_{43} & w_{44} \end{pmatrix}$$

Q36.

```
def inference_couche(X,W,B) :
    return f(np.dot(W,X) + B)
```

Q37.

$$W \cdot X + B = \begin{pmatrix} 0,2 \\ -0,3 \\ 0,3 \\ -0,75 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 \\ -0,3 \\ 0,3 \\ -0,75 \end{pmatrix}$$

On utilise la partie droite de la figure 18 pour lire les valeurs retournées par f .

$$A = f(W \cdot X + B) = \begin{pmatrix} 0,55 \\ 0,425 \\ 0,575 \\ 0,325 \end{pmatrix}$$

Q38. On cherche $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_{ij}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_1} \frac{\partial a_1}{\partial w_{ij}} + \dots + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_i} \frac{\partial a_i}{\partial w_{ij}} + \dots + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_4} \frac{\partial a_4}{\partial w_{ij}}$

Avec $a_i = f(w_{i1}x_1 + w_{i2}x_2 + w_{i3}x_3 + w_{i4}x_4 + b_i)$, on obtient

$$\frac{\partial a_i}{\partial w_{ij}} = x_j f'(w_{i1}x_1 + w_{i2}x_2 + w_{i3}x_3 + w_{i4}x_4 + b_i) = x_j f'(y_i) \text{ et } \frac{\partial a_{k \neq i}}{\partial w_{ij}} = 0 \text{ car indépendant de } w_{ij}.$$

D'où la relation demandée $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_{ij}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_i} f'(y_i) x_j$.

Q39. On a besoin du produit terme à terme de $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A}$ et $f'(Y)$ que l'on note $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A} \cdot f'(Y)$ comme suggéré plus loin dans l'énoncé.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial W} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A} \cdot f'(Y) \right) X^T = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A} \cdot f'(WX + B) \right) X^T$$

Q40.

De façon similaire, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A} \cdot f'(Y)$

```
def retropropagation_couche(X,W,B,Ea,alpha):
    # erreurs
    Ew = np.dot(Ea*f_prime(np.dot(W,X)+B), X.T)
    Eb = Ea*f_prime(np.dot(W,X)+B)
    Ex = np.dot(Ea*f_prime(np.dot(W,X)+B), W)
    # retour des nouvelles valeurs (sans effet de bord)
    return W-alpha*Ew, B-alpha*Eb, Ex
```

III.6 - Analyse des résultats

Q41. Les valeurs cibles sont bien prédites sauf pour la configuration (1,0,0,0), box et TV en veille.

Un réseau de neurones est adapté pour un grand nombre de données, ce qui n'est pas vraiment le cas ici avec seulement 81 combinaisons : on pourrait mémoriser les 81 valeurs optimales.

Q42. La figure 19 indique qu'il n'y a plus d'évolution notable de la fonction erreur à partir de 15 itérations. Il n'est pas utile d'augmenter encore le nombre d'itérations au-delà de 100.

Augmenter le nombre de données de tests n'a pas d'effet : les coefficients du réseau de neurones sont fixés lors de l'apprentissage.

Par contre, on pourrait augmenter le nombre de données d'entraînement, au risque d'obtenir un sur-apprentissage.