

# Proposition de corrigé - EPITA 2024

Corrigé proposé par Fabien Baudribos et Vincent Combette (Lycée Charles Coëffin).

Contacts : Fabien.Baudribos@ac-guadeloupe.fr ; Vincent.Combette@ac-guadeloupe.fr

## I - Détermination de la période des oscillations

1 - La loi de Laplace s'applique si le gaz est un **gaz parfait** et que la transformation est **adiabatique et réversible**.

2 - En remarquant que le volume  $V(t)$  du gaz enfermé diminue à mesure que  $x$  augmente, on a directement :

$$V(t) = V_0 - \Sigma x$$

3 - D'après la loi de Laplace :

$$p(t) = \frac{p_0 V_0^\gamma}{V(t)^\gamma}$$

D'où :

$$\begin{aligned}\vec{F} &= p_0 \Sigma \vec{e}_x - \frac{p_0 V_0^\gamma}{V(t)^\gamma} \Sigma \vec{e}_x \\ &= p_0 \Sigma \left[ 1 - \left( \frac{V_0}{V_0 - \Sigma x} \right)^\gamma \right] \vec{e}_x \\ &= p_0 \Sigma \left[ 1 - \left( \frac{1}{1 - \frac{\Sigma x}{V_0}} \right)^\gamma \right] \vec{e}_x\end{aligned}$$

Or  $\frac{\Sigma x}{V_0} \ll 1$ , donc :

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{\Sigma x}{V_0}\right)^\gamma} = \left(1 - \frac{\Sigma x}{V_0}\right)^{-\gamma} \approx 1 + \gamma \frac{\Sigma x}{V_0} \quad (\text{à l'ordre 1})$$

La résultante des forces s'écrit ainsi :

$$\vec{F} = p_0 \Sigma \left[ 1 - \left( 1 + \frac{\gamma \Sigma x}{V_0} \right) \right] \vec{e}_x = -\frac{p_0 \Sigma^2 \gamma x}{V_0} \vec{e}_x$$

Par identification avec la relation (1) donnée dans l'énoncé, on en déduit

$$\vec{F} = -\gamma k x \vec{e}_x \quad \text{où } k = \frac{p_0 \Sigma^2}{V_0}$$

### I.1 - Méthode de Rüchardt

4 - Système : piston de masse  $m$

Référentiel : terrestre supposé galiléen

Bilan des forces :

— le poids :  $\vec{P} = mg\vec{e}_x$

— la résultante des forces de pression :  $\vec{F} = -\gamma kx\vec{e}_x$

Le principe fondamental de la dynamique appliqué au piston s'écrit ainsi :  $m\vec{a} = \sum \vec{F}_{ext}$

$$\text{selon } \vec{e}_x : m \frac{d^2x(t)}{dt^2} = mg - \gamma kx(t)$$

$$\iff \boxed{\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{\gamma k}{m}x(t) = g}$$

5 - Sous forme canonique, l'équation différentielle précédente s'écrit :

$$\boxed{\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega_0^2x(t) = g \text{ où } \omega_0 = \sqrt{\frac{\gamma k}{m}}}$$

6 - Une solution particulière de cette équation différentielle est :  $x_p = \frac{g}{\omega_0^2}$ .

L'équation différentielle homogène de ce système correspond à celle d'un oscillateur harmonique. La solution homogène est donc de type :  $x_h(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$  où  $A$  et  $B$  sont des constantes.

La solution générale de  $x(t)$  est donc :

$$\boxed{x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + \frac{g}{\omega_0^2}}$$

7 - Par définition,  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ . Or,  $\omega_0^2 = \frac{\gamma k}{m}$ . Ainsi,

$$\gamma = \frac{m}{k}\omega_0^2 \quad \text{soit} \quad \boxed{\gamma = \frac{m}{k} \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2}$$

## I.2 - Méthode de Rinkel

8 - L'énergie cinétique du piston est :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2}$$

L'énergie potentielle de pesanteur du piston s'écrit (il y a un signe moins car l'axe  $Ox$  est descendant) :

$$\boxed{E_{p,pes} = -mgx}$$

9 - Le lien entre une force et son énergie potentielle est :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_p)$$

Donc ici :

$$\vec{F} = -\frac{dE_p}{dx}\vec{e}_x = -\gamma kx\vec{e}_x$$

En intégrant par rapport à  $x$ , on obtient selon  $\vec{e}_x$  :

$$E_{p,\vec{F}} = \frac{1}{2}\gamma kx^2$$

Remarque : la démonstration n'était pas demandée pour cette question : on pouvait, comme le disait l'énoncé, raisonner par analogie avec la force de rappel  $\vec{F}_r$  d'un ressort :  $\vec{F}_r = -kx$  donc  $E_{p,e} = \frac{1}{2}kx^2$ .

**10** - Le piston n'est soumis qu'à des forces conservatives donc **l'énergie mécanique se conserve**.

Or à  $t = 0$ ,  $E_m(t = 0) = E_c(t = 0) + E_{p,pes}(t = 0) + E_{p,\vec{F}}(t = 0) = 0$  car  $x(0) = 0$  et  $\dot{x}(t = 0) = 0$ .

On pose le temps  $t_L$  qui correspond au temps pour que le piston se déplace de la distance maximale  $L$ .

On a alors :  $x(t = t_L) = L$  et  $\dot{x}(t = t_L) = 0$ . Donc :

$$\begin{aligned} E_m(t = t_L) &= 0 \\ \iff E_c(t = t_L) + E_{p,pes}(t = t_L) + E_{p,\vec{F}}(t = t_L) &= 0 \\ \iff 0 + \frac{\gamma kL^2}{2} - mgL &= 0 \\ \iff \frac{\gamma kL}{2} &= mg \\ \iff \boxed{L = \frac{2mg}{\gamma k}} \end{aligned}$$

## II - Étude mécanique avec frottements

**11** - Le nombre d'oscillations du système avant de revenir à l'équilibre permet de donner une valeur approchée du facteur de qualité. Ainsi,  $\boxed{Q \approx 10}$ . Le système est dans un régime **pseudo-périodique**.

**12** - Le polynôme caractéristique de l'équation différentielle (2) s'écrit :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$$

et le discriminant associé

$$\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2 \left(\frac{1}{4Q^2} - 1\right) < 0$$

Les racines complexes conjuguées s'écrivent ainsi :

$$r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{j}{2}\sqrt{-\Delta} = \underbrace{-\frac{\omega_0}{2Q}}_{\mu} \pm j \underbrace{\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}_{\Omega}$$

Ainsi, on a  $\boxed{\mu = \frac{\omega_0}{2Q}}$  et  $\boxed{\Omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$ .

**13** - Les solutions générales de l'équation (2) s'écrivent comme la somme de la solution homogène  $x_H(t)$  et d'une solution particulière  $x_p = \frac{g}{\omega_0^2}$  :

$$\boxed{x(t) = e^{-\mu t} [A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)] + \frac{g}{\omega_0^2}}$$

14 - D'après les conditions initiales :

$$- x(t=0) = 0 \text{ soit } \frac{g}{\omega_0^2} + A = 0 \text{ d'où } \boxed{A = -\frac{g}{\omega_0^2}}$$

$$- \text{La vitesse du piston est : } \dot{x}(t) = -\mu e^{-\mu t} [A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)] + \Omega e^{-\mu t} [-A \sin(\Omega t) + B \cos(\Omega t)]$$

$$\text{Or : } \dot{x}(t=0) = 0 \text{ soit } -\mu A + B\Omega = 0 \text{ d'où } \boxed{B = -\frac{\mu g}{\Omega \omega_0^2}}$$

15 - La position d'équilibre correspond à la solution particulière de l'équation différentielle : on a directement

$$\boxed{x_{\text{éq}} = \frac{g}{\omega_0^2}}$$

16 - L'allure graphique est donnée figure 1. On remarquera plusieurs choses :

- $x(t=0) = 0$
- $\dot{x}(t=0) = 0$  (pente nulle à l'origine)
- $x(t \rightarrow \infty) = x_{\text{éq}}$

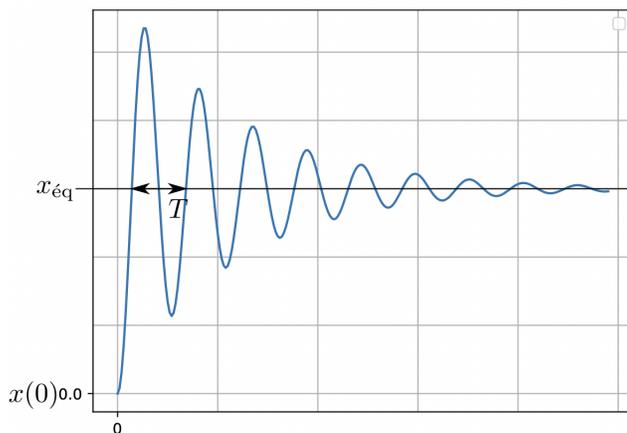


FIGURE 1 – Allure graphique de la position du piston  $x$  en fonction du temps

17 - La pseudo-période  $T$  est donnée par  $T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$ . Ainsi,

$$\frac{T}{T_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \approx 1 \quad \text{pour } Q \approx 10$$

Il n'y a donc pas de différence significative entre  $T$  et  $T_0$ .

18 - D'après la question précédente,  $\omega_0 \approx \Omega$ . Ainsi,

$$\mu = \frac{\omega_0}{2Q} \approx \frac{\Omega}{2Q} \iff \boxed{Q = \frac{\Omega}{2\mu} = \frac{5,83}{2 \times 0,30} \approx 10}$$

19 - On peut envisager comme cause physique la **non-adiabaticité** de la transformation : il existe en réalité des échanges thermiques entre le gaz enfermé et le milieu extérieur, qui pourrait expliquer cette dérive linéaire en  $t$ .

### III - Étude en régime sinusoïdal forcé

#### III.1 - Mise en équation

20 - On rappelle que dans le domaine complexe,  $\dot{x} = j\omega x$  et  $\ddot{x} = -\omega^2 x$ . Ainsi, l'équation (3) devient :

$$-m\omega^2 \underline{X}_0 = -\gamma k \underline{X}_0 - \lambda j\omega \underline{X}_0 + F_0$$

où l'on a simplifié par  $e^{j\omega t}$ . En factorisant par  $\underline{X}_0$ , on en déduit :

$$\underline{X}_0 = \frac{F_0}{-m\omega^2 + \gamma k + j\lambda\omega} = \frac{F_0/\gamma k}{1 - \frac{m}{\gamma k}\omega^2 + j\frac{\lambda}{\gamma k}\omega}$$

Par identification, on en déduit directement  $A = \frac{F_0}{\gamma k}$  et  $\omega_0 = \sqrt{\frac{\gamma k}{m}}$ .

De plus, on identifie  $\frac{1}{Q\omega_0} = \frac{\lambda}{\gamma k}$  soit  $Q = \frac{\gamma k}{\lambda\omega_0}$  d'où  $Q = \frac{\sqrt{m\gamma k}}{\lambda}$ .

21 - L'amplitude  $X_0$  du signal est donnée par le module de l'amplitude complexe  $|\underline{X}_0|$  :

$$X_0 = |\underline{X}_0| = \frac{A}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}}$$

22 - Pour  $\omega \rightarrow 0$ , le dénominateur tend vers 1, donc  $X_0 \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} A$ .

Pour  $\omega \rightarrow +\infty$ ,  $X_0 \simeq \frac{A\omega_0^2}{\omega^2}$  donc  $X_0 \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} 0$ .

23 - On pose  $u = \omega/\omega_0$ . Ainsi,  $X_0$  se réécrit :

$$X_0 = \frac{A}{\sqrt{(1 - u^2)^2 + u^2/Q^2}}$$

L'amplitude  $X_0$  admet un maximum lorsque son dénominateur est minimal, ce qui revient bien à chercher un minimum pour la fonction  $f(u) = (1 - u^2)^2 + u^2/Q^2$ .

24 - Pour chercher le minimum de la fonction  $f$ , on cherche les zéros sa dérivée et on doit vérifier a posteriori qu'il s'agit bien d'un minimum en calculant la dérivée seconde pour montrer qu'elle est positive.

On commence par chercher les zéros de  $f'(u) : \frac{df}{du} = 0$ . Ainsi

$$\frac{df}{du} = \frac{2u}{Q^2} + 2 \times (-2u)(1 - u^2) = 4u \left( \frac{1}{2Q^2} - (1 - u^2) \right)$$

La solution  $u = 0$  ne nous intéresse pas, on en déduit que l'équation  $\frac{df}{du} = 0$  se traduit par la condition :

$$\frac{1}{2Q^2} - (1 - u_r^2) = 0 \quad \text{soit} \quad u_r = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

Cette égalité est valable uniquement si l'argument dans la racine est positif, ce qui impose la condition suivante sur  $Q$  :

$$Q \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Il faut maintenant trouver le signe de  $f''(u)$  pour  $u = u_r$  :

$$\frac{d^2f}{du^2} = \frac{2}{Q^2} - 4 + 12u^2$$

Donc :

$$\frac{d^2f}{du^2}(u = u_r) = \frac{2}{Q^2} - 4 + 12 \left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right) = 8 - \frac{4}{Q^2} = 8 \left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)$$

Or  $\left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right) > 0$  d'où  $f''(u = u_r) > 0$  et donc  $f(u)$  est bien minimale en  $u = u_r$ .

25 - En reprenant la définition de  $u = \frac{\omega}{\omega_0}$ , on trouve directement :

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

Si  $Q \approx 10$ , le quotient  $\frac{1}{2Q^2} \approx 0,005$  : dans ce cas, le rapport  $\frac{\omega_r}{\omega_0} \approx 1$  (à  $10^{-2}$  près).

26 - Pour  $\omega = \omega_0$ , l'amplitude complexe  $\underline{X}_0$  se réécrit

$$\underline{X}_0(\omega = \omega_0) = \frac{A}{j/Q} \quad \text{soit} \quad \underline{X}_0(\omega_0) = -jQA$$

On en déduit l'amplitude et la phase associées :

—  $X_0(\omega_0) = Q \times A$

—  $\varphi(\omega_0) = \arg(\underline{X}_0(\omega_0)) = -\frac{\pi}{2}$  (car  $-j = e^{-j\frac{\pi}{2}}$ )

27 - L'allure graphique de l'amplitude  $X_0 = f(\omega)$  est donnée ci-dessous. On repère les valeurs remarquables grâce aux résultats des questions 22 et 26. La résonance est atteinte en  $\omega_0 \simeq \omega_r$ .

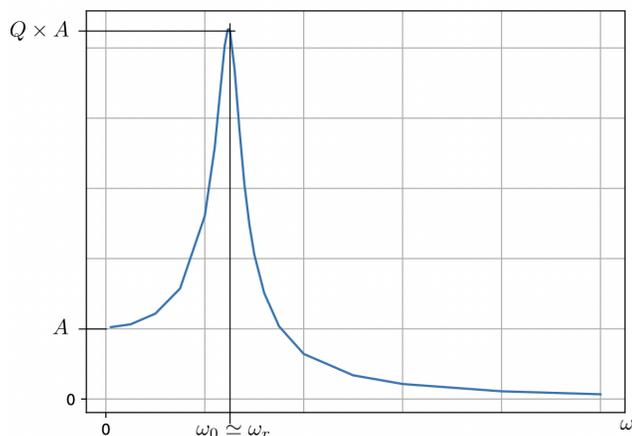


FIGURE 2 – Tracé de l'amplitude du signal  $X_0$  en fonction de la pulsation  $\omega$

28 - On rappelle que  $\varphi = \arg(\underline{X}_0)$ .

- Pour  $\omega \rightarrow 0$ ,  $\underline{X}_0 \simeq A$  donc  $\varphi \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 0$ .
- Pour  $\omega \rightarrow +\infty$ ,  $\underline{X}_0 \simeq -\frac{A}{\omega^2/\omega_0^2}$  donc  $\varphi \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} -\pi$ .

29 - L'allure graphique de l'amplitude  $\varphi = f(\omega)$  est donnée ci-dessous. On repère les valeurs remarquables grâce aux résultats des questions 26 et 28.

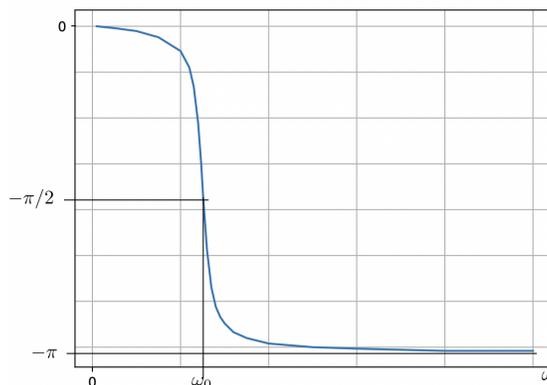


FIGURE 3 – Tracé de la phase du signal  $\varphi$  en fonction de la pulsation  $\omega$

### III.2 - Exemples de résultats

30 - Il s'agit ici d'une évaluation d'incertitude de type A. En notant  $\sigma$  l'écart-type associé à cette distribution, l'incertitude-type  $u(\gamma)$  est donnée par :

$$u(\gamma) = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \quad \text{avec} \quad \sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\gamma_i - \bar{\gamma})^2} \quad \text{et} \quad \bar{\gamma} \text{ la valeur moyenne des } \gamma_i$$

31 - On exploite ici la relation donnant la bande passante de la résonance au facteur de qualité donnée dans l'énoncé :

$$|f_{c,1} - f_{c,2}| = \frac{f_r}{Q}$$

où l'on évalue la fréquence de résonance grâce à l'abscisse du pic de la courbe de la figure 6 :

$$f_r \approx 29,2 \text{ Hz}$$

Pour  $f = f_{c,1} = f_{c,2}$ , l'amplitude est divisée d'un facteur  $\sqrt{2}$  par rapport au maximum, qui se situe à une amplitude de  $6,52 \times 10^{-2}$  cm. En ordre de grandeur,

$$\frac{6,52}{\sqrt{2}} \approx \frac{6,52}{1,5} = \frac{2 \times 6,5}{3} \approx 4,6$$

Ainsi, les fréquences de coupure sont telles qu'à ces fréquences, l'amplitude vaut 0,046 cm. Par lecture graphique, on repère les abscisses de l'intersection entre la droite horizontale  $y = 0,046$  et la courbe représentative de l'amplitude, comme sur la figure ci-dessous.

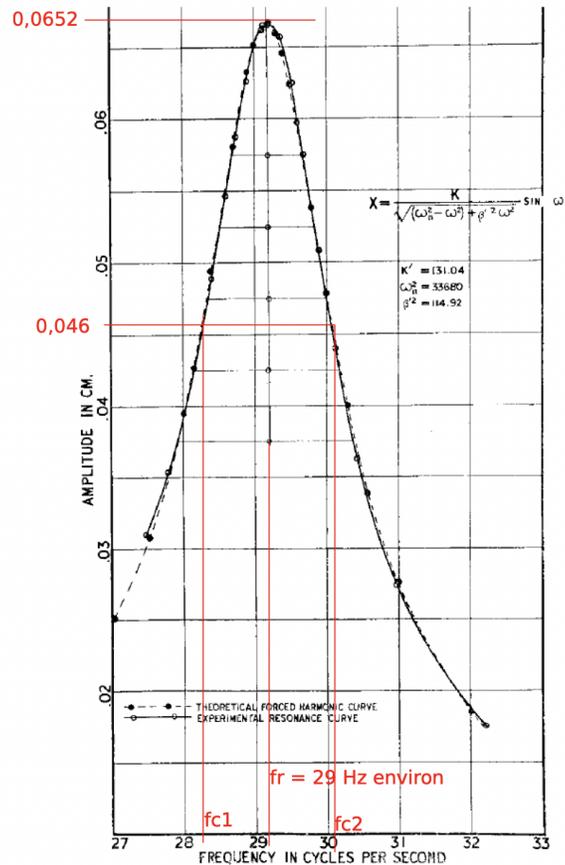


FIGURE 4 – Lecture graphique pour déterminer les fréquences de coupure et la fréquence de résonance

On en déduit :

$$f_{c,1} \approx 28,2 \text{ Hz} \quad \text{et} \quad f_{c,2} \approx 30,2 \text{ Hz}$$

Finalement,

$$Q = \frac{f_r}{|f_{c,1} - f_{c,2}|} \approx \frac{29,2}{2} \approx 14$$

- 32 - Le modèle des gaz parfaits repose sur l’hypothèse de particules ponctuelles sans interactions entre elles, ce qui suppose notamment que la taille des particules doit être bien inférieure à la distance entre ces dernières. Or, à mesure que l’on augmente la pression, les particules se rapprochent les unes des autres, et donc leur taille n’est plus petite devant la distance entre constituants et elles interagissent à courte distance. **À haute pression, le modèle des gaz parfaits n’est donc plus valable, ce qui explique les écarts de plus en plus importants à la valeur 1,4 à mesure que la pression augmente.**
- 33 - Ici, le modèle du gaz parfait reste valable, mais c’est cette fois l’hypothèse diatomique qui doit être remise en cause : **le dioxyde de carbone n’est pas un gaz diatomique ce qui explique les écarts importants à la valeur 1,4, même à basse pression.**

## IV - Étude de l'origine de la dissipation

**34** - Le signe (-) traduit le fait qu'il s'agit d'un transfert thermique effectivement **cédé** par le gaz lorsque  $T > T_0$ .

**35** - Grâce à la première identité thermodynamique (équation (7)), on peut écrire  $TdS = dU + pdV$ . Or,  $dU = \delta Q - pdV$ , on en déduit ainsi

$$\boxed{TdS = \delta Q}$$

**36** - Appliqué au gaz entre deux états infiniment proches, le second principe de la thermodynamique s'écrit :

$$dS = \delta S_c + \delta S_{\text{éch}}$$

avec  $\delta S_c$  l'entropie créée infinitésimale et  $\delta S_{\text{éch}} = \frac{\delta Q}{T_0}$  l'entropie échangée infinitésimale.

En exploitant le fait que  $dS = \frac{\delta Q}{T}$  d'après la question 35, on trouve

$$\boxed{\delta S_c = \frac{\delta Q}{T} - \frac{\delta Q}{T_0} = \delta Q \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right)}$$

**37** - On remplace  $\delta Q$  par son expression donnée dans l'énoncé (équation (5)) :

$$\begin{aligned} \delta S_c &= -h\Sigma_t(T - T_0)dt \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) \\ &= -h\Sigma_t(T - T_0)dt \left( \frac{T_0 - T}{TT_0} \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\delta S_c = h\Sigma_t \frac{(T - T_0)^2}{TT_0} dt > 0}$$

Ainsi, l'entropie créée lors de la transformation est nécessairement positive.