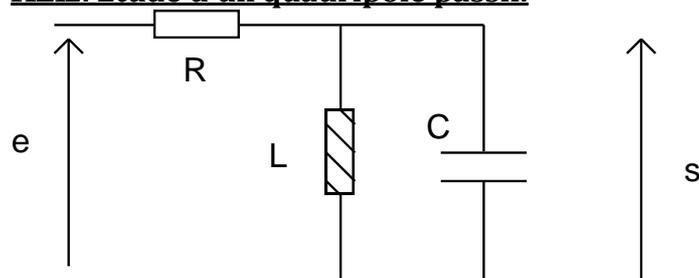


**ΠΣ12. Etude d'un quadripole passif.**

On prend :  $R = 100\text{k}\Omega$   $C = 100\text{nF}$   $L \approx 45\text{mH}$  pour une bobine de 1000 spires.

**Aspect théorique :**

En régime sinusoïdal permanent de pulsation  $\omega = 2\pi f$ , vous pouvez montrer que la fonction de transfert harmonique est :

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jQ \left( x - \frac{1}{x} \right)}$$

avec :  $H_0 = 1$   $x = \frac{f}{f_0}$   $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \approx 2370 \text{ Hz}$   $Q = R\sqrt{\frac{C}{L}} \approx 150$

Décrire les propriétés théoriques du quadripole en terme de filtration. Application numérique pour les trois constantes définies.

On a un filtre de passe-bande de gain maximum  $|H_0| = 1$ , de fréquence de résonance  $f_0$ , de bande passante à -3dB :  $\Delta f = \frac{f_0}{Q}$ .

**L'obtention rapide des valeurs des caractéristiques du filtre.**

1) Que peut-on dire pour la fonction de transfert pour  $x=1$  ? Comment peut-on détecter cette propriété en mode XY ?

Conduire l'expérience et en déduire les valeurs expérimentales de  $H_0$  et de  $f_0$ .

Pour  $x=1$ , la fonction de transfert est réelle positive, ce qui signifie qu'à la fréquence  $f_0$ , l'entrée et la sortie sont en phase, ce qui se détecte très bien en mode XY sur l'oscilloscope : l'ellipse devient alors un segment de droite.

On observe ce phénomène pour  $f_{0I} \approx 2308 \text{ Hz}$ .

J'utilise alors les mesures automatiques de l'oscilloscope pour lire  $e_{eff} \approx 6,54 \text{ V}$  et  $s_{eff}(f_0) \approx 1,69 \text{ V}$

J'obtiens alors  $H_{0I} \approx 0,26$ .

2) Mesurer alors les deux fréquences de coupure et calculer alors la valeur expérimentale de  $Q$ .

Sans toucher au niveau de l'entrée, je cherche les deux fréquences pour lesquelles  $s_{eff} = \frac{s_{eff}(f_0)}{\sqrt{2}}$ .

J'obtiens ce résultat pour  $f_{c1} \approx 2277 \text{ Hz}$  et  $f_{c2} \approx 2337 \text{ Hz}$ .

Je calcule alors :  $Q_I \approx \frac{2308}{2337-2277} \approx 38,5$ .

3) Commentaires.

Pour la fréquence de résonance, j'ai une légère erreur qui pourrait s'expliquer par l'erreur sur la valeur de  $L$ .

Par contre, le gain maximum et le facteur de qualité sont nettement plus faibles qu'attendu.

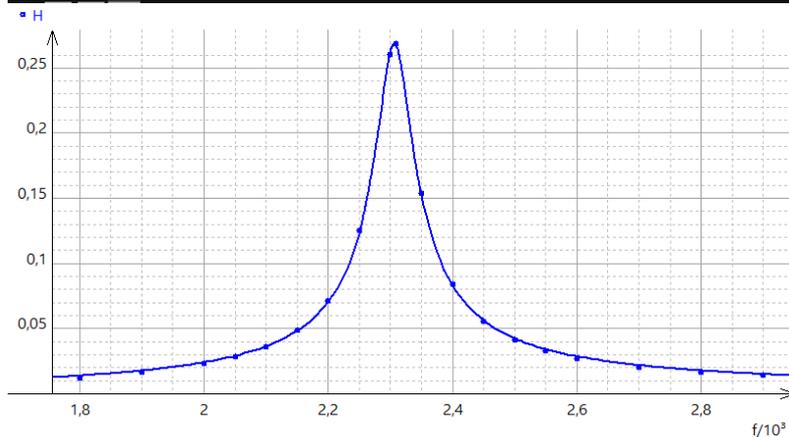
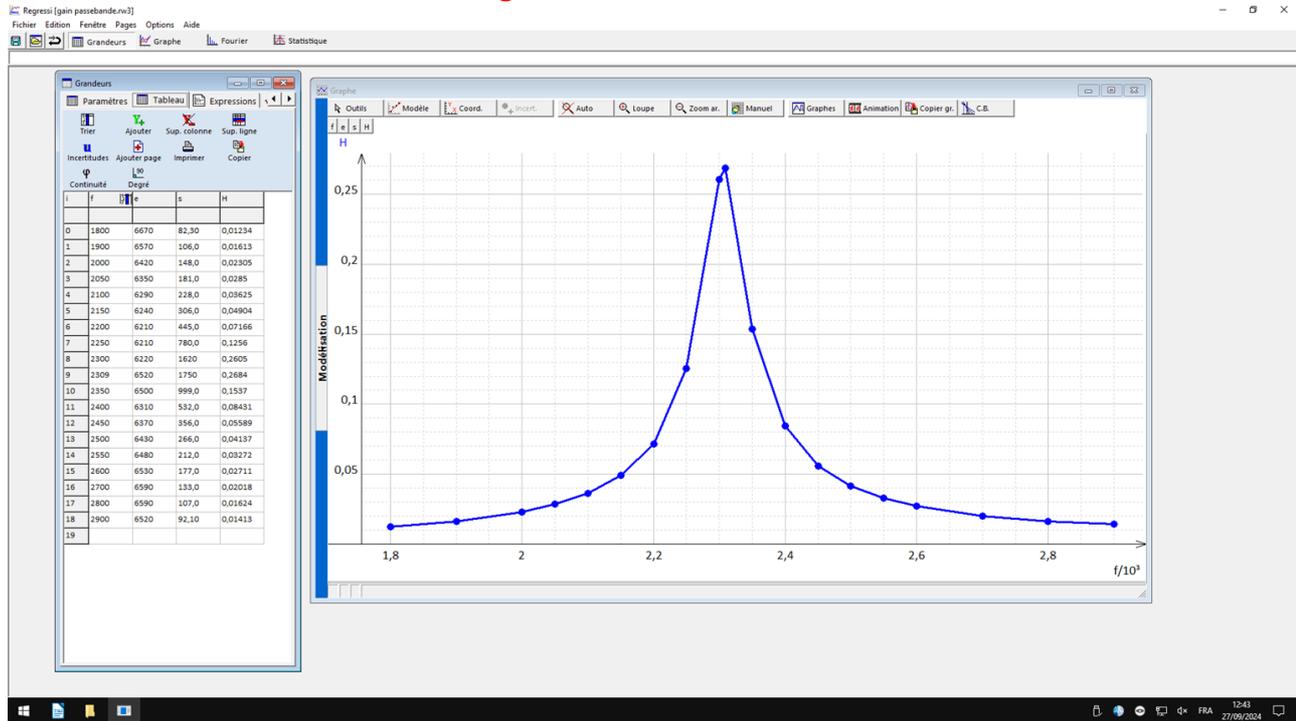
## II. Construction de la courbe de gain en RSP( $\omega$ ).

Comme les résultats obtenus à la partie précédentes paraissent surprenants, il convient d'aller un peu plus loin.

Construire expérimentalement l'allure du gain en fonction de la fréquence de préférence en utilisant regressi. Les mesures peuvent être lues à l'oscilloscope en faisant attention (au moins 1,5 périodes et les sinusoides les plus grandes possibles mais sans sortir de l'écran).

Obtenir les valeurs expérimentales de  $H_0$ ,  $f_0$  et  $Q$  par modélisation.

A l'écran, il faut 2 fenêtres : l'une pour remplir les données, l'autre pour voir la courbe se construire. Ci-dessous, dans coord, j'ai décoché 0 inclus et la figure est globalement centrée : La construction donne la courbe de gain suivante ou  $f$  est en kHz :



Une modélisation par filtre passe-bande d'ordre 2 converge très bien avec :

$$f_{0II} \approx 2307\text{Hz} \quad H_{0II} \approx 0,27 \quad Q_{II} \approx 38,6$$

### **III. Bilan théorie-expérience.**

Proposer des explications qualitatives puis quantitatives dans le cas où les valeurs expérimentales sont très différentes des valeurs théoriques.

La partie II valide les résultats de la partie I. L'aspect expérimental est donc en contradiction avec l'aspect théorique.

On peut prendre en compte la présence de l'entrée de l'oscilloscope. Si on le fait, la nature du quadripole reste la même avec un gain maximum théorique légèrement inférieur à 1 et un facteur de qualité légèrement plus faible.

Un autre point est la résistance interne de la bobine, de l'ordre de  $10\Omega$ . A priori, l'effet devrait être faible. En fait, pas du tout : voir exercice en fin de CR. Cependant, la prise en compte modifie complètement la structure de la fonction de transfert qui n'est plus lisible.

J'utilise le résultat de la question 12 de l'exercice en annexe. On obtient :

$$H_o = \frac{1}{1 + \frac{rR^2C}{L}} \text{ et on peut sortir } r = \frac{L}{RC} \left( \frac{1}{H_o} - 1 \right) \approx 13\Omega \text{ ce qui montre qu'une faible valeur de cette}$$

résistance peut provoquer une modification importante des performances du montage. Vous pouvez remarquer qu'il y a peu de bobines dans les montages d'électronique.

#### IV. Aspect expérimental en régime transitoire.

Quelle est l'équation différentielle reliant  $s(t)$  à  $e(t)$  ?

Avec les valeurs numériques théoriques, quelle est la nature du régime transitoire ?

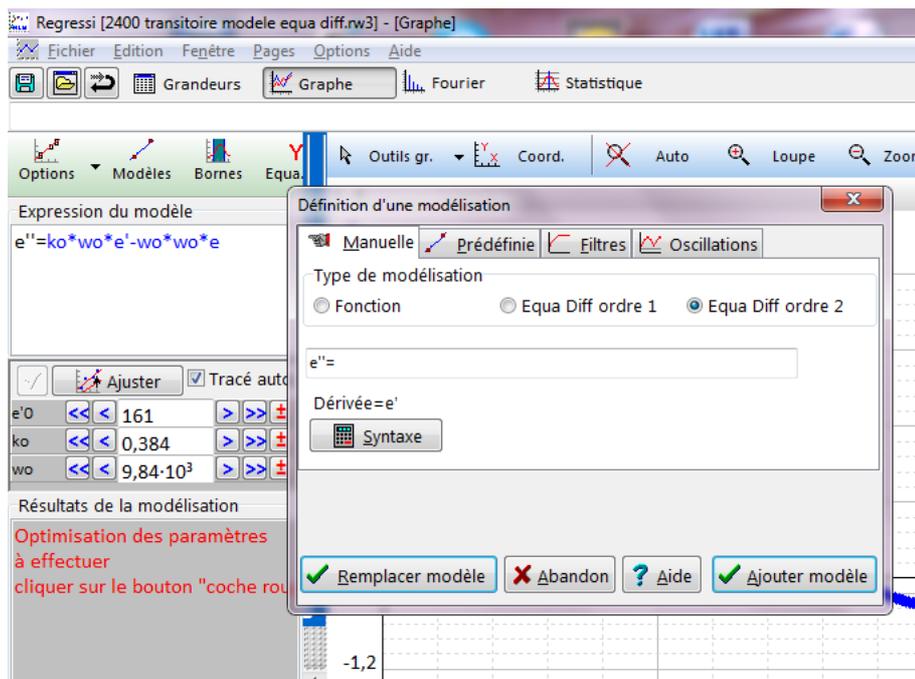
Proposer une écriture de la solution théorique à un échelon de tension avec les valeurs approchées des coefficients.

Faire l'acquisition d'une réponse indicielle du quadripôle avec LatisPro. En déduire de nouvelles valeurs expérimentales de  $H_0$ ,  $f_0$  et  $Q$  si possible.

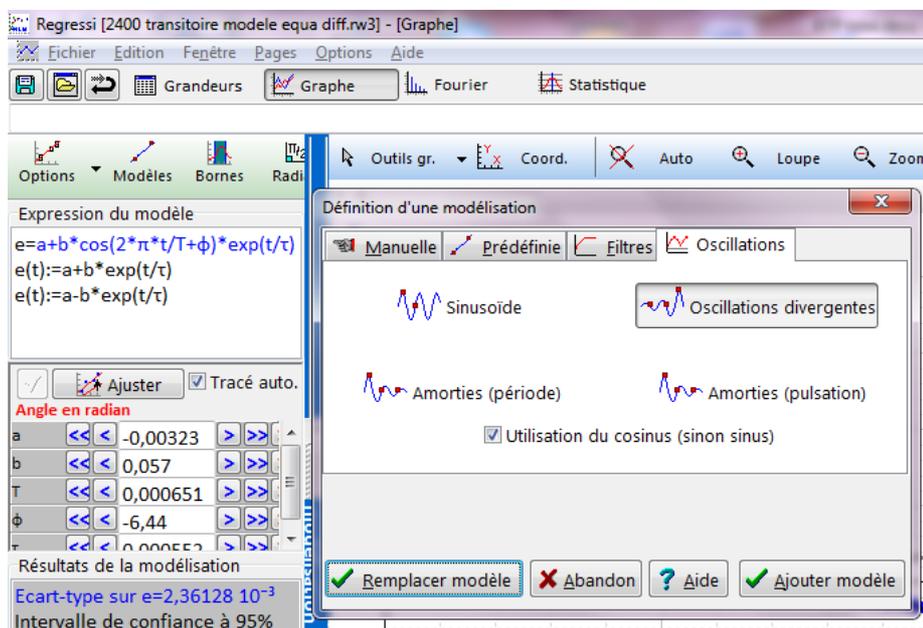
#### A titre d'information :

LatisPro permet d'exporter un fichier de données sous format txt. Ce fichier est alors récupérable sous regressi.

Regressi permet de modéliser l'équation différentielle ou la solution : exemple avec des oscillations sinusoïdales divergentes :

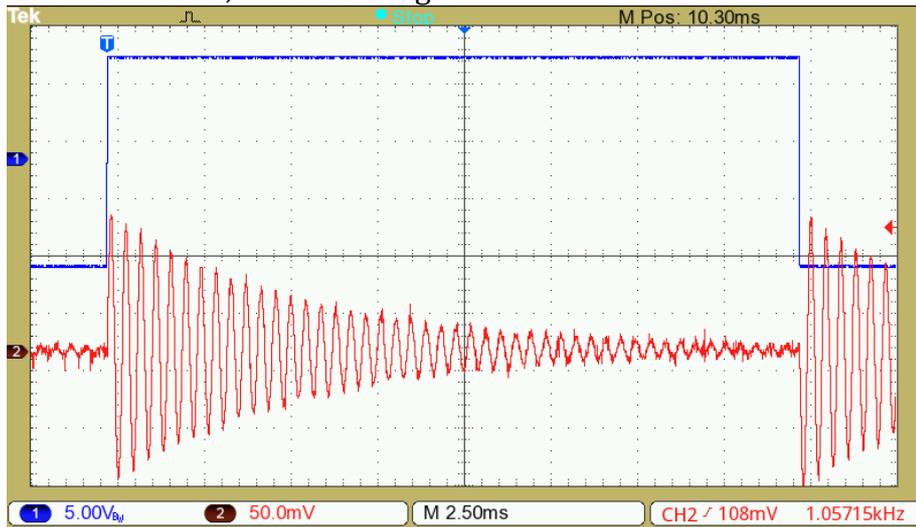


The screenshot shows the Regressi software interface. The main window displays the model expression  $e'' = k_0 \omega_0 e' - \omega_0^2 e$  and the parameter values  $k_0 = 0,384$  and  $\omega_0 = 9,84 \cdot 10^3$ . The 'Définition d'une modélisation' dialog box is open, showing the 'Equa Diff ordre 2' option selected. The expression  $e'' =$  is entered in the text field, and the 'Syntaxe' button is visible. The dialog also includes buttons for 'Remplacer modèle', 'Abandon', 'Aide', and 'Ajouter modèle'.

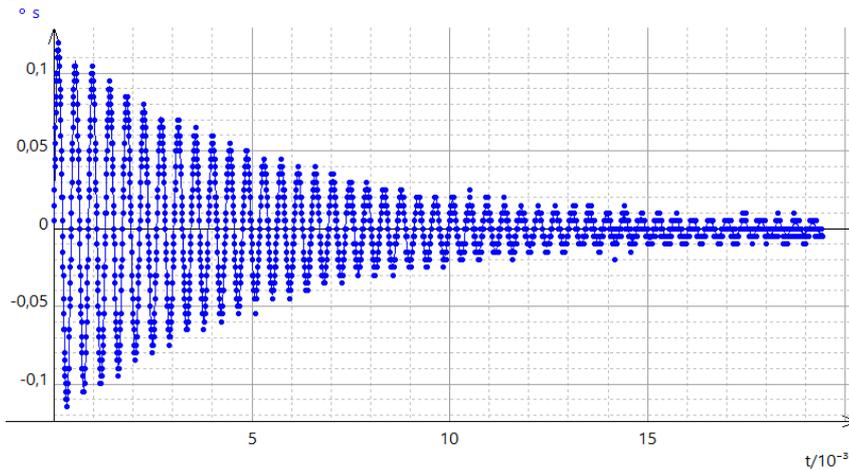


The screenshot shows the Regressi software interface. The main window displays the model expression  $e = a + b \cos(2\pi t/T + \phi) \exp(t/\tau)$  and the parameter values  $a = -0,00323$ ,  $b = 0,057$ ,  $T = 0,000651$ ,  $\phi = -6,44$ , and  $\tau = 0,000651$ . The 'Définition d'une modélisation' dialog box is open, showing the 'Oscillations' tab. The 'Oscillations divergentes' option is selected. The dialog also includes buttons for 'Remplacer modèle', 'Abandon', 'Aide', and 'Ajouter modèle'.

On peut faire la capture d'une réponse indicielle. L'image obtenue est la suivante : entrée en bleue , sortie en rouge.



On remarque que l'amplitude de sortie est faible. On peut la récupérer sous LatisPro et la transférer sous regressi pour traitement : élimination des points superflus, changement d'origine des temps pour commencer à l'instant t=0 :



Expression du modèle

$$s'' = -\omega_0/Q*s' - \omega_0^2*s$$

Ajuster     Tracé auto.

s'0 <<< 1,73·10<sup>3</sup> >>> ±  
 ω₀ <<< 1,45·10<sup>4</sup> >>> ±  
 Q <<< 38,6 >>> ±

Résultats de la modélisation

Ecart données-modèle

Ecart-type sur s=3,02914 10<sup>-3</sup>

Intervalle de confiance à 95%

s'0=(1,730 ±0,008)10<sup>3</sup>

ω₀=(14,4975 ±0,0009)10<sup>3</sup>

Q=(38,60 ±0,26)

Sur les derniers points, on peut noter la pixellisation

A partir de la fonction de transfert, on obtient l'équation différentielle vérifiée par s(t) :

$$\ddot{s} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{s} + \omega_0^2 s = 0$$

Une modélisation à partir de l'équation différentielle converge assez facilement, et on retrouve des valeurs quasiment identiques à celle de la partie III.

On peut aussi tenter en proposant une forme possible de la solution. En aidant un peu, la modélisation converge vers les valeurs déjà connues :

Options    Modèles    Bornes    Radian

Expression du modèle

$$s = A * \exp(-\omega_0 * t / 2 / Q) * \sin(\omega_0 * t + \phi)$$

Ajuster     Tracé auto.

Q <<< 38,6 >>> ±  
 ω₀ <<< 1,45·10<sup>4</sup> >>> ±  
 A <<< 0,120 >>> ±  
 φ <<< 0,0545 >>> ±

Résultats de la modélisation

Ecart données-modèle

Ecart-type sur s=3,01660 10<sup>-3</sup>

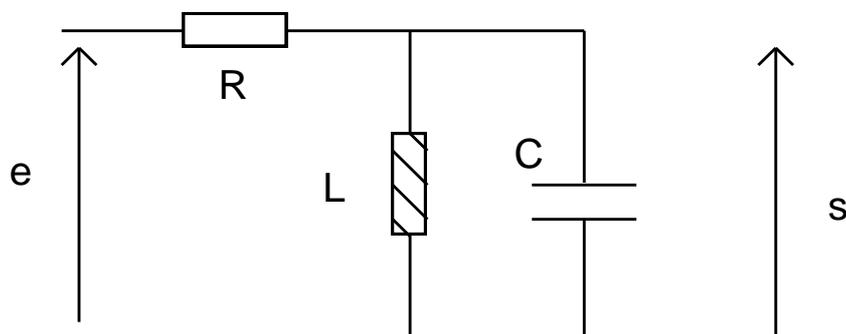
Intervalle de confiance à 95%

A=(119,5 ±0,6)10<sup>-3</sup>

ω₀=(14,4938 ±0,0013)krad

Q=(38,58 ±0,26)

φ=(54 ±5)mrad

**ANNEXE.****Etude théorique et expérimentale d'un filtre passif.**

On considère le circuit ci-dessus où  $R=1\text{M}\Omega$ ,  $C=0,1\mu\text{F}$ ,  $L \approx 0,09\text{H}$ .

On définit la pulsation  $\omega_0$  par  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ .

On est en régime sinusoïdal de pulsation  $\omega$  et on note :

$$e(t)=E.\cos(\omega t) \text{ et } s(t)=S.\cos(\omega t+\varphi).$$

0) Quelles sont les amplitudes complexes  $\underline{E}$  et  $\underline{S}$  associées à  $e(t)$  et  $s(t)$  ?

1) Calculer  $\omega_0$  et la fréquence  $f_0$  associée. Comparer  $L\omega_0$  et  $1/(C\omega_0)$ .

2) On note  $\underline{Z}$  l'impédance équivalente du dipôle LC parallèle, et  $\underline{Y} = 1/\underline{Z}$  son admittance. Exprimer  $\underline{Y}$ . Quelle est sa valeur à la fréquence  $f_0$  ? En déduire le comportement équivalent du dipôle à cette fréquence.

3) Exprimer  $\underline{S}$  en fonction de  $\underline{E}$ ,  $R$  et  $\underline{Y}$ .

Montrer alors que la fonction de transfert  $\underline{H}=\underline{S}/\underline{E}$  peut se mettre sous la forme :

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

où  $Q$  est à exprimer en fonction de  $R, L$  et  $C$ .  $H_0$  est une constante. AN.

4) De quel type de filtre s'agit-il ? Vérifier à l'aide des modèles équivalents BF et HF de  $L$  et de  $C$ . Quelle information importante sur le filtre obtient-on à partir de  $Q$  et de  $\omega_0$  ?

5) Combien vaut  $\underline{H}(\omega_0)$  ? Comment s'écrira alors  $s(t)$  ?

6) De manière générale, expliquer comment la connaissance de  $\underline{H}$  permet de connaître  $S$  et  $\varphi$ .

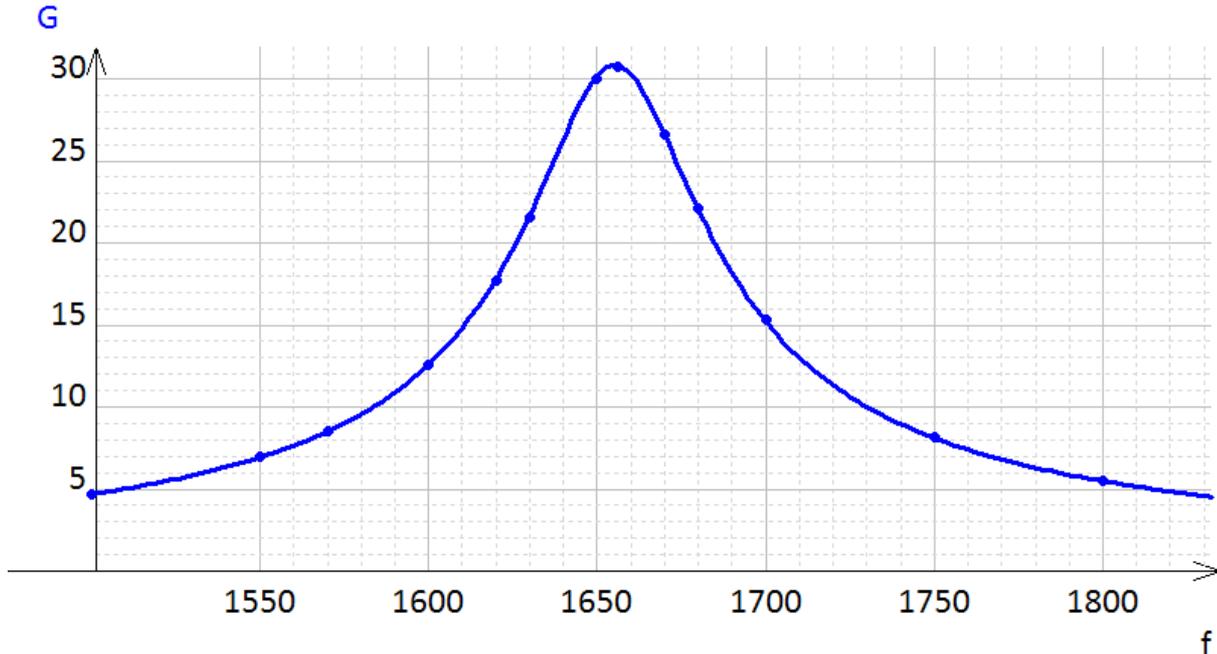
7) Pour  $\omega \ll \omega_0$  simplifier l'écriture de la fonction de transfert. Montrer alors que le gain en dB  $H_{\text{dB}}$  en fonction de  $x = \log(\omega/\omega_0)$  est pratiquement une droite dont on donnera l'équation.

Faire de même pour  $\omega \gg \omega_0$ .

8) Placer les deux droites sur un graphes, ainsi que le point correspondant à  $x=0$ . Compléter alors le dessin pour obtenir la forme graphique du diagramme de Bode.

9) Comment fera-t-on à l'oscilloscope pour détecter expérimentalement la valeur de  $\omega_0$  ?

10) On fait l'expérience au labo de physique avec des composants usuels. La bobine est constituée de deux bobines de 1000 spires. A priori, on a les valeurs numériques du début de cette partie. On construit expérimentalement le gain  $H=|H|$  en fonction de la fréquence  $f$  et on obtient la courbe expérimentale suivante représentant  $G=1000H$  en fonction de la fréquence  $f$  en Hz :



Quelles sont les valeurs expérimentales du gain maximal  $H_0$ , de  $Q$  et de  $f_0$  ? Comparer avec les valeurs théoriques.

11) Si on prend maintenant en compte les caractéristiques de l'oscilloscope, peut-on expliquer les valeurs expérimentales ?

12) En fait la bobine a une résistance propre  $r$  qui doit être de l'ordre de  $20\Omega$ . En tenant compte de  $r$  et de la présence de l'oscillo, montrer que  $\underline{H}(\omega_0) \approx \frac{1}{1+r\frac{ReqC}{L}}$  où  $R_e$  dépend de  $R$  et  $R_0$ .

Obtenir alors une valeur expérimentale de  $r$ . Conclusion.

### Correction.

0) On a  $\underline{E}=E$  et  $\underline{S}=S\exp(j\varphi)$ .

1)  $\omega_0 \approx 10^4 \text{ s}^{-1}$  et  $f_0 \approx 1600 \text{ Hz}$ . A cette pulsation,  $L\omega_0 = 1/(C\omega_0)$  EXACT.

2) Les deux dipôles  $L$  et  $C$  sont en parallèle donc les admittances s'ajoutent. On calcule :

$$\underline{Y} = j\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right) \quad \text{puis} \quad \underline{Z} = \frac{jL\omega}{1 - LC\omega^2}.$$

On calcule alors que  $\underline{Y}(\omega_0) = 0$  ce qui correspond à une impédance infinie, soit donc un interrupteur ouvert.

3) Par un PDT, on obtient :  $\underline{S} = \frac{\underline{Z}}{R + \underline{Z}} E = \frac{1}{1 + R\underline{Y}} E$ . On obtient la formule proposée avec  $H_0 = 1/Q =$

$$R \sqrt{\frac{C}{L}} \approx 1050.$$

4) Filtre passe-bande, compatible avec les modèles équivalents HF et BF de  $L$  et de  $C$ .  $\omega_0$  est la pulsation de résonance et  $\Delta f = f_0/Q \approx 1,6 \text{ Hz}$  est la bande passante à  $-3\text{dB}$ . Le gain maximum est  $H_0 = 1$ .

5)  $\underline{H}(\omega_0) = 1$ . On aura alors  $s(t) = e(t)$ .

6) On a  $\underline{S} = S.e^{j\varphi} = \underline{H}E$  donc  $S = |\underline{H}|.E = HE$  et  $\varphi = \arg(\underline{S}) = \arg(\underline{H})$

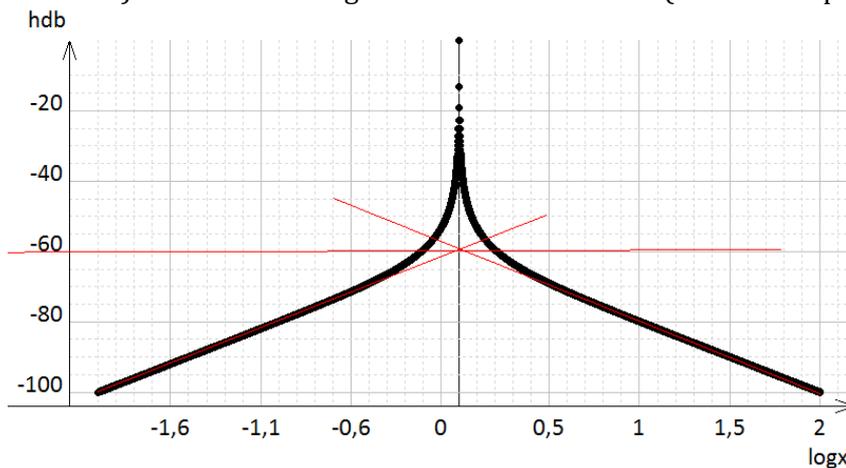
$$s(t) = HE \cdot \cos(\omega t + \arg(\underline{H}))$$

7) Avec une telle valeur de  $Q$ , on va avoir un comportement très violent au voisinage de la pulsation de résonance. On pose  $x = \omega / \omega_0$ .

En BF,  $x \ll 1$ ,  $\underline{H} \approx jx/Q$  soit  $\varphi \approx +\pi/2$  et  $H_{dB} \approx 20 \log(x/Q) = 20 \log(x) - 60$

En HF,  $x \gg 1$ ,  $\underline{H} \approx -j/(Qx)$  soit  $\varphi \approx -\pi/2$  et  $H_{dB} \approx -20 \log(xQ) = -20 \log(x) - 60$

8) On dessine le diagramme de Bode suivant (le 0 est mal placé, bug):



9) On a alors  $\underline{S}(\omega_0) = E$ , donc  $s(t) = e(t)$ , les deux signaux sont égaux donc en phase.

Méthode 1: On cherche la pulsation pour laquelle les deux signaux sont confondus ou pour laquelle la sortie a la plus grande amplitude.

Méthode 2 : en mode XY :  $e(t)$  sur la voie 1,  $s(t)$  sur la voie 2. A la pulsation  $\omega_0$ , l'ellipse se transforme en droite. Cette méthode est beaucoup plus précise.

10)

Sur le graphe, on lit  $f_{oexp} \approx 1650 \text{ Hz}$  à 3% de la valeur théorique. Plutôt bon.

On lit un gain maximal  $H_0$  d'environ 0,03 très très loin du 1 théorique.

On lit aussi les deux fréquences de coupure à 1630 Hz et 1680 Hz, ce qui donne  $Q_{exp} \approx 33$  très loin aussi de la valeur théorique.

Erreur d'un facteur 30 environ sur ces deux dernières grandeurs.

11) Si on ajoute maintenant les caractéristiques  $R_0$  et  $C_0$  de l'oscillo, on obtient la même forme de fonction de transfert avec :  $H_0 = \frac{R_0}{R+R_0} \approx 0,5$ ,  $Q = \frac{RR_0}{R+R_0} \sqrt{\frac{C+C_0}{L}} \approx 500$ ,  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L(C+C_0)}}$  ce qui n'explique pas le résultat expérimental.

12) On reprend la question 3 où on réécrit l'admittance  $\underline{Y}$  à la pulsation  $\omega_0$  :

$$\underline{Y} = \frac{1}{r+jL\omega_0} + jC\omega_0 = \frac{jrc\omega_0}{r+jL\omega_0} \approx \frac{rc}{L} \quad \text{car } r \approx 20\Omega \ll L\omega_0 \approx 1000\Omega$$

On obtient alors le résultat demandé. et on évalue  $r \approx 60\Omega$ .